$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 23.11.2015.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Odredite Taylorov polinom stupnja 2, oko nule, za funkciju

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

   (b) (8 bodova) Izračunajte $\displaystyle\int_0^{0.2} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,\mathrm{d}x$ tako da greška bude manja od 10^{-2}.
   Ocjena n-tog ostatka Taylorovog polinoma oko nule za $f(x) = \ln(1+x)$:
   $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$ za $0 < x < 1$
   $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$ za $-1 < x < 0$

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 23.11.2015.

2. (a) (**10 bodova**) Odredite i obrazložite konvergiraju li redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n(4n+1)}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^{n^2}}$.

   (b) (**8 bodova**) Odredite radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} x^n$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

1. kolokvij, 23.11.2015.

3. (a) (**6 bodova**) Izračunajte diferencijal funkcije $f(x,y,z) = (x - \cos y + z^2, e^{xz}, x)$.

   (b) (**10 bodova**) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na graf funkcije $f(x,y) = \dfrac{\mathrm{e}^y + \mathrm{e}^{-y}}{2} \cos x$ koja prolazi točkom $\left(\dfrac{\pi}{4}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

1. kolokvij, 23.11.2015.

4. (5 bodova) Dokažite: ako red $\sum a_k$ konvergira te red $\sum b_k$ divergira, onda red $\sum (a_k + b_k)$ divergira.

5. (10 bodova) Nađite Taylorov red (oko nule) funkcije
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)(2-x)}.$$

6. (10 bodova) Da li funkcija
$$f(x,y) = \frac{(x+y)^2 - 1}{(x+y)^3 - 1}$$
ima limes u $(1/2, 1/2)$? Odgovor obrazložite.

7. (5 bodova) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zadana s $f(x,y) = g(xy)$, gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dvaput derivabilna funkcija. Dokažite da vrijedi
$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

8. (10 bodova) Definirajte vektorsku funkciju $\vec{r} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi $\vec{r}(0) = a\vec{j}$ te koja, kako varijablu funkcije povećavamo od 0 do 4π, iscrtava kružnicu $x^2 + y^2 = a^2$, i to
   (a) triput u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu,
   (b) dvaput u smjeru kretanja kazaljki na satu.

9. (10 bodova) Zadana je funkcija $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 2xy + \alpha x + \beta y + \gamma$. Odredite parametre α, β, γ tako da funkcija f ima lokalni minimum nula u točki $(1,1)$.

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 23.11.2015.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (a) (8 bodova) Odredite Taylorov polinom stupnja 2, oko nule, za funkciju

$$f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}.$$

   (b) (8 bodova) Izračunajte $\int_0^{0.5} \ln(1+x^2)\,\mathrm{d}x$ tako da greška bude manja od 10^{-2}.
   Ocjena n-tog ostatka Taylorovog polinoma oko nule za $f(x) = \ln(1+x)$:
   $|R_n(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$ za $0 < x < 1$
   $|R_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)(1+x)}$ za $-1 < x < 0$

2a	2b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 23.11.2015.

2. (a) (10 bodova) Odredite i obrazložite konvergiraju li redovi $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{4n^2 - 1}$ i $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$.

   (b) (8 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{2^{n^2}} x^n$.

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

1. kolokvij, 23.11.2015.

3. (a) (6 bodova) Izračunajte diferencijal funkcije $f(x, y, z) = (z, z + \sin y + x^2, e^{xz})$.

   (b) (10 bodova) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine i normale na graf funkcije $f(x, y) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \cos y$ koja prolazi točkom $\left(0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

4	5	6	7	8	9

PROFESOR

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

1. kolokvij, 23.11.2015.

4. (5 bodova) Dokažite: ako red $\sum a_k$ konvergira, onda red $\sum 1/a_k$ divergira.

5. (10 bodova) Nađite Taylorov red (oko nule) funkcije

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{1}{1-x}\right).$$

6. (10 bodova) Da li funkcija

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{xy+1}-1}$$

ima limes u $(0,0)$? Odgovor obrazložite.

7. (5 bodova) Funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ je zadana s $f(x,y) = g(xy)$, gdje je $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabilna funkcija. Dokažite da vrijedi

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) - y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

8. (10 bodova) Definirajte vektorsku funkciju $\vec{r} : [0, 6\pi] \to \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi $\vec{r}(0) = a\vec{i}$ te koja, kako varijablu funkcije povećavamo od 0 do 6π, iscrtava kružnicu $x^2 + y^2 = a^2$, i to

   (a) dvaput u smjeru suprotnom od kretanja kazaljki na satu,

   (b) triput u smjeru kretanja kazaljki na satu.

9. (10 bodova) Zadana je funkcija $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - 3xy + \alpha x + \beta y + \gamma$. Odredite parametre α, β, γ tako da funkcija f ima lokalni minimum nula u točki $(2,-1)$.