$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova):

   (a) (8 bodova) Odredite Taylorov red oko nule funkcije

   $$f(x) = (x-1)(x+2)(x-3).$$

   (b) (8 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-3}

   $$\int_0^1 x \sin(x^2) dx.$$

   Napomena: ocjena ostatka Taylorovog polinoma oko nule stupnja $2m-1$ za $f(x) = \sin(x)$ je $|R_{2m-1}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}$, za $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

2. (ukupno 18 bodova)

   (a) (12 bodova) Ispitajte konvergenciju redova

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{\sqrt{n^3 - \ln n}}.$$

   (b) (6 bodova) Dajte primjer niza $(a_n)_n$ takvog da red

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n^2(n+1)} x^n$$

   ima radijus konvergencije jednak $\frac{2}{\pi}$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

3. (ukupno 16 bodova)

   (a) (8 bodova) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

   $$f(x,y) = \frac{1+x^2}{y^2} - 1$$

   u točki $(2,-1,4)$.

   (b) (8 bodova) Odredite sve vrijednosti realnog parametra $a \in \mathbb{R}$ za koje se ploha iz gornjeg zadatka i graf funkcije

   $$g(x,y) = \frac{x^2 + (y-1)^2}{2} + a(x-2)$$

   sijeku pod pravim kutom u točki $(2,-1,4)$.

4	5	6	7	8	9	10

JMBAG | IME I PREZIME | PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

4. (10 bodova) Dokažite da sljedeći red konvergira i izračunajte sumu reda
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k2^k}.$$

5. (10 bodova) Razvijte u Taylorov red oko nule funkciju $f(x) = x^3 \mathrm{e}^{-x^2} + x - 1$.

6. (5 bodova) Izračunajte limes funkcije $f(x) = \frac{x(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$ kada se (x, y) približava točki $(0, 1)$ duž krivulje $y = \cos x$.

7. (5 bodova) Nađite jednadžbu nivo-plohe funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 2y^2} - \ln z$ koja sadrži točku $(3, 4, \mathrm{e})$.

8. (10 bodova) Ima li funkcija
$$f(x, y) = \frac{xy + x - y - 1}{x^2y^2 - 1}$$
limes u $(1, -1)$? Odgovor obrazložite.

9. (5 bodova) Odredite smjer u kojem funkcija $f(x, y) = xy^2 + 2xy - 1$ ima najveći pad u točki $(1, -1)$.

10. (5 bodova) Nađite neku funkciju $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi
$$\nabla f(x, y) = 2xy\vec{i} + (1 + x^2)\vec{j}.$$

$1a$	$1b$

JMBAG IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 16 bodova)

   (a) (8 bodova) Odredite Taylorov red oko nule funkcije

   $$f(x) = (x+1)(x-2)(x+3).$$

   (b) (8 bodova) Izračunajte s greškom manjom od 10^{-3}

   $$\int_0^1 x\cos(x^2)dx.$$

   Napomena: ocjena ostatka Taylorovog polinoma oko nule stupnja $2m$ za $f(x) = \cos(x)$ je $|R_{2m}(x)| \leq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$, za $x \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

2. (ukupno 18 bodova)
   (a) (12 bodova) Ispitajte konvergenciju redova

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{\sqrt{n^5}} \quad \text{i} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n^3+2)}{\sqrt{n^5 - \ln n}}.$$

   (b) (6 bodova) Dajte primjer niza $(a_n)_n$ takvog da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n a_n}{n(n+1)^2} x^n$$

   ima radijus konvergencije jednak $\frac{3}{\pi}$.

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

3. (ukupno 16 bodova)
   (a) (8 bodova) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na graf funkcije

   $$f(x,y) = \frac{1+y^2}{x^2} - 1$$

   u točki $(1,-2,4)$.

   (b) (8 bodova) Odredite sve vrijednosti realnog parametra $k \in \mathbb{R}$ za koje se ploha iz gornjeg zadatka i graf funkcije

   $$g(x,y) = \frac{(x+1)^2 + y^2}{2} + k(y+2)$$

   sijeku pod pravim kutom u točki $(1,-2,4)$.

4	5	6	7	8	9	10

JMBAG — IME I PREZIME — PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 2

prvi kolokvij, 25.11.2019.

4. (10 bodova) Dokažite da sljedeći red konvergira i izračunajte sumu reda
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{2^k}.$$

5. (10 bodova) Razvijte u Taylorov red oko nule funkciju $f(x) = x^2 e^{x^2} + 2x + 1$.

6. (5 bodova) Izračunajte limes funkcije $f(x) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ kada se (x, y) približava ishodištu duž krivulje $y = \sin x$.

7. (5 bodova) Nađite jednadžbu nivo-plohe funkcije $f(x) = x^2 + 2y^2 - 2xyz$ koja sadrži točku $(-1, 2, 1)$.

8. (10 bodova) Ima li funkcija
$$f(x, y) = \frac{xy - x + y - 1}{x^2y^2 - 1}$$
limes u $(-1, 1)$? Odgovor obrazložite.

9. (5 bodova) Odredite smjer u kojem funkcija $f(x, y) = x^2y - 2xy + 1$ ima najveći pad u točki $(1, 1)$.

10. (5 bodova) Nađite neku funkciju $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tako da vrijedi
$$\nabla f(x, y) = (2xy + 1)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j}.$$