

# Osnove matematičke analize

## 3. zadaća

1. Za sljedeće skupove odredite interior, zatvarač i rub:

a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in \langle -\infty, 3] \cup \langle 5, +\infty \rangle\}$  u  $\mathbb{R}^2$ ,

b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 0\}$ ,

c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{3^2} \leq 1\}$ ,

d)  $D = [1, 2] \times [2, +\infty)$

Uputa: Kad god je moguće, koristite svojstva neprekidnih funkcija.

2. Dokažite da su sljedeći skupovi otvoreni:

a)  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y + z^3 - 2 < 0\}$

b)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 2y < 0, z > 3\}$ .

c)  $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i > 0, |x_i| > i \forall i \in \{1, \dots, n\}\}$

3. Provjerite povezanost/kompaktnost sljedećih skupova:

a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \langle -\infty, 3] \cup [5, +\infty)\}$  u  $\mathbb{R}^2$ ,

b)  $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = |x|, x \in [-1, 1]\}$ ,

c)  $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy > 1, |y| \leq 2\}$ ,

d)  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0\}$

4. Je li funkcija  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  dana s

$$g(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^4}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

neprekidna? Je li derivabilna? Je li klase  $C^1$ ?

5. Može li se funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dana s

$$f(x, y) = \frac{x^2y - x^2y \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^3}$$

proširiti do neprekidne funkcije na  $\mathbb{R}^2$ ?

6. Može li se funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  dana s

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + 3y^2)}{\ln(1 + 2x^2 + y^2)}$$

proširiti do neprekidne u  $(0, 0)$ ?

7. Je li funkcija

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^5 - x^2y^3}{(x^2 + y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0), & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

diferencijabilna na  $\mathbb{R}^2$ ?

8. Odredite Taylorov polinom reda 3 funkcije  $f(x, y) = \sin(3x - y)$  u točki  $(0, 0)$ .
9. Neka je  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  definirano s  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1)$  i neka je  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  diferencijabilno preslikavanje. Napišite parcijalne derivacije funkcija  $f \circ g$  i  $g \circ f$ .
10. Dokažite da je funkcija  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x, y) = |xy|$  diferencijabilna u  $(0, 0)$ , ali nije diferencijabilna niti na jednom otvorenom krugu s centrom u  $(0, 0)$ .
11. Zadana je funkcija  $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  formulom

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x_2 \leq \frac{1}{3} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Odredite gornji i donji Riemannov integral funkcije  $f$ . Je li  $f$  Riemann integrabilna? Odgovore detaljno obrazložite.