$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.
Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

1. (ukupno 20 bodova)

   (a) (6 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{2n+3}+\ln n}{(n^2+1)\cdot 2^n} x^n.$$

   (b) (7 bodova) Za red potencija iz a) dijela zadatka odredite konvergira li red u slučaju $x = 2$ i $x = -2$.

   (c) (7 bodova) Odredite $\operatorname{arctg}(0.1)$ s greškom manjom od 10^{-6}.

   Napomena: Taylorov polinom n-tog stupnja i ostatak za funkciju $\operatorname{arctg}(x)$ iznose

$$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m-1}(x),$$

   uz $|R_{2m-1}(x)| \le \dfrac{|x|^{2m+1}}{2m+1}$ (kad je $x \in [-1,1]$).

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

2. (ukupno 15 bodova)

(a) (7 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f(x,y) = x^4 + 3y^2$$

na domeni omeđenoj krivuljama $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 9$.

(b) (8 bodova) Izračunajte

$$\iint_\Omega \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

gdje je Ω unutrašnjost trokuta s vrhovima $(0,0)$, $(1,0)$ i $(1,2)$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

3. (ukupno 15 bodova)

   (a) (7 bodova) Ako postoji, odredite potencijalnu funkciju za vektorsko polje

   $$F(x,y) = \left(2xye^y, x^2(y+1)e^y\right),$$

   te izračunajte krivuljni integral polja F od točke $(1,0)$ do točke $(-1,0)$ duž jedinične polukružnice oko ishodišta iznad x-osi.

   (b) (8 bodova) Izračunajte volumen tijela

   $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + (y-1)^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

4	5	6	7	8

JMBAG | IME I PREZIME | PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

4. (10 bodova) Može li se u beskonačnoj sumi

$$\pm\frac{1}{\sqrt{1}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\pm\frac{1}{\sqrt{4}}\cdots\pm\frac{1}{\sqrt{n}}\cdots$$

odabrati predznake (zasebno + ili − za svaki pribrojnik) tako da dobiveni red konvergira? Detaljno obrazložite.

Rješenje. DA. Jedan mogući odabir predznaka je alternirajući:

$$-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}\cdots+(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}}\cdots .$$

Niz (a_n), $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, je padajući i konvergira prema 0. Zato će po Leibnizovom kriteriju konvergirati red $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

5. (10 bodova) Razvijte u Taylorov red oko $x = 0$ funkciju danu formulom

$$f(x) = \ln(1 + x^3).$$

Rješenje. Deriviranu funkciju je lako razviti koristeći formulu za sumu geometrijskog reda:

$$f'(x) = \frac{3x^2}{1+x^3} = 3x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-x^3)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 3x^{3n+2}, \qquad \text{za } |x| < 1.$$

Integriranje član-po-član sada odmah daje

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^{3n+3} + C, \qquad \text{za } |x| < 1.$$

Kako je $f(0) = \ln 1 = 0$, zaključujemo da mora biti $C = 0$.

6. (10 bodova) Odredite jednadžbu tangencijalne ravnine na plohu $x^3 + y^2 + z = 3$ u točki $(1, 1, 1)$.

Rješenje. Ploha je graf funkcije $f(x, y) = -x^3 - y^2 + 3$. Tangencijalna ravnina ima jednadžbu

$$z = f(1,1) + \frac{\partial f}{\partial x}(1,1)(x-1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)(y-1),$$

tj.

$$z = 1 - 3(x-1) - 2(y-1), \qquad \text{tj. } z = -3x - 2y + 6,$$

što se (opcionalno) zapiše

$$3x + 2y + z = 6.$$

7. (10 bodova) Zamijenite poredak integracije, a potom i izračunajte:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y.$$

Rješenje.

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 e^{\frac{y}{x^2}}\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_0^1 \int_0^{x^2} e^{\frac{y}{x^2}}\, \mathrm{d}y\, \mathrm{d}x = \int_0^1 (e-1)x^2\, \mathrm{d}x = \frac{e-1}{3}$$

8. (10 bodova) Neka je funkcija $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dana formulom

$$f(x,y) = \frac{2(x+1)-x^2}{2(y+1)+y^2}.$$

Što geometrijski predstavlja nivo-krivulja $f(x,y)=1$? Pozitivno orijetirajmo tu nivo-krivulju i označimo ju $\vec{\Gamma}$. Izračunajte

$$\int_{\vec{\Gamma}} x\, \mathrm{d}y.$$

Rješenje. Nivo-krivulja ima jednadžbu $(x-1)^2+(y+1)^2=2$ i to je kružnica sa središtem u $(1,-1)$ i radijusom $\sqrt{2}$. Ako D označava krug $(x-1)^2+(y+1)^2<2$, tada Greenova formula daje

$$\int_{\vec{\Gamma}} x\, \mathrm{d}y = \int_D \Big(\frac{\partial}{\partial x} x\Big)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_D 1\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \text{površina}(D) = (\sqrt{2})^2\pi = 2\pi.$$

$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora niti ikakvih formula osim onih koje će vam biti podijeljene na početku pisanja.
Svaki oblik varanja (uključujući i samo posjedovanje pametnih uređaja blizu sebe) može biti sankcionirano prijavom Stegovnom povjerenstvu i privremenom zabranom polaganja kolegija.

1. (ukupno 20 bodova)

   (a) (6 bodova) Odredite radijus konvergencije reda potencija

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{3n-2}+\ln n}{(n^2+2)\cdot 3^n} x^n.$$

   (b) (7 bodova) Za red potencija iz a) dijela zadatka odredite konvergira li red u slučaju $x = 3$ i $x = -3$.

   (c) (7 bodova) Odredite $\operatorname{arctg}(0.1)$ s greškom manjom od 10^{-6}.

   Napomena: Taylorov polinom n-tog stupnja i ostatak za funkciju $\operatorname{arctg}(x)$ iznose

   $$\operatorname{arctg}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} \ldots + (-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{2m-1} + R_{2m-1}(x),$$

   uz $|R_{2m-1}(x)| \leq \dfrac{|x|^{2m+1}}{2m+1}$ (kad je $x \in [-1,1]$).

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

2. (ukupno 15 bodova)

   (a) (7 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije

   $$f(x, y) = 3x^4 + y^2$$

   na domeni omeđenoj krivuljama $x^2 + y^2 = 1$ i $x^2 + y^2 = 9$.

   (b) (8 bodova) Izračunajte

   $$\iint_\Omega \frac{1}{1 + y^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y,$$

   gdje je Ω unutrašnjost trokuta s vrhovima $(0, 0)$, $(0, 1)$ i $(2, 1)$.

3a	3b

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

3. (ukupno 15 bodova)

   (a) (7 bodova) Ako postoji, odredite potencijalnu funkciju za vektorsko polje

   $$F(x,y) = \left(3x^2ye^y, x^3(y+1)e^y\right),$$

   te izračunajte krivuljni integral polja F od točke $(1,0)$ do točke $(-1,0)$ duž jedinične polukružnice oko ishodišta iznad x-osi.

   (b) (8 bodova) Izračunajte volumen tijela

   $$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x-1)^2 + y^2 \leq 1, \ 0 \leq z \leq \sqrt{x^2+y^2}\}.$$

4	5	6	7	8

JMBAG

IME I PREZIME

PROFESOR

Diferencijalni i integralni račun 2

popravni kolokvij, 22.2.2023.

Vidjeti prvu grupu.