$1a$	$1b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

Napomene: Odmah potpišite sva četiri lista koja ste dobili. Zadatke rješavajte na tim papirima i dodatnim praznim papirima koje također trebate potpisati. Nije dozvoljeno korištenje kalkulatora.

1. (ukupno 20 bodova):

   (a) (10 bodova) Ispitajte tip lokalnih ekstrema funkcije $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ zadane s

   $$g(x, y) = e^{x+y} + x^2 + 3xy + 2y^2.$$

   (b) (10 bodova) Odredite globalne ekstreme funkcije $f(x, y) = y^3 - 3y - \frac{9}{4}\sin^2 x$ na domeni $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}, 0 \le y \le \cos x\}$.

$2a$	$2b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

2. (ukupno 20 bodova)
   (a) (10 bodova) Izračunajte:
   $$\int_{\Omega} e^{x^2} dxdy$$
   gdje je Ω trokut s vrhovima: $(0,0)$, $(1,1)$, $(1,-1)$.
   (b) (10 bodova) Izračunajte volumen tijela
   $$\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ x^2 + y^2 \leq 3z^2\}$$

$3a$	$3b$

JMBAG

IME I PREZIME

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

3. (ukupno 10 bodova)

Neka je Ω područje omeđeno krivuljama $y = x^2$ i $x + y = 2$, te C njegov pozitivno orijentirani rub. Koristeći Greenov teorem, izračunajte vrijednost integrala

$$\int_C \frac{y^3}{y^2+1}dx + \frac{xy^2 - x}{(y^2+1)^2}dy.$$

4	5	6	7	8	9	10

JMBAG ____________ IME I PREZIME ____________

Diferencijalni i integralni račun 2

drugi kolokvij, 11.02.2021.

4. (10 bodova) Prilikom integriranja po nutrini, vanjštini ili dijelu elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ korisno je uvesti eliptičke koordinate (r, φ), $r \geq 0$, $\varphi \in [0, 2\pi\rangle$ gdje je

$$\begin{cases} x = a\, r\, \cos\varphi \,, \\ y = b\, r\, \sin\varphi \,. \end{cases}$$

Koristeći eliptičke koordinate izračunajte

$$\iint_{\mathcal{E}} x^2 \, dx\, dy \quad ,$$

gdje je

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} \leq 1 \right\} \quad .$$

5. (10 bodova) Neka je $K = [1, 2]^2$ kvadrat a Γ njegov rub orijentiran u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu. Izračunajte

$$\int_{\Gamma} x^2 y \, dx + 3x^2 y \, dy \quad .$$

6. (10 bodova) Trostruki integral

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \int_0^{1-y} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx$$

napišite u obliku

$$\int_?^? \int_?^? \int_?^? f(x, y, z) \, dy \, dx \, dz \quad .$$

7. (10 bodova) Nađite (najkraću) udaljenost od točke $T(1, 2, 0)$ do konusa

$$z^2 = x^2 + y^2 \quad .$$

8. (10 bodova) Neka je jednadžbom $z = f(x, y)$, $(x, y) \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^2$ dana ploha Γ te neka f ima neprekidne parcijalne derivacije prvog reda na otvorenom skupu $\mathcal{O}$. Pokažite da, ako je $T(x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$ ona točka s Γ koja je najbliža točki $S(a, b, c) \notin \Gamma$, onda je dužina $\overline{TS}$ okomita na plohu Γ u točki T.