Linearna algebra 1 (2021./2022.)

1. domaća zadaća

1. Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ neka je S_λ podskup vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ zadan kao

   $$S_\lambda = \{(\lambda, 1, 1), (1, \lambda, 1), (1, 1, \lambda)\}.$$

   Provjerite linearnu nezavisnost skupa S_λ ovisno o λ. Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ je S_λ baza za $\mathbb{R}^3$? Odgovor obrazložite.

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše $2n$ definiramo polinome

   $$p_k(x) = (x^2 + x + 5)^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

   Dokažite da je skup $\{p_1, \dots, p_n\}$ linearno nezavisan, te ga nadopunite do baze za $\mathcal{P}_{2n}$.

3. Neka su $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y \neq 0\}$ i $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0\}$ podskupovi vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Odredite linearne ljuske skupova A i B.

4. Neka su $S = \{a_1, \dots, a_n\}$ i $T = \{b_1, \dots, b_m\}$ podskupovi vektorskog prostora V.

   - Dokažite da, ako je $S \subseteq T$, tada je $[S] \subseteq [T]$.
   - Vrijedi li obratna tvrdnja, to jest, ako je $[S] \subseteq [T]$, tada je $S \subseteq T$? Ako vrijedi, dokažite ju, a ako ne vrijedi, nađite kontraprimjer.

5. Odredite vrijednost $p(2.5)$, ako je p Lagrangeov interpolacijski polinom $p \in \mathcal{P}_2$ određen podacima $(1, 1), (2, 2), (3, 0)$.