LA1 2021./2022. Druga domaća zadaća

1. Neka je $\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ baza vektorskog prostora V. Za skalare $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ definirajmo vektore $c_1 = \gamma_1 b_1, c_2 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2, c_3 = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \gamma_3 b_3, \ldots, c_n = \gamma_1 b_1 + \gamma_2 b_2 + \ldots + \gamma_n b_n$. Odredite nužan i dovoljan uvjet na skalare $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ da i skup $\{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ bude baza za V.

2. Neka je V vektorski prostor dimenzije 3. Dokažite da V sadrži beskonačno mnogo potprostora dimenzije 2.

3. U prostoru V dimenzije 6 zadani su potprostor M dimenzije 5 i potprostor L dimenzije 4. Odredite $\dim(L \cap M)$. Za svaku dobivenu vrijednost navedite primjere takvih prostora.

4. U prostoru realnih polinoma P_3 zadani su potprostori

$$M = \{p \in P_3 : p(1) = p(2) = 0\},\ L = \{p(t) = c_0 + c_1 t + c_3 t^3 : c_0, c_1, c_3 \in \mathbb{R}\}.$$

   Odredite po jednu bazu za $M + L$ i $M \cap L$.

5. Pokažite da je skup $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2 : a + d = b + c \right\}$ potprostor od M_2 i odredite mu neki direktan komplement.