

# Osnove matematičke analize

## 1. zadaća

1. Odredite supremume i infimume sljedećih skupa (ako postoje):

a)  $A = \left\{ (-1)^{n+1} \frac{2n^2-1}{n^2+2} : n \in \mathbb{N} \right\}$ .

b)  $B = \left\{ \frac{2m+2n-3}{2mn-2m-n+1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$ .

c)  $C = \left\{ (-1)^{n+m} \frac{mn+m}{2mn+n-2m-1} : m, n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \right\}$ .

d)  $D = \left\{ (-1)^{n-m} \cdot \frac{2mn-m+6n-3}{mn+n} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$ .

e)  $E = \left\{ \frac{2nm^2+4nm-2n-3m^2-6m+3}{nm^2+2mn} : m, n \in \mathbb{N} \right\}$

f)  $F = \left\{ \frac{nx^2-4nx+2}{n} : n \in \mathbb{N}, x \in \langle 0, 3 \rangle \right\}$

g)  $G = \left\{ \frac{n^2+1}{3n^2+n} (2 + \cos(m\pi)) : n, m \in \mathbb{N} \right\}$

2. Neka su  $A, B \subseteq \mathbb{R}^+$  odozdo ograničeni skupovi ( $\mathbb{R}^+$  je skup pozitivnih realnih brojeva). Dokažite da je

$$\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B.$$

3. Neka su  $A, B \subseteq \mathbb{R}$  neprazni ograničeni skupovi. Vrijedi li nužno:

a) Ako je  $A \subsetneq B$ , onda je  $\sup A < \sup B$ ?

b) Ako je  $A \subsetneq B$ , onda je  $\inf A > \inf B$ ?

c)  $\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B$ ?

d)  $\inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B$ ?

e)  $\sup(A - B) = \sup(A) - \sup(B)$ , gdje je  $A - B = \{a - b : a \in A, b \in B\}$ ?

f)  $\sup(A - B) = \sup(A) - \inf(B)$ ?

Ako neke od tih tvrdnji vrijede općenito, dokažite ih, a ako ne vrijede općenito, navedite kontraprimjer.

4. Neka su  $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ . Dokažite:

a)  $\langle a, b \rangle \sim [a, b] \sim \langle a, b \rangle \sim [a, b] \sim \mathbb{R}$ .

b)  $[a, +\infty) \sim \langle -\infty, a \rangle \sim \mathbb{R}$ .

5. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva neprebrojiv skup.

6. Dokažite da je skup iracionalnih brojeva gust u  $\mathbb{R}$ , tj. da za svaki  $x \in \mathbb{R}$  i za svaki  $\epsilon > 0$  vrijedi

$$\langle x - \epsilon, x + \epsilon \rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$$