1. (a) Za proizvoljni kompakt K postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $K \subseteq [-n, n]$. Sada je za sve $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ takve da je supp $\varphi \subseteq K$

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \lfloor x \rfloor |\varphi(x)| dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}} \big| \lfloor x \rfloor \big| |\varphi(x)| dx = \int_{[-n,n]} \big| \lfloor x \rfloor \big| |\varphi(x)| dx \leq 2n^2 ||\varphi||_{L^\infty(K)}.$$

(b) Neka je $(\varphi_n)_n \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R})$ takav da $\varphi_n \overset{\mathcal{S}}{\to} 0$. Koristimo se standardnim trikom za Schwartzove funkcije:

$$\int_{\mathbb{R}} \lfloor x \rfloor \varphi_n(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + |x|^4} (1 + |x|^4) \varphi_n(x) dx.$$

Kako je $\lfloor x \rfloor \leq |x| + 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$, to je $\frac{\lfloor x \rfloor}{1+|x|^4} \in L^1(\mathbb{R})$, pa Hölder daje ocjenu

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + |x|^4} (1 + |x|^4) \varphi_n(x) dx \leq \left|\left| \frac{\lfloor x \rfloor}{1 + |x|^4} \right|\right|_{L^1(\mathbb{R})} ||\varphi_n||_4$$

Puštanjem $n \to \infty$ slijedi $\lfloor x \rfloor \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$.
Alternativno, može se koristiti i 3. zadatak iz druge zadaće uz $\big| \lfloor x \rfloor \big| \leq |x| + 1 \leq |x|^2$ za $|x| \geq 2$.

(c) Kako je g klase C^1 (po dijelovima konstantna) osim u točkama $\{-2019, -2018, ..., 2018, 2019\}$ prema lemi s vježbi je

$$g' = \{g'\} + \sum_{n=-2019}^{2019} (g(n+) - g(n-)) \delta_n = \sum_{n=-2018}^{2018} \delta_n - 2019\delta_{-2019} - 2018\delta_{2019}.$$

2. Primjenom Fourierove transformacije na jednadžbu dobijemo

$$\hat{u}_t + 16\pi^2 |\xi|^2 \hat{u} = 0.$$

Rješavanjem ODJ-a (po t), dobijemo da je transformirano rješenje dano s

$$\hat{u}(t, \xi) = \hat{u_0}(\xi) e^{-16\pi^2 |\xi|^2 t}.$$

Kako je $e^{-16\pi^2|\xi|^2 t} = \prod_{i=1}^n e^{-16\pi^2 \xi_i^2 t}$ parna, njezina inverzna Fourierova transformacija je jednaka njezinoj Fourierovoj transformaciji. Također, jer su varijable separirane (zadatak 4.a) iz druge zadaće) to je Fourierova transformacija gornje funkcije jednaka $(4\sqrt{\pi t})^{-n} e^{-\frac{|x|^2}{16t}}$. Rješenje jednadžbe je tada

$$u(t, x) = \int_{-\infty}^{\infty} (4\sqrt{\pi t})^{-n} e^{-\frac{|y|^2}{16t}} u_0(x - y) dy = (Fubini) = (4\sqrt{\pi t})^{-n} \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|y_i|^2}{16t}} \sin(x_i - y_i) dy_i.$$

Korištenjem identiteta za sinus zbroja te naknadno činjenice da je integral neparne integrabilne funkcije $e^{\frac{-y_i^2}{16t}} \sin y_i$ jednak 0, i-ti integral u produktu se svede na

$$\sin x_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{|y_i|^2}{16t}} \cos y_i dy_i = \sin x_i \sqrt{16\pi t} e^{-4t}.$$

Preostaje pomnožiti dobivene izraze te dobijemo konačno rješenje

$$u(t, x) = u_0(x) e^{-4nt}.$$

3. Sredimo prvo izraz za funkciju f:

$$f(x) = \sin^2(x)\cos^2(x) = \frac{1}{4}\sin^2(2x) = \frac{1}{8}(1 - \cos(4x)).$$

Sada je lagano za vidjeti da je $\hat{f} = \frac{1}{16}(2\delta_0 - \delta_{\frac{2}{\pi}} - \delta_{-\frac{2}{\pi}})$.

4. Prema teoremu srednje vrijednosti za svaku $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ i $x \in [-1,1]$ postoji $\theta \in \langle 0, x^2 \rangle$ takav da je $\varphi(x^2) - \varphi(0) = x^2\varphi'(\theta)$. Zbog toga je $\varphi(x^2) - \varphi(0) \leq x^2||\varphi'||_{L^\infty}$ za sve $x \in [-1,1]$. Sada je

$$\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(x^2) - \varphi(0)}{1 - \cos x} dx \leq ||\varphi'||_{L^\infty} \int_{-1}^{1} \frac{x^2}{1 - \cos x} dx.$$

Kako je $lim_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x} = 2$, podintegralna funkcija je ograničena na segmentu $[-1,1]$, pa je ovaj integral konačan, što potvrđuje dobru definiranost integrala. Iz gornjega odmah čitamo i da je T distribucija reda ≤ 1. Da bi pokazali da nije reda 0, podmetnemo niz funkcija φ_n takvih da je $\varphi \equiv 1$ na $[\frac{1}{n}, 1]$ i $\varphi_n \equiv 0$ na $[\frac{1}{2n}, 2]^c$. Tada je $\langle T, \varphi_n \rangle \geq \int_{\frac{1}{n}}^{1} \frac{dx}{1-\cos x}$. Kako se funkcija $\frac{1}{1-\cos x}$ oko 0 ponaša kao $\frac{1}{x^2}$, slijedi da gornji integrali divergiraju kada $n \to \infty$.

5. (a) Ako $f \in L^1(\mathbb{R})$ zadovoljava zadanu relaciju, primjenom Fourierove transformacije slijedi da $\hat{f}$ zadovoljava $(\hat{f})^2 = \hat{f}$, odnosno $\hat{f}(\hat{f} - 1) = 0$. Kako Fourierova transformacija L^1 funkcije šalje u prostor $C_0(\mathbb{R})$, postoje samo dvije mogućnosti:

   $$\hat{f} \equiv 0 \text{ ili } \hat{f} \equiv 1$$

   Konstanta funkcija $\hat{f} \equiv 1$ nije u $C_0(\mathbb{R})$, pa kao jedina mogućnost preostaje $\hat{f} \equiv 0$, odnosno $f \equiv 0$, za koju je očito da zadovoljava relaciju i da je u $L^1(\mathbb{R})$.

   (b) Neka je $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Računamo:

   $$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_0^{\frac{1}{n}} n\varphi(x)dx = \fint_{[0,\frac{1}{n}]} \varphi(x)dx \to \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$