Poglavlje 1

Prostor radijvektora i sustavi linearnih jednadžbi

1.1 Sustavi 2×2

Općeniti 2×2 sustav izgleda kao

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= c_1 \\ a_2 x + b_2 y &= c_2. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Analitičko-geometrijska interpretacija: rješenje sustava je skup svih točaka koje se nalaze u presjeku pravaca $a_1 x + b_1 y = c_1$ i $a_2 x + b_2 y = c_2$. Međusobni položaji dva pravca u ravnini su

(a) pravci se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava.

(b) pravci su paralelni (ne sijeku se) $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja.

(c) pravci se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustava ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 1.1. 1)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Rješenje: $x = y = 1$

2)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$$

Nema rješenja

3)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -2 \end{cases}$$

Ima beskonačno mnogo rješenja.

1.2 Sustavi 3×3

Nema se puno više za reći o sustavima 2×2 pa prelazimo na 3×3 sustave. To su sustavi oblika

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje su $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$.
Analitičko-geometrijska interpretacija: Svaku jednadžbu možemo shvatiti kao jednadžbu ravnine u prostoru. Za slike mogućih položaja tri ravnine u prostoru vidjeti npr. ovaj link.
Mogući slučajevi:

(a) ravnine se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava.

(b) ravnine se ne sijeku $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja.

(c) ravnine se sijeku u pravcu $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, regulirano jednim parametrom

(d) ravnine se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, regulirano s dva parametra

Propozicija 1.2. *Neka su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$. Tada sustavi linearnih jednadžbi (1.2) i*

$$\begin{aligned} \alpha(a_1x + b_1y + c_1z) + \beta(a_2x + b_2y + c_2z) &= \alpha d_1 + \beta d_2 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.3}$$

imaju isti skup rješenja. Isti rezultat vrijedi ako zamijenimo poredak jednadžbi u sustavu.

Prethodna propozicija nam daje strategiju rješavanja sustava linearnih jednadžbi.

1. Zamjenom redoslijeda jednadžbi sustava zapisat ćemo sustav (1.2) kao sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1x + \tilde{b}_1y + \tilde{c}_1z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{a}_2x + \tilde{b}_2y + \tilde{c}_2z &= \tilde{d}_2, \\ \tilde{a}_3x + \tilde{b}_3y + \tilde{c}_3z &= \tilde{d}_3 \end{aligned} \tag{1.4}$$

   pri čemu je $\tilde{a}_1 \neq 0$.

2. Uzastopnom primjenom propozicije konstruiramo sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1x + \tilde{b}_1y + \tilde{c}_1z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{\tilde{b}}_2y + \tilde{\tilde{c}}_2z &= \tilde{\tilde{d}}_2 \\ \tilde{\tilde{b}}_3y + \tilde{\tilde{c}}_3z &= \tilde{\tilde{d}}_3 \end{aligned} \tag{1.5}$$

   koji ima isti skup rješenja kao i polazni sustav (1.2).

3. Ponavljamo korake 1. i 2. s elementima $\tilde{\tilde{b}}_2$ i $\tilde{\tilde{b}}_3$ da bismo konačno dobili sustav

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 x + \tilde{b}_1 y + \quad \tilde{c}_1 z &= \tilde{d}_1 \\ \tilde{\tilde{b}}_2 y + \quad \tilde{\tilde{c}}_2 z &= \tilde{\tilde{d}}_2 \\ \tilde{\tilde{c}}_3 z &= \tilde{\tilde{d}}_3 \end{aligned} \tag{1.6}$$

koji ima isti skup rješenja kao i polazni sustav (1.2).

Za sustav linearnih jednadžbi (1.6) kažemo da ima **trokutastu formu** i njegovo rješenje je moguće direktno očitati uvrštavanjem treće jednadžbe u drugu i onda rješenje druge u prvu. Takav postupak se zove **povratna supstitucija**. Svođenje na trokutastu formu daje siguran put k rješenju i u slučajevima kada sustav nema jedinstveno rješenje. Naglasimo da je jednadžba rješena samo onda kada smo odredili cijeli skup rješenja!

Primjer 1.3.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Rješenje: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

Napomena 1.4. Rješenja sustava se mogu provjeriti na www.wolframalpha.com

Zadatak 1.1. a)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 &= 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24, \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 &= 40 \end{aligned}$$

(nema rješenja)

b)

$$\begin{aligned} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 &= 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 &= 3, \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje: $x_1 = t$, $x_2 = 4t - 9$, $x_3 = \frac{9}{2}t - \frac{21}{2}$, $t \in \mathbb{R}$.

c)

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Rješenje: $x_1 = -t + s$, $x_2 = t$, $x_3 = s$, $s, t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 1.2. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,

2. beskonačno mnogo rješenja,

3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

Rješenje Rješavamo sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \quad / \cdot (-4) + II \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ (h-8)y &= 5 - 4k \end{aligned}$$

Ako je $h = 8$, onda za $5 - 4k = 0$, tj. $k = \frac{5}{4}$, sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika $x + 2y = \frac{5}{4}$ odakle slijedi da je $x = \frac{5}{4} - 2t$, $y = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Za $h = 8$ i $5 - 4k \neq 0$ sustav nema rješenja
Za $h \neq 8$ sustav ima jedinstveno rješenje dano sa

$$y = \frac{5-4k}{h-8}, \quad x = k - 2\frac{5-4k}{h-8}.$$

Zadatak 1.3. Odredite $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} 2\beta x + \quad & \beta y + & \beta z &= 1 + \gamma \\ 2x + \quad & y + & \beta z &= 1 \\ 4x + \quad & (2-\beta)y + & (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,

2. beskonačno mnogo rješenja,

3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

Rješenje

$$\begin{aligned} 2\beta x + \quad & \beta y + & \beta z &= 1 + \gamma \\ 2x + \quad & y + & \beta z &= 1 \\ 4x + \quad & (2-\beta)y + & (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

Zamjena prve i druge jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2x + \quad & y + & \beta z &= 1 \\ 2\beta x + \quad & \beta y + & \beta z &= 1 + \gamma \\ 4x + \quad & (2-\beta)y + & (\beta^2 + 2\beta)z &= 2 + \gamma \end{aligned}$$

Množimo prvu jednadžbu s $-\beta$ i dodajemo drugoj. Zatim množimo prvu jednadžbu s -2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{aligned} 2x + \quad & y + & \beta z &= 1 \\ & & (\beta - \beta^2)z &= 1 + \gamma - \beta \\ & -\beta y + & \beta^2 z &= \gamma \end{aligned}$$

Zamjena druge i treće jednadžbe.

$$\begin{aligned} 2x+ \quad y+ \quad \beta z &= 1 \\ -\beta y+ \quad \beta^2 z &= \gamma \\ (\beta-\beta^2)z &= 1+\gamma-\beta \end{aligned}$$

Sveli smo sustav na gornjetrokutasti. Sada gledamo slučajeve.

1) $\beta \neq 0, 1$. Tada možemo zadnju jednadžbu podijeliti s $\beta - \beta^2$ pa je

$$z = \frac{1+\gamma-\beta}{\beta-\beta^2}$$

odakle povratnom supstitucijom slijedi i da je

$$y = \frac{1+\gamma-\beta}{1-\beta} - \frac{\gamma}{\beta}, \quad x = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1+\gamma-\beta}{1-\beta} + \frac{\gamma}{\beta} - \frac{1+\gamma-\beta}{1-\beta}\right).$$

2) a) $\beta = 0$. Tada zbog treće jednadžbe mora vrijediti $0 = 1 + \gamma$. Dakle, ako je $\gamma \neq -1$, nema rješenja. Ako je $\gamma = -1$, onda treća jednadžba glasi $0 = 0$. No, druga jednadžba je $0 = -1$ pa ni u ovom slučaju nema rješenja.

b) $\beta = 1$. Tada mora biti $0 = \gamma$ pa ako je $\gamma \neq 0$, nema rješenja. Ako je $\gamma = 0$, onda dobivamo sustav

$$\begin{aligned} 2x+ \quad y+ \quad z &= 1 \\ -y+ \quad z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

koji ima beskonačno mnogo rješenja

$$x = \frac{1}{2} - t, \quad y = t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dakle, za $\beta \notin \{0, 1\}$ sustav ima jedinstveno rješenje. Za $\beta = 0$ ili $\beta = 1$, $\gamma \neq 0$ sustav nema rješenja. Za $\beta = 1$, $\gamma = 0$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja. $\square$

1.3 Radijvektori u ravnini

Dana je ravnina E^2 koju shvaćamo kao skup točaka, u E^2 je dan pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u točki O. Svakoj točki $A \in E^2$ pridružujemo **radijvektor** $\overrightarrow{OA}$, tj. strelicu s početkom u O i završetkom u točki A.
Skup svih radijvektora u ravnini označavamo s $V^2(O)$. Radijvektor $\overrightarrow{OO}$ zovemo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$. **Modul** od $\overrightarrow{OA}$ označavamo s $\left|\overrightarrow{OA}\right|$ i definiramo kao duljinu dužine $\overline{OA}$. Radijvektor $\vec{0}$ je jedini vektor čiji modul je 0. **Smjer** od $\overrightarrow{OA}$ definira se kao pravac OA (smjer nulvektora se ne definira). Kažemo da su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ **kolinearni** ako O, A i B leže na istom pravcu. Nulvektor je kolinearan sa svakim radijvektorom.
Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni i različiti od nulvektora. Kažemo da su **jednako orijentirani** ako A i B leže s iste strane točke O na pravcu OAB. Inače kažemo da su **suprotno orijentirani**.

Svaki netrivijalni radijvektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom. Za radijvektor $\vec{a}$ definiramo **suprotan radijvektor** $-\vec{a}$ kao radijvektor koji ima jednak modul i smjer kao $\vec{a}$, ali suprotnu orijentaciju.
Zbrajanje radijvektora. Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ nekolinearni. Tada $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$ definiramo kao radijvektor $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena točka ravnine sa svojstvom da je četverokut $OACB$ paralelogram. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda ćemo $\vec{a}+\vec{b}$ definirati na sljedeći način:

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in V^2(O), \tag{1.7}$$

$$\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}, \quad \forall \vec{a} \neq \vec{0}. \tag{1.8}$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, netrivijalni i nisu jedan drugome suprotni, zbor $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor koji ima isti smjer kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednako orijentirani, $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo tako da ima modul $|\vec{a}|+|\vec{b}|$ i orijentaciju istu kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotne orijentacije te ako je $|\vec{a}|>|\vec{b}|$, onda $\vec{a}+\vec{b}$ definiramo kao radijvektor čiji modul iznosi $|\vec{a}|-|\vec{b}|$, kolinearan je s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, i ima istu orijentaciju kao $\vec{a}$. Ako je $|\vec{a}|<|\vec{b}|$, definicija je analogna, samo je orijentacija zbroja ista kao $\vec{b}$. Skicirati!
Svakoj točki $A \in E^2$ možemo pridružiti par koordinata u odabranom pravokutnom koordinatnom sustavu.

Propozicija 1.5. *$A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2) \Longrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$, gdje je $C=(x_1+x_2,y_1+y_2)$.*

Propozicija 1.6. *Zbrajanje radijvektora ima sljedeća svojstva:*

(a) $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^2(O)$ $\vec{a}+\vec{b} \in V^2(O)$.

(b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$, $\forall \vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

(c) $\exists \vec{0} \in V^2(O)$ *tako da je* $\vec{a}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V^2(O)$.

(d) $\forall \vec{a} \in V^2(O)$ $\exists -\vec{a} \in V^2(O)$ *takav da je* $\vec{a}+(-\vec{a})=-\vec{a}+\vec{a}=\vec{0}$.

(e) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, $\forall \vec{a},\vec{b} \in V^2(O)$.

Definiramo još jednu operaciju nad radijvektorima koju zovemo **množenje radijvektora skalarom**.
DEFINICIJA 1.7. Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{v} \in V^2(O)$. Radijvektor $\alpha\vec{v}$ definiramo kao radijvektor čiji je

- modul $|\alpha\vec{v}|=|\alpha|\cdot|\vec{v}|$,
- smjer isti kao i smjer od $\vec{v}$,
- $\vec{v}$ i $\alpha\vec{v}$ su iste (suprotne) orijentacije ako je $\alpha>0$ ($\alpha<0$).

Ako je $\alpha=0$ ili $\vec{v}=\vec{0}$, tada je $\alpha\vec{v}=\vec{0}$ pa u tom slučaju ne govorimo o smjeru i orijentaciji. Vrijedi da je

$$1\cdot\vec{v}=\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V^2(O), \tag{1.9}$$

$$(-1)\cdot\vec{v}=-\vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in V^2(O). \tag{1.10}$$

Propozicija 1.8. *$\alpha \in \mathbb{R}$, $T=(x,y) \Longrightarrow \alpha\cdot\overrightarrow{OT}=\overrightarrow{OT'}$, gdje je $T'=(\alpha x,\alpha y)$.*

Propozicija 1.9. *Neka je $\vec{a} \in V^2(O)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Za svaki $\vec{b} \in V^2(O)$ kolinearan s $\vec{a}$ postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b}=\lambda\vec{a}$.*

Vrijedi i obrat (direktno iz definicija): svaki vektor $\vec{b}$ oblika $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, za neki $\lambda \in \mathbb{R}$, je kolinearan s $\vec{a}$.

NAPOMENA 1.10. Vrijedi i sljedeće: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji netrivijalan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b} = \vec{0}$. Za ovo posljednje kažemo još da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ **linearno zavisni**.
Ili: vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako je jednakost $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ ispunjena samo na trivijalan način, tj. za $\alpha = \beta = 0$. Za ovo kažemo da su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ **linearno nezavisni**.
Ili: vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako ($\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} \implies \alpha = \beta = 0$).

Propozicija 1.11. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ nekolinearni vektori. Za svaki $\vec{c} \in V^2(O)$ postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.*

Drugim riječima: svaki vektor $\vec{c} \in V^2(O)$ moguće je na jedinstven način prikazati kao linearnu kombinaciju nekolinearnih vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kažemo da je $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ **baza** za $V^2(O)$.
Bilo koja dva nekolinearna vektora čine bazu za $V^2(O)$.

ZADATAK 1.4. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$. Pokažite da vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu kolinearni te prikažite $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

RJEŠENJE Zadatak ćemo riješiti na nekoliko načina:

1) računamo koeficijente smjera pravaca OA i OB:

$$k_{OA} = \frac{2-0}{1-0} = 2, \quad k_{OB} = \frac{4-0}{1-0} = 4.$$

Kako koeficijenti smjera nisu jednaki, slijedi da $\vec{a}$, $\vec{b}$ nisu kolinearni.

2) pokušajmo vektor $\vec{b}$ zapisati kao $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Prema propoziciji 1.8 slijedi da je $(1, 4) = (\lambda, 2\lambda)$. Dobivamo sustav jednadžbi

$$\begin{aligned} \lambda &= 1 \\ 2\lambda &= 4 \end{aligned}$$

koji nema rješenja. Dakle, ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

3) Vektori $\vec{a}, \vec{b}$ su kolinearni akko postoji netrivijalan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Slijedi da je $(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$. Dobivamo 2x2 sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= 0 \\ 2\alpha + 4\beta &= 0 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 0$. Dakle, $\vec{a}, \vec{b}$ su nekolinearni.

Izrazimo sada vektor $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju. Propozicija 1.11 nam garantira da postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Izjednačavanjem krajnjih točaka dobivamo

$$(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (-1, -3)$$

što daje sustav

$$\begin{aligned} \alpha + \beta &= -1 \\ 2\alpha + 4\beta &= -3 \end{aligned}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Dakle, $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$. □

Označimo s $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $I = (1,0)$, i $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $J = (0,1)$. Tada je očito za svaki $T = (x,y) \in E^2$

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j}. \tag{1.11}$$

Nekolinearne vektore $\vec{i}$, $\vec{j}$ nazivamo **standardnom ili kanonskom bazom** za $V^2(O)$.

DZ 1.1. $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, pri čemu je $A = (1,2)$, $B = (1,4)$, $C = (-1,-3)$, $D = (0,1)$. Pokažite radijvektor $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$.

DZ 1.2. Isti vektori kao u prethodnom zadatku, samo se ovdje traži da se prikaže vektor $\vec{d}$ kao $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$, pri čemu $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

Zadatak 1.5. Neka su $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni (linearno nezavisni) vektori u $V^2(O)$. Odredite za koje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektori

$$\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \beta\vec{a} + \alpha\vec{b}$$

također nekolinearni (linearno nezavisni).

Rješenje Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A(\vec{a} + \beta\vec{b}) + B(\beta\vec{a} + \alpha\vec{b}) = \vec{0}.$$

Želimo da je jednakost zadovoljena samo za $A = B = 0$. Prethodni izraz možemo zapisati u obliku

$$(A + \beta B)\vec{a} + (\beta A + \alpha B)\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni vektori po pretpostavci, tada mora biti

$$\begin{aligned} A + \beta B &= 0 \\ \beta A + \alpha B &= 0 \end{aligned}$$

Ovo shvatimo kao sustav linearnih jednadžbi s nepoznanicama A, B. To je **homogeni sustav** jer su slobodni članovi na desnoj strani jednaki nuli. Homogeni sustav uvijek ima rješenje, i to trivijalno rješenje ($A = B = 0$). No, mi želimo da mu je to i jedino rješenje. Kada prethodni sustav ima jedinstveno rješenje?

Pomnožimo li prvu jednadžbu s $-\beta$ i dodamo drugoj, dobivamo

$$\begin{aligned} A + \beta B &= 0 \\ (\alpha - \beta^2)B &= 0 \end{aligned}$$

Vrijedi da je $B = 0$ jedino rješenje ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 \neq 0$. Ako je $B = 0$, onda uvrštavanjem u prvu jednadžbu dobivamo da je i $A = 0$, tj. traženu jedinstvenost rješenja.

Dakle, navedeni vektori su linearno nezavisni ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 \neq 0$.

1.4 Radijvektori u prostoru

Definicije su analogne onima za radijvektore u ravnini pa izostavljamo detalje.

E^3 je trodimenzionalni prostor sa točkovnom strukturom. U njemu zadajemo pravokutni koordinatni sustav s ishodištem u O i skup svih radijvektora u prostoru označavamo s $V^3(O)$. I ovdje imamo identifikaciju radijvektora s njihovim završnim točkama, odnosno uređenim trojkama njihovih pravokutnih koordinata.

$$\overrightarrow{OT} \longleftrightarrow T \longleftrightarrow (x,y,z).$$

Sljedeće su definicije iste kao i za $V^2(O)$:

- modul
- smjer
- orijentacija
- suprotni vektor
- zbrajanje vektora
- množenje vektora skalarom

Prve tri točke jedinstveno određuju vektor iz $V^3(O)$.
I ovdje imamo algebarske relacije za operacije zbrajanja i množenja skalarom

$$(x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2), \tag{1.12}$$
$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z). \tag{1.13}$$

Nadalje, zbrajanje vektora i množenje vektora skalarom imaju ista svojstva kao i u $V^2(O)$.
Ovdje imamo jedan novi pojam koji nismo imali u $V^2(O)$.

DEFINICIJA 1.12. Neka je $\{\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n\}$, $n \geq 2$, konačan skup radijvektora u $V^3(O)$, $\vec{v}_i = \overrightarrow{OT_i}$, $i = 1, \ldots, n$. Kažemo da su vektori $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ **komplanarni** ako postoji ravnina kroz ishodište koja sadrži sve završne točke T_i, $i = 1, \ldots, n$. U protivnom kažemo da su ti vektori **nekomplanarni**.

Dva su vektora uvijek komplanarna. (Ako su nekolinearni, onda postoji *jedinstvena* ravnina kroz točke O, T_1, T_2).
Tri vektora mogu i ne moraju biti komplanarni. Na primjer, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ nisu komplanarni, dok $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{i}+\vec{j}\}$ jesu. Skica.

Propozicija 1.13. *Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ proizvoljni nekolinearni vektori. Za svaki vektor $\vec{v} \in V^3(O)$* komplanaran *s $\vec{a}, \vec{b}$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Propozicija 1.14. *Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ proizvoljni nekomplanarni vektori. Za svaki radijvektor $\vec{v} \in V^3(O)$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi*

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

NAPOMENA 1.15. U $V^3(O)$ tri nekomplanarna vektora čine bazu (u smislu da se svaki radijvektor može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija tih vektora).

NAPOMENA 1.16. Tri vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su nekomplanarni (dakle, čine bazu) ako i samo ako vrijedi

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

ZADATAK 1.6. Provjerite čine li vektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, gdje je

a) $A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 1, 1)$,

b) $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (0, 1, 1)$,

c) $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$

bazu za $V^3(O)$.

RJEŠENJE Svugdje krećemo od jednakosti

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}.$$

a) Po svojstvima zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom za završne točke dobivamo da vrijedi

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (0, 0, 0).$$

Uređene trojke su jednake ako i samo ako je

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ -\alpha & + & 3\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Rješavamo sustav elementarnim transformacijama. Dodajemo najprije prvu jednadžbu trećoj.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ & & 4\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Zatim množimo drugu jednadžbu s -2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ & & & - & \gamma & = 0 \end{array}$$

Povratnom supstitucijom dobivamo jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Dakle, dani vektori čine bazu.

b)

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (0, 0, 0),$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Ovdje imamo dvije jednake jednadžbe pa se sustav reducira na sustav od 2 jednadžbe s 3 nepoznanice koji ne može imati jedinstveno rješenje.

$$\begin{array}{rcrcrl} \alpha & + & \beta & & & = 0 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = 0 \end{array}$$

Rješenje ovog sustava je $\alpha = t$, $\beta = -t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$.

Na primjer za $t = 1$ dobivamo $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$ pa je $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, tj. $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ pa vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$ (komplanarni su).

c)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$$

što povlači da je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ pa navedeni vektori čine bazu. To su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ koji su jedinični radijvektori u smjeru pozitivnog dijela koordinatnih osi. Tu bazu zovemo **standardna ili kanonska baza** za $V^3(O)$.

Uočite: ako je $T = (x, y, z)$, onda je

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \tag{1.14}$$

ZADATAK 1.7. Prikažite vektor $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $D = (1, -1, -4)$ kao linearnu kombinaciju vektora iz prethodnog zadatka.

RJEŠENJE

a) $\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ vodi na jednakost završnih točaka

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (1, -1, -4)$$

što je ekvivalentno sustavu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ -\alpha & + & 3\beta + & & \gamma & = & -4 \end{array}$$

Zbrojimo prvu i treću jednadžbu

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ & & 4\beta + & & \gamma & = & -3 \end{array}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s -2 i dodamo trećoj

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ & & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ & & & & -\gamma & = & -1 \end{array}$$

Povratnom supstitucijom dobivamo jedinstveno rješenje $\gamma = 1$, $\beta = -1$, $\alpha = 2$. Dakle,

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

b)

$$(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (1, -1, -4),$$

tj.

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -4 \end{array}$$

Izjednačavanjem dvije zadnje jednadžbe dobivamo $-1 = -4$ što je kontradikcija. Dakle, sustav nema rješenja.

Vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$, nego razapinju jednu ravninu kroz ishodište. Vektor $\vec{d}$ nije komplanaran s tom ravninom.

Ako uzmemo $\vec{d} = (1, -1, -1)$, tada bismo $\vec{d}$ mogli prikazati kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ali ne na jedinstven način

$$\begin{array}{rcrcrcr} \alpha & + & \beta & & & = & 1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \\ \alpha & + & 2\beta + & & \gamma & = & -1 \end{array}$$

Rješenja ovog sustava su $\alpha = t$, $\beta = 1 - t$, $\gamma = -3 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Jedno rješenje je, na primjer, $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $\gamma = -3$.

c)

$$(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -4)$$

što ima jedinstveno rješenje $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$.

ZADATAK 1.8. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni vektori u $V^3(O)$. Odredite za koje $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vektori

$$\vec{a} + \alpha\vec{b}, \vec{b} + \beta\vec{c}, \vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}$$

također nekomplanarni.

RJEŠENJE Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A\left(\vec{a} + \alpha\vec{b}\right) + B\left(\vec{b} + \beta\vec{c}\right) + C\left(\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}\right) = \vec{0}.$$

Želimo dobiti $A = B = C = 0$. Napišimo prethodni izraz u obliku

$$(A + C)\vec{a} + (A\alpha + B + C\beta)\vec{b} + (B\beta + \alpha C)\vec{c} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, vrijedi

$$\begin{array}{ccccc} A & + & & C & = 0 \\ \alpha A & + & B+ & \beta C & = 0 \\ & & \beta B+ & \alpha C & = 0 \end{array}$$

Prethodne jednadžbe shvatimo kao sustav za A, B, C. Želimo da taj sustav ima jedinstveno rješenje dano s $A = B = C = 0$. Rješavamo sustav. Pomnožimo prvu jednadžbu s $-\alpha$ i dodajmo drugoj.

$$\begin{array}{cccc} A & + & C & = 0 \\ & B+ & (\beta - \alpha)C & = 0 \\ & \beta B+ & \alpha C & = 0 \end{array}$$

Sada pomnožimo drugu jednadžbu s $-\beta$ i dodajmo trećoj.

$$\begin{array}{cccc} A & + & C & = 0 \\ & B+ & (\beta - \alpha)C & = 0 \\ & & \left(\alpha - \beta^2 + \alpha\beta\right)C & = 0 \end{array}$$

Vidimo da je $A = B = C = 0$ jedino rješenje ako i samo ako je $\alpha - \beta^2 + \alpha\beta \neq 0$.

ZADATAK 1.9. (a) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ su vektori $\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ i $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ komplanarni?

(b) Postoji li vektor $\vec{d} \in V^3(O)$ (koji ne ovisi o λ) takav da su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ nekomplanarni za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$?

RJEŠENJE

(a) Želimo da $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ ima netrivijalna rješenja. Uvrstimo vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

$$\alpha\left(\vec{i} + \lambda\vec{k}\right) + \beta\left(2\vec{i} + \lambda\vec{j}\right) + \gamma\left(-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}\right) = \vec{0},$$

$$(\alpha + 2\beta - \gamma)\vec{i} + (\lambda\beta - 2\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + \gamma)\vec{k} = \vec{0}.$$

Kako su vektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ linearno nezavisni (nekomplanarni), slijedi da je

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta - & & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & & 2\gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & & & + & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Množimo prvu jednadžbu s $-\lambda$ i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & -2\lambda\beta + & (\lambda+1)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Množimo drugu jednadžbu s 2 i dodajemo trećoj.

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & (\lambda-3)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Gledamo slučajeve

1) $\boxed{\lambda = 3}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & 3\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \end{array}$$

koji ima rješenje $\alpha = -\frac{1}{3}t$, $\beta = \frac{2}{3}t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$.
Za $\lambda = 3$ vektori su komplanarni.

2) $\boxed{\lambda \neq 3}$ U ovom slučaju treću jednadžbu možemo podijeliti s $\lambda - 3$ i dobivamo

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta - & \gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta - & 2\gamma & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Ako pomnožimo treću jednadžbu s 2 i dodamo drugoj te dodamo treću jednadžbu prvoj, dobivamo

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta & & = & 0 \\ & & \lambda\beta & & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

Sada opet imamo dva slučaja

2a) $\boxed{\lambda = 0}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta & & = & 0 \\ & & & 0 & = & 0 \\ & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

čije rješenje je $\alpha = -2t$, $\beta = t$, $\gamma = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, i za $\lambda = 0$ vektori su komplanarni.

2b) $\boxed{\lambda \neq 0}$ Imamo sustav

$$\begin{array}{rcrcrcl} \alpha & + & 2\beta & & & = & 0 \\ & & \beta & & & = & 0 \\ & & & & \gamma & = & 0 \end{array}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Konačno, za $\lambda \neq 0, 3$ vektori su nekomplanarni, a za $\lambda = 0$ i $\lambda = 3$ su komplanarni.

(b) Pitamo se postoje li $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da za $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ vektorska jednadžba $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{d} = \vec{0}$ ima samo trivijalno rješenje za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem vektora dobivamo

$$\alpha\left(\vec{i} + \lambda\vec{k}\right) + \beta\left(2\vec{i} + \lambda\vec{j}\right) + \gamma\left(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\right) = \vec{0},$$
$$(\alpha + 2\beta + x\gamma)\vec{i} + (\lambda\beta + y\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + z\gamma)\vec{k} = \vec{0}.$$

Slijedi da je

$$\begin{array}{rcrrcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & y\gamma & = & 0 \\ \lambda\alpha & & + & z\gamma & = & 0 \end{array}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $-\lambda$ i dodajmo je trećoj.

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & y\gamma & = & 0 \\ & & -2\lambda\beta + & (z - x\lambda)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i dodajmo trećoj

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & \lambda\beta + & y\gamma & = & 0 \\ & & & (z - x\lambda + 2y)\gamma & = & 0 \end{array}$$

Što ako je $\lambda = 0$? Tada imamo sustav

$$\begin{array}{rcrlcl} \alpha & + & 2\beta + & x\gamma & = & 0 \\ & & & y\gamma & = & 0 \\ & & & (z + 2y)\gamma & = & 0 \end{array}$$

odakle ne možemo dobiti jedinstveno rješenje.

Zašto je $\lambda = 0$ problematično? Jer za $\lambda = 0$ imamo vektore $\vec{a} = \vec{i}$, $\vec{b} = 2\vec{i}$ koji su kolinearni pa će svaki treći vektor $\vec{d}$ ležati u istoj ravnini s njima. (Ako odmah primijetite kolinearnost vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ za $\lambda = 0$, prethodni raspis nije potreban).

1.5 Radijvektorska interpretacija sustava

1.5.1 Sustavi 2x2

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned} \tag{1.15}$$

Uvođenjem vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $B = (b_1, b_2)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $C = (c_1, c_2)$, prethodni sustav možemo zapisati kao

$$(c_1, c_2) = (a_1x + b_1y, a_2x + b_2y) \tag{1.16}$$

što se može zapisati i preko vektora kao

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \tag{1.17}$$

i obratno, jednadžbu (1.17) raspisivanjem svodimo na sustav (1.15). Analitičko–geometrijska interpretacija tretirala je sustav "po retcima", dok na ovaj način sustav tretiramo "po stupcima".
Vrijedi sljedeće:

1. Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}$ nekolinearni, onda sustav (1.15) ima jedinstveno rješenje.
2. Ako su $\vec{a}, \vec{b}$ kolinearni i
   (i) $\vec{c}$ kolinearan s njima, onda sustav (1.15) ima beskonačno mnogo rješenja.
   (ii) $\vec{c}$ nije s njima kolinearan, onda sustav (1.15) nema rješenja.

Primjer 1.17. (a)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 4 \end{cases}$$

(c)

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

(a) Sustav ima jedinstveno rješenje $x = y = 1$ jer su vektori $\vec{a} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} - \vec{\jmath}$ očito nekolinearni.

(b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja oblika $x = t$, $y = 2 - t$, $t \in \mathbb{R}$. Vektori $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\vec{b} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$ su očito kolinearni, a za vektor $\vec{c}$ vrijedi $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$.

(c) Sustav nema rješenje jer je $\vec{a} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = \vec{b}$, dok $\vec{c} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} = 2(\vec{\imath} + \vec{\jmath})$ nije s njima kolinearan.

Definicija 1.18. Definirajmo **determinantu sustava** (1.15) kao

$$\det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix} = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1.$$

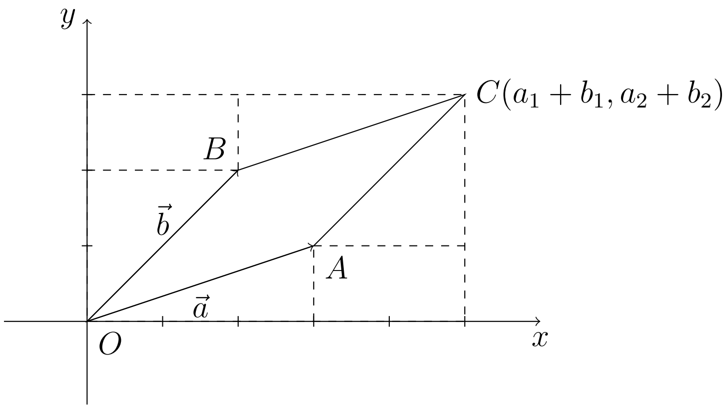
Rješavanjem sustava (1.15) možemo pokazati da sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0$. Tada je rješenje dano u obliku

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}.$$

Time smo dobili i kriterij kada su vektori $\vec{a}$, $\vec{b}$ nekolinearni. Dakle, vektori $\vec{a} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$, $\vec{b} = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}$ su nekolinearni ako i samo ako je

$$\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Prethodnu tvrdnju možemo potkrijepiti i geometrijski. Naime, vrijedi da je $\left|\det\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$ površina paralelograma razapetog s $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



Slika 1.1: Površina paralelograma razapetog s radijvektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$

Formulu za površinu paralelograma ćemo izvesti tako da paralelogram smjestimo u pravokutnik minimalne površine kojemu su stranice paralelne s osima, i od površine tog pravokutnika oduzmemo površine odgovarajućih pravokutnih trokuta i pravokutnika. Konkretno:

$$\begin{aligned} P_{OACB} &= (a_1 + b_1)(a_2 + b_2) - \frac{1}{2}a_1a_2 - b_1a_2 - \frac{1}{2}b_1a_2 - \frac{1}{2}a_1a_2 - b_1a_2 - \frac{1}{2}b_1b_2 \\ &= a_1b_2 - a_2b_1 = \det(\vec{a}, \vec{b}). \end{aligned}$$

Primijetimo da je predznak pozitivan ako točke A i B odaberemo tako da vrhove O, A, B obilazimo u smjeru suprotnom od kazaljke na satu (u pozitivnom smjeru). Ako je poredak vrhova takav da ih obilazimo u smjeru kazaljke na satu, onda bi $\det(\vec{a}, \vec{b})$ bila negativna.

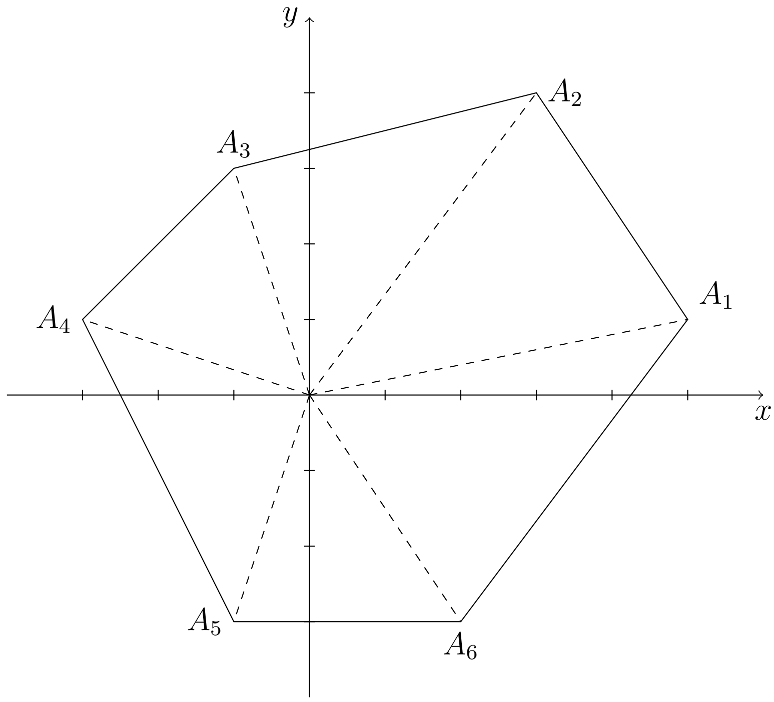
Želimo li odrediti površinu trokuta, možemo se poslužiti formulom za površinu paralelograma. Uzmimo da je trokut određen vrhovima O, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$. Tada je površina tog trokuta pola površine paralelograma određenog radijvektorima $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{OC}$. Slijedi da je

$$P_{OBC} = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\left|x_2y_3 - x_3y_2\right|. \tag{1.18}$$

Ako trokutu nijedan vrh nije u ishodištu, onda ga možemo translatirati tako da mu se npr. vrh A nalazi u ishodištu pa dobivamo da površina trokuta određenog vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ iznosi:

$$\begin{aligned} P_{ABC} &= \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix}\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|. \end{aligned}$$

Pomoću formule (1.18) možemo izvesti formulu za površinu bilo kojeg konveksnog mnogokuta u ravnini. Pretpostavimo da imamo konveksan mnogokut kojemu se ishodište nalazi u unutrašnjosti (kao na slici 1.2).



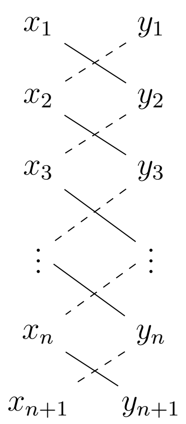
Slika 1.2: Podjela mnogokuta na trokute

Površina mnogokuta je apsolutna vrijednost sume površina trokuta OA_iA_{i+1}, $i = 1, \ldots, n$ (ako su točke A_i odabrane tako da je obilazak mnogokuta u pozitivnom smjeru, onda je ta suma pozitivna). Radi jednostavnosti oznaka, stavit ćemo da je $A_{n+1} := A_1$. Koristeći formulu (1.18) dobivamo da je

$$P = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} \det \begin{pmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \left| \sum_{i=1}^{n} (x_i y_{i+1} - x_{i+1} y_i) \right|. \tag{1.19}$$

Pritom nam opet poredak vrhova mnogokuta govori koji će biti predznak izraza pod apsolutnom vrijednosti. Ako je obilazak vrhova u pozitivnom smjeru, izraz je pozitivan, a ako je u negativnom smjeru, izraz će biti negativan.

Formula (1.19) u literaturi se može pronaći pod nazivom *shoelace formula* jer se može vizualno predočiti tako da koordinate vrhova A_i stavimo svaku u svoj redak



i onda faktore $x_i y_{i+1}$ (koji su predočeni punom linijom) uzimamo s predznakom $+$, a faktore $y_i x_{i+1}$ (isprekidana linija) uzimamo s predznakom $-$, pa ih sve zbrojimo.
Komentirajmo na kraju i pretpostavku da je ishodište unutar mnogokuta. Ona nam zapravo nije potrebna. Jasno je da je svejedno gdje se točno nalazi ishodište ako se nalazi unutar mnogokuta, ali ishodište može biti i izvan mnogokuta i formula (1.19) i dalje vrijedi.
Formula (1.19) vrijedi i za mnogokute koji nisu konveksni. Ostavljamo vam da sami o tome razmislite.

Zadatak 1.10. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav

$$\begin{aligned} x + 2y &= k \\ 4x + hy &= 5 \end{aligned}$$

ima

1. jedinstveno rješenje,
2. beskonačno mnogo rješenja,
3. nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

Rješenje

(a) Sustav ima jedinstveno rješenje ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} \neq 0$ ako i samo ako je $h - 8 \neq 0$. Tada je (kao i prije) rješenje dano s

$$x = \frac{kh - 10}{h - 8}, \quad y = \frac{5 - 4k}{h - 8}.$$

(b) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = h - 8 = 0$ i $\vec{c}$ je kolinearan s $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kolinearnost možemo opet provjeriti preko determinante. Zadnji uvjet je ekvivalentan tome da je

$$0 = \det(\vec{a}, \vec{c}) = \begin{vmatrix} 1 & k \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 4k.$$

Dakle, sustav ima beskonačno mnogo rješenja ako i samo ako je $h = 8$ i $k = \frac{5}{4}$.

To smo mogli vidjeti i rješavajući sustav.

(c) Sustav nema rješenja ako i samo ako je $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & h \end{vmatrix} = 0$ i $\begin{vmatrix} 1 & k \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \neq 0$ ako i samo ako je $h = 8$, $k \neq \frac{5}{4}$.

Naravno, zadnji uvjet smo mogli dobiti i iz prva dva slučaja kao preostale vrijednosti za h i k.

1.5.2 Sustavi 3x3

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z &= d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z &= d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z &= d_3 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Uvođenjem vektora $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $A = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $B = (b_1, b_2, b_3)$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $C = (c_1, c_2, c_3)$, $\vec{v} = \overrightarrow{OD}$, $D = (d_1, d_2, d_3)$, kao i prije dobivamo

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}. \tag{1.21}$$

Svako rješenje (x, y, z) sustava (1.20) ujedno je i rješenje vektorske jednadžbe (1.21), i obratno. Analizirajmo sustav (1.20) razmatrajući geometrijski položaj vektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{v}$:

(A) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, onda rješenje sustava postoji i jedinstveno je.

(B) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni i nekolinearni, imamo sljedeće slučajeve

- (B1) Ako $\vec{v}$ nije komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava ne postoji.
- (B2) Ako je $\vec{v}$ komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje postoji i skup rješenja je beskonačan te ovisi o jednom slobodnom parametru.

(C) Ako su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ kolinearni, onda imamo sljedeće slučajeve

- (C1) Ako $\vec{v}$ nije kolinearan s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava ne postoji.
- (C2) Ako je $\vec{v}$ kolinearan s $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, onda rješenje sustava postoji. Skup rješenja je beskonačan i ovisi o dva slobodna parametra.

Zadatak 1.11. Riješite sljedeće sustave i kod svakog vektorskom interpretacijom ustanovite razloge (ne)postojanja rješenja. Ako rješenje postoji, opravdajte strukturu skupa rješenja geometrijskim (vektorskim) argumentima.

(a)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2+ & 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & + & 5x_2+ & 6x_3 & = & 24 \\ 3x_1 & + & x_2- & 2x_3 & = & 4 \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & 4x_2+ & 6x_3 & = & 18 \\ 4x_1 & + & 5x_2+ & 6x_3 & = & 24 \\ 2x_1 & + & 7x_2+ & 12x_3 & = & 40 \end{array}$$

(c)

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & + & 6x_2- & 6x_3 & = & 9 \\ 2x_1 & - & 5x_2+ & 4x_3 & = & 6 \\ -x_1 & + & 16x_2- & 14x_3 & = & -3 \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2- & x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & - & x_2+ & 5x_3 & = & 0 \\ 6x_1 & + & x_2+ & 3x_3 & = & 0 \end{array}$$

Rješenje

(a) Uvedimo vektore $\vec{a} = (2,4,3)$, $\vec{b} = (4,5,1)$, $\vec{c} = (6,6,-2)$, $\vec{v} = (18,24,4)$. Riješimo sustav metodom suprotnih koeficijenata. Dobivamo jedinstveno rješenje $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$. Razlog tome je što su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni što se može utvrditi direktnom provjerom. Jednadžba

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

daje isti sustav, samo homogen

$$\begin{aligned} 2\alpha &+ 4\beta + 6\gamma = 0 \\ 4\alpha &+ 5\beta + 6\gamma = 0 \\ 3\alpha &+ \beta - 2\gamma = 0 \end{aligned}$$

Rješavajući ga na isti način, dobivamo $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

(b) Sustav nema rješenja.

Vektorska interpretacija: $\vec{a} = (2,4,2)$, $\vec{b} = (4,5,7)$, $\vec{c} = (6,6,12)$ su komplanarni, ali $\vec{v}$ nije s njima komplanaran. Na primjer, $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ daje sustav

$$\begin{aligned} 2\alpha + 4\beta &= 6 \\ 4\alpha + 5\beta &= 6 \\ 2\alpha + 7\beta &= 12 \end{aligned}$$

koji ima rješenje $\alpha = -1$, $\beta = 2$. Dakle, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ su komplanarni. Da $\vec{v}$ nije s njima komplanaran, dobijemo upravo rješavajući početni sustav.

(c) Sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Na primjer, $x_1 = 3 + \frac{2}{9}t$, $x_2 = \frac{8}{9}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Mogli smo i drugačije izabrati slobodni parametar. Na primjer, $x_1 = 3 - \frac{1}{4}t$, $x_2 = t$, $x_3 = \frac{9}{8}t$, $t \in \mathbb{R}$.

Vektorska interpretacija: vektori $\vec{a} = (3,2,-1)$, $\vec{b} = (6,-5,16)$, $\vec{c} = (-6,4,-14)$ su komplanarni jer je

$$2\vec{a} + 8\vec{b} + 9\vec{c} = \vec{0}.$$

Nadalje, $\vec{v} = 3\vec{a}$ pa je $\vec{v}$ komplanaran s $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. I odavde možemo doći do skupa rješenja. Na primjer,

$$\vec{v} = 3\vec{a} = 3\vec{a} + z\vec{c} - z\vec{c} = 3\vec{a} - z\left(-\frac{2}{9}\vec{a} - \frac{8}{9}\vec{b}\right) + z\vec{c} = \vec{a}\underbrace{\left(3 + \frac{2}{9}z\right)}_{x_1} + \vec{b}\underbrace{\left(\frac{8}{9}z\right)}_{x_2} + \underbrace{z}_{x_3}\vec{c}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

(d) Uočimo da se radi o homogenom sustavu pa on sigurno ima rješenje. Rješavanjem sustava dobivamo $x_1 = -\frac{4}{5}t$, $x_2 = \frac{9}{5}t$, $x_3 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Interpretacija je ista kao i u prethodnom zadatku.

Za vektore $\vec{a} = (1,4,6)$, $\vec{b} = (1,-1,1)$, $\vec{c} = (-1,5,3)$ vrijedi

$$4\vec{a} - 9\vec{b} = 5\vec{c}$$

pa su oni komplanarni i nikoja dva nisu kolinearna. Očito je

$$\vec{v} = \vec{0} = 4\vec{a} - 9\vec{b} - 5\vec{c}.$$

DZ 1.3. Odredite za koje su $t \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ nekomplanarni. (Rješenje: $t \neq 1$)

DZ 1.4. Odredite za koje su $p \in \mathbb{R}$ vektori $\vec{a} = (p-1)\vec{i} + 2\vec{j}$, $\vec{b} = (p+4)\vec{i} + (p-2)\vec{j}$ kolinearni. (Rješenje: $p = -1, 6$)

DZ 1.5. Jesu li vektori $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ komplanarni? (Rješenje: Ne)