1. REDOVI

Red je uređeni par $((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (s_n)_{n\in\mathbb{N}})$ gdje je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz u $\mathbb{R}$, a $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz parcijalnih suma niza $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, odnosno za svaki n vrijedi $s_n = a_1 + \cdots + a_n$. Za red koristimo oznaku $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Ako niz parcijalnih suma ima limes S, kažemo da red $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira i pišemo $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. U suprotnom kažemo da red divergira.

Nužan uvjet konvergencije: Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergentan red. Tada je $\lim\limits_{n} a_n = 0$.

Apsolutno konvergentan red je konvergentan: Neka je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ red takav da je $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentan red. Tada i $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Usporedni test: Neka su $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ redovi s nenegativnim članovima.

1) Neka je $a_n \leq b_n$:

ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira tada i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

ako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira tada i $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira.

2) Neka postoji $\lim_n \frac{a_n}{b_n}$ i jednak je q:

ako je $q \in \langle 0, \infty \rangle$ tada oba reda konvergiraju ili oba divergiraju,

ako je $q = 0$ tada ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,

ako je $q = \infty$ tada ako $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ divergira onda i $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

D'Alembert: Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red takav da postoji $\lim_n \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ i jednak je q.

Ako je:

$q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira apsolutno,

$q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira,

$q = 1$ nemamo odluku.

Cauchy: Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red takav da postoji $\lim_n |a_n|^{\frac{1}{n}}$ i jednak je q.

Ako je:

$q < 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira apsolutno,

$q > 1$ red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira,

$q = 1$ nemamo odluku.

Leibniz: Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red takav da a_n alterniraju po predznaku, $|a_{n+1}| \leq |a_n|$ te $\lim_n a_n = 0$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

Integralni test: Neka je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ red s pozitivnim članovima. Neka je f pozitivna, neprekidna i padajuća funkcija na $[a, \infty\rangle, a > 0$ takva da je $a_n = f(n),\ n \in \mathbb{N}$. Tada red $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako nepravi integral $\int_a^{\infty} f(x)dx$ konvergira.

Vrijedi:
$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n} = \mathrm{e}^{-1},$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}.$$

2.1. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4 + n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^3}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+5}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + n + 2}$.

2.2. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2+n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{10}}{3^n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(4n-1)(n+15)}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5}{e^{n^2}}$.

2.3. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!3^n}$,

(b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^n}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^3 - n + 5}$,

(f) $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

2.4. Ispitajte konvergenciju sljedećih redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^{\frac{3}{2}}}$,

(b) $\varepsilon > 0$, $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$,

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^3}$,

(d) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-2}}{\ln n}$,

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\cos n\pi}{n!}$,

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$,

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2+2}{n^3+n-1}$.

Rješenja

2.1. (a) da, (b) da, (c) da, (d) da, (e) da, (f) ne, (g) ne.

2.2. (a) da, (b) da, (c) da, (d) da, (e) ne, (f) ne, (g) da.

2.3. (a) da, (b) ne, (c) da, (d) da, (e) da, (f) da, (g) da.

2.4. (a) da, (b) da, (c) da, (d) da, (e) da, (f) da, (g) da.