

11. KRIVULJNI INTEGRAL I GREENOVA FORMULA

11.1. Izračunajte integral funkcije f duž puta C ako je:

(a) $f(x, y, z) = x + y + z$ i $C(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $f(x, y, z) = e^{\sqrt{z}}$ i $C(t) = (1, 2, t^2)$, $t \in [0, 1]$.

11.2. Izračunajte integral vektorskog polja F duž puta C ako je:

(a) $F(x, y, z) = (x, y, z)$ i $C(t) = (\sin t, \cos t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$,

(b) $F(x, y, z) = (\cos z, e^x, e^y)$ i $C(t) = (1, t, e^t)$, $t \in [0, 2]$.

11.3. Integriraj $F(x, y, z) = (x, y, xz - y)$ duž dužine od točke $(0, 0, 0)$ do točke $(1, 2, 4)$.

11.4. Integriraj $F(x, y) = (y^2, -x)$ duž parabole $x = \frac{y^2}{4}$ od točke $(0, 0)$ do točke $(1, 2)$.

11.5. Izračunajte $\int_C \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2}$, za $C(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

11.6. Integriraj $F(x, y) = (y, 0)$ duž bridova trokuta s vrhovima $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(0, 1)$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.

- 11.7. Odredite potencijalnu funkciju za sljedeća vektorska polja:
- (a) $F(x, y, z) = (4xy, 2x^2),$
 - (b) $F(x, y, z) = (yz, xz + z^3, xy + 3yz^2),$
 - (c) $F(x, y, z) = (e^{y+2z}, xe^{y+2z}, 2xe^{y+2z}).$
- 11.8. Za $F(x, y) = (x, y)$ provjerite zatvorenost i integrirajte duž dužine od točke $(0, 0)$ do točke $(2, 0)$.
- 11.9. Za $F(x, y) = (\cos x - y \sin x, \cos x)$ provjerite zatvorenost i integrirajte duž dužine od točke $(0, 0)$ do točke $(0, 1)$.
- 11.10. Izračunajte $\int_C x^2 y dx + 2y^2 dy$ duž bridova kvadrata s vrhovima $(0, 0), (1, 0), (1, 1),$ i $(0, 1)$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
- 11.11. Izračunajte $\int_C y^2 dx + x^2 dy$ duž grafova funkcija $y = x^2$ i $y = x$ za $x \in [0, 1]$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
- 11.12. Izračunajte $\int_C 5x dx + 3y dy$ duž kružnice $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
- 11.13. Izračunajte $\int_C x^2 dy$ duž bridova kvadrata s vrhovima $(0, 0), (1, 0), (1, 1),$ i $(0, 1)$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.
- 11.14. Izračunajte $\int_C (xy + 3y^2) dx + (5xy + 2x^2) dy$ duž ruba područja $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2\}$ u smjeru suprotnom od kazaljki na satu.

Rješenja:

11.1. (a) $2\sqrt{2}\pi^2$,
(b) 2.

11.2. (a) $2\pi^2$,
(b) $2e + \frac{1}{2}(e^4 - 1)$.

11.3. $\frac{23}{6}$.

11.4. $\frac{4}{3}$.

11.5. 2π .

11.6. $-\frac{1}{2}$.

11.7. (a) $f(x, y) = 2x^2y$,
(b) $f(x, y, z) = xyz + z^3y$,
(c) $f(x, y, z) = xe^{y+2z}$.

11.8. 2.

11.9. 1.

$$11.10. \quad -\frac{1}{3}.$$

$$11.11. \quad \frac{1}{30}.$$

$$11.12. \quad 0.$$

$$11.13. \quad 1.$$

$$11.14. \quad \frac{43}{20}.$$