Poglavlje 6

Inverz

ČINJENICE 6.1. 1. **Elementarne matrice** n–tog reda su

$$H_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & 0 & \dots & 1 & & \\ & & & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ & & & & 1 & \dots & 0 & & \\ & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad i,j = 1,\dots,n,\ i \neq j$$

$$G_{i,\lambda} = \mathrm{diag}(1,\dots,1, \underbrace{\lambda}_{i\text{–to mjesto}}, 1,\dots,1)$$

$$F_{ij,\lambda} = I + \lambda E_{ij}.$$

Množenjem matrice A s elementarnim matricama s lijeve odnosno desne strane realiziraju se elementarne transformacije redaka odnosno stupaca matrice A. Preciznije

(i) zamjena i–tog i j–tog retka (stupca): $H_{ij}A$ (AH_{ij}),

(ii) množenje i–tog retka (stupca) skalarom $\lambda \neq 0$: $G_{i,\lambda}A$ ($AG_{i,\lambda}$),

(iii) pribrajanje j–tog retka (i–tog stupca) pomnoženog s λ i–tom retku (j–tom stupcu): $F_{ij,\lambda}A$ ($AF_{ij,\lambda}$).

2. Sve elementarne matrice su regularne i vrijedi

$$H_{ij}^{-1} = H_{ij}, \quad G_{i,\lambda}^{-1} = G_{i,\lambda^{-1}}, \quad F_{ij,\lambda}^{-1} = F_{ij,-\lambda}.$$

3. $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$

4. $A \in M_n(\mathbb{F})$ je regularna ako i samo ako je A produkt (konačnog broja) elementarnih matrica $A = E_k \cdots E_1 I F_1 \cdots F_l$ ($D_n = I$).

5. $A, B \in M_{mn}(\mathbb{F})$ su ekvivalentne ako i samo ako postoje regularne matrice $S \in \mathrm{GL}(m,\mathbb{F})$, $T \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{F})$ takve da je $B = SAT$.

ZADATAK 6.1. Regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ možemo elementarnim transformacijama samo po retcima svesti na matricu I.

RJEŠENJE A je regularna ako i samo ako je $r(A) = n$, tj. A ima sve stupce linearno nezavisne. Specijalno, nema nijedan nul–stupac.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Kako } A \text{ nema nulstupac, u prvom stupcu postoji element } a_{i1} \neq 0. \\ \text{Dovedimo ga na mjesto } (1,1) \text{ zamjenom 1. i } i\text{–tog retka}\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Elementom } a_{i1} \text{ poništimo prvi stupac.} \\ \text{Dobijemo matricu } A_2 = \left(a_{ij}^{(2)}\right) \text{ koja ima rang } n\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & \dots & a_{1n}^{(2)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & \dots & a_{2n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & \dots & a_{nn}^{(2)} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Prvi i drugi stupac matrice } A_2 \text{ nisu linearno zavisni pa postoji} \\ \text{indeks } i_2 \geq 2 \text{ takav da je } a_{i_2 2} \neq 0. \text{ Zamijenimo } i_2\text{–ti i 2. redak} \\ \text{i poništimo drugi stupac u } A_2 \text{ s elementom } a_{i_2 2}.\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(3)} & a_{12}^{(3)} & a_{13}^{(3)} & \dots & a_{1n}^{(3)} \\ 0 & a_{22}^{(3)} & a_{23}^{(3)} & \dots & a_{2n}^{(3)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(3)} & \dots & a_{3n}^{(3)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(3)} & \dots & a_{nn}^{(3)} \end{pmatrix} \sim \begin{array}{c}\text{Postupak nastavljamo dok ne dođemo} \\ \text{do dijagonalne matrice}\end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} a_{11}^{(n)} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22}^{(n)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}^{(n)} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn}^{(n)} \end{pmatrix} \sim i\text{–ti redak pomnožimo s } \left(a_{ii}^{(n)}\right)^{-1}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = I$$

NAPOMENA 6.2. Elementarne transformacije nad retcima realiziramo množenjem matrice A s lijeva elementarnim matricama. Prema tome, za svaku regularnu matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ postoje elementarne matrice $S_1, \dots, S_n$ takve da je $I = S_n \cdots S_1 A$. Zbog jedinstvenosti inverza je

$$A^{-1} = S_n \cdots S_1.$$

Napišemo li zadnji izraz kao $A^{-1} = S_n \cdots S_1 I$, dobivamo metodu za invertiranje matrica: istovremeno elementarnim transformacijama nad A i I iz A dobivamo I, a iz I dobivamo A^{-1}. Dakle,

$$\left(A \,\vdots\, I \right) \sim \cdots \sim \left(I \,\vdots\, A^{-1} \right).$$

Zadatak 6.2. Odredite inverz od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$\left(A \,\vdots\, I \right) = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(I \,\vdots\, A^{-1} \right).$$

Dakle, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. □

Napomena 6.3. Posve analogno možemo dokazati da provođenjem elementarnih transformacija nad stupcima regularne matrice A možemo doći do jedinične matrice I. Elementarne transformacije nad stupcima realiziraju se množenjem zdesna elementarnim matricama. Dakle, postoje elementarne matrice $F_1, \ldots, F_k$ takve da je $AF_1F_2 \cdots F_k = I$ pa je

$$A^{-1} = F_1F_2 \cdots F_k = IF_1F_2 \cdots F_k.$$

Stoga A^{-1} dobivamo iz I istim elementarnim transformacijama nad stupcima koje A prevode u I.

Zadatak 6.3. Odredite inverz od $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ elementarnim transformacijama nad stupcima.

Rješenje

$$\left(\begin{array}{c} A \\ \hdashline I \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ \hdashline 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 0 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c} I \\ \hdashline A^{-1} \end{array}\right).$$

□

Zadatak 6.4. Kako se mijenja inverz ako matrici A:

(a) zamijenimo i–ti i j–ti redak?

(b) i–ti redak pomnožimo s $\lambda \neq 0$?

(c) i–ti redak pomnožen s λ dodamo j–tom retku?

Rješenje

(a) $(H_{ij}A)^{-1} = A^{-1}H_{ij}^{-1} = A^{-1}H_{ij}$,

(b) $(G_{i,\lambda}A)^{-1} = A^{-1}G_{i,\lambda}^{-1} = A^{-1}G_{i,\lambda^{-1}}$,

(c) $(F_{ji,\lambda}A)^{-1} = A^{-1}{F_{ji,\lambda}}^{-1} = A^{-1}F_{ji,-\lambda}$.

□

DZ 6.1. Kako se mijenja inverz ako matrici A:

(a) zamijenimo i–ti i j–ti stupac?

(b) i–ti stupac pomnožimo s $\lambda \neq 0$?

(c) i–ti stupac pomnožen s λ dodamo j–tom stupcu?

DZ 6.2. Odredite inverz sljedećim matricama:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rješenje

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E^{-1} = (\alpha_{ij}), \alpha_{ij} = \begin{cases} 0, & i > j \\ 1, & i = j \\ (-1)^{i+j}, & i < j \end{cases}.$$

6.1 LU faktorizacija

Činjenice 6.4. 1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ matrica koja se elementarnim transformacijama po retcima, ali bez zamjene redaka, može dovesti do gornjetrokutaste matrice. Tada postoje matrice $L, U \in M_n(\mathbb{F})$, pri čemu je L donjetrokutasta s jedinicama na glavnoj dijagonali, a U gornjetrokutasta, takve da vrijedi

$$A = LU.$$

2. Ako matrica A pri prevođenju na gornjetrokutastu matricu zahtijeva zamjenu redaka, to možemo načiniti unaprijed: neka je PA matrica koja ne zahtijeva zamjenu redaka, gdje je P permutacijska matrica nad retcima. Tada vrijedi

$$PA = LU.$$

3. Postupak je sljedeći: matricu A svodimo do gornjetrokutaste matrice koristeći samo elementarne transformacije u kojima redak pomnožen s λ dodajemo retcima ispod njega. Neka su $E_1, \dots, E_p$ elementarne matrice koje realiziraju te transformacije (one su sve oblike $F_{ij,\lambda}$ za $i > j$). Tada je
$$E_p \cdots E_1 A = U \text{ (gornjetrokutasta)}.$$
Primijetimo da su $E_1, \dots, E_p$ donjetrokutaste matrice s jedinicama na dijagonali pa je takav i njihov produkt i inverz tog produkta (inverz postoji jer su elementarne matrice regularne). Imamo
$$A = (E_p \cdots E_1)^{-1} U =: LU.$$

DZ 6.3. Dokažite:

(a) produkt dvije donjetrokutaste matrice s jedinicama na glavnoj dijagonali je donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali.

(b) inverz donjetrokutaste matrice s jedinicama na glavnoj dijagonali je donjetrokutasta matrica s jedinicama na glavnoj dijagonali.

Sljedeći primjer pokazuje kako u praksi odrediti matrice L i U za zadanu matricu A.

Primjer 6.5.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{matrix}} & \begin{matrix} 4 \\ -5 \\ -5 \\ 0 \end{matrix} & \begin{matrix} -1 \\ 3 \\ -4 \\ 7 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 \\ -8 \\ 1 \\ -3 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & \boxed{\begin{matrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{matrix}} & \begin{matrix} 1 \\ -3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{matrix} 2 \\ -4 \\ 12 \end{matrix} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = U$$

Od stupaca $\begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \\ -6 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 \\ -9 \\ 12 \end{bmatrix}$ "normiranih" tako da su na dijagonali 1, stvaramo L:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Očito se iz L istim elementarnim transformacijama nad retcima dobiva I. Pritom vrijedi $A = LU$.

Zadatak 6.5. Odredite LU–faktorizaciju matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

Rješenje

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 10 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = U.$$

Stupci $\begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} -2 \\ 10 \end{bmatrix}$ određuju $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$. Provjera:

$$LU = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ -3 & 5 & 1 \\ 6 & -4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

NAPOMENA 6.6. LU faktorizaciju (među ostalim) koristimo pri rješavanju sustava $Ax = b$. Taj sustav možemo zapisati kao $L(Ux) = b$. Ako uvedemo supstituciju $y = Ux$, onda se rješavanje polaznog sustava svodi na rješavanje sustava

$$\begin{cases} Ly = b \\ Ux = y \end{cases},$$

pri čemu su L, U trokutaste matrice.

ZADATAK 6.6. Riješite sustav $Ax = b$, gdje je A iz zadatka 6.5, a $b = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

RJEŠENJE Najprije riješimo sustav $Ly = b$, tj.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Dobivamo sustav

$$\begin{aligned} y_1 &= -7 \\ -y_1 + y_2 &= 5 \\ 2y_1 - 5y_2 + y_3 &= 2 \end{aligned}$$

čije rješenje je $y = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$. Sada možemo riješiti sustav $Ux = y$

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix},$$

tj.

$$\begin{aligned} 3x_1 - 7x_2 - 2x_3 &= -7 \\ -2x_2 - x_3 &= -2 \\ -x_3 &= 6 \end{aligned}$$

čije rješenje je $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$.

NAPOMENA 6.7. LU faktorizacija matrice ne mora biti jedinstvena. Na primjer,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & x & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

DZ 6.4. Dokažite da regularna matrica (koja pri svođenju na gornjetrokutastu matricu ne zahtijeva zamjene redaka) ima jedinstvenu LU faktorizaciju.

Napomena 6.8. Složenost LU faktorizacije je $O(N^3)$, isto kao i složenost Gaussove metode eliminacije za rješavanje sustava. Stoga se postavlja pitanje koja je prednost LU faktorizacije. Do prednosti dolazi kad moramo više puta rješavati sustav koji ima istu matricu koeficijenta, ali različite slobodne koeficijente. Naime, ako imamo faktoriziranu matricu koeficijenata, samo moramo napraviti supstitucije unaprijed i unazad da bismo riješili sustav. Ta operacija ima složenost $O(N^2)$. Ako je moramo ponoviti k puta, Gaussova eliminacija bi nam dala ukupnu složenost $O(kN^3)$, a pristup preko LU faktorizacije $O(N^3 + kN^2)$ jer moramo faktorizaciju napraviti samo jednom, a onda k puta supstitucije.

Možda bismo na prvu pomislili da je prostorna složenost Gaussove metode bolja jer radimo samo s jednom matricom, a kod LU faktorizacije imamo dvije matrice iste veličine. No, znamo da je L donjetrokutasta i U gornjetrokutasta pa kod L moramo samo pamtiti (strogi) donji trokut (jedinice su na dijagonali i to ne moramo spremiti u memoriju), a kod U moramo pamtiti samo gornji trokut. Dakle, pamtimo isti broj elemenata kao i kod A.