

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

- Dozvoljeno je koristiti samo službene formule i pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja će biti objavljena danas na web stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do srijede, 22. studenog 2017. u 21 sat na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u četvrtak, 23. studenog 2017. u 12 sati u prostoriji 006.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$f(x) = \arcsin \lfloor \log_2 (\log_2 (x^2 + 2x - 15) + 1) - 1 \rfloor.$$

Odredite sliku (prirodne domene) funkcije f .

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a . Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 2. (6 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa:

$$f(x) = e^{\lfloor \arctg\left(\frac{\cos x}{2+\cos x}\right) \rfloor}.$$

Odredite $f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$ i $f^{-1}([1, +\infty))$.

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a . Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 3.

- (a) (5 bodova) Dokažite da je funkcija zadana s

$$f(x) = \log_2 \left(\frac{\operatorname{ch}^2 x - 4 \operatorname{ch} x - 5}{\operatorname{ch} x - 5} \right) - 1$$

injekcija na intervalu $I = \langle -\operatorname{Arch} 5, 0 \rangle$ i odredite joj inverz na tom intervalu.

- (b) (1 bod) Postoji li interval $J \supset I$ takav da f i dalje bude injekcija na J ? Ukoliko postoji, odredite najveći takav interval.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodična funkcija s periodima 3 i 7. Dokažite da je tada f periodična i s periodom 1.

(b) (2 boda) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$(\cos \circ \ln)(e^{4\pi} x) = (\cos \circ \ln)(x).$$

(c) (3 boda) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija za koju postoji $k > 0, k \neq 1$ takav da je

$$f(kx) = f(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Pronađite funkciju $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja nije periodična takvu da je $f \circ g$ periodična s periodom 3.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

- Dozvoljeno je koristiti samo službene formule i pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja će biti objavljena danas na web stranici kolegija.
- Rezultati će biti objavljeni do srijede, 22. studenog 2017. u 21 sat na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u četvrtak, 23. studenog 2017. u 12 sati u prostoriji 006.

Zadatak 1. (6 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije

$$g(x) = \arccos \lceil \log_2 (\log_2 (x^2 + 2x - 15) + 1) - 2 \rceil.$$

Odredite sliku (prirodne domene) funkcije g .

Napomena. $\lceil a \rceil$ je oznaka za najmanji cijeli broj koji nije manji od a . Npr. $\lceil 1 \rceil = 1$, $\lceil \pi \rceil = 4$, $\lceil -2.5 \rceil = -2$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 2. (6 bodova) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa:

$$f(x) = 2 \left\lfloor \operatorname{arctg} \left(\frac{-\sin x}{2 + \sin x} \right) - \frac{\pi}{2} \right\rfloor.$$

Odredite $f\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ i $f^{-1}([1, +\infty))$.

Napomena. $\lfloor a \rfloor$ je oznaka za najveći cijeli broj koji nije veći od a . Npr. $\lfloor 1 \rfloor = 1$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$, $\lfloor -2.5 \rfloor = -3$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 3.

- (a) (5 bodova) Dokažite da je funkcija zadana s

$$f(x) = \log_3 \left(\frac{\operatorname{ch}^2 x - 7 \operatorname{ch} x - 8}{\operatorname{ch} x - 8} \right) - 2$$

injekcija na intervalu $I = \langle -\operatorname{Arch} 8, 0 \rangle$ i odredite joj inverz na tom intervalu.

- (b) (1 bod) Postoji li interval $J \supset I$ takav da f i dalje bude injekcija na J ? Ukoliko postoji, odredite najveći takav interval.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Prvi kolokvij – 20. studenog 2017.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodična funkcija s periodima 4 i 9. Dokažite da je tada f periodična i s periodom 1.

(b) (2 boda) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$(\sin \circ \ln)(e^{4\pi} x) = (\sin \circ \ln)(x).$$

(c) (3 boda) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija za koju postoji $k > 0, k \neq 1$ takav da je

$$f(kx) = f(x), \quad \text{za sve } x \in \mathbb{R}.$$

Pronađite funkciju $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja nije periodična takvu da je $f \circ g$ periodična s periodom 2.