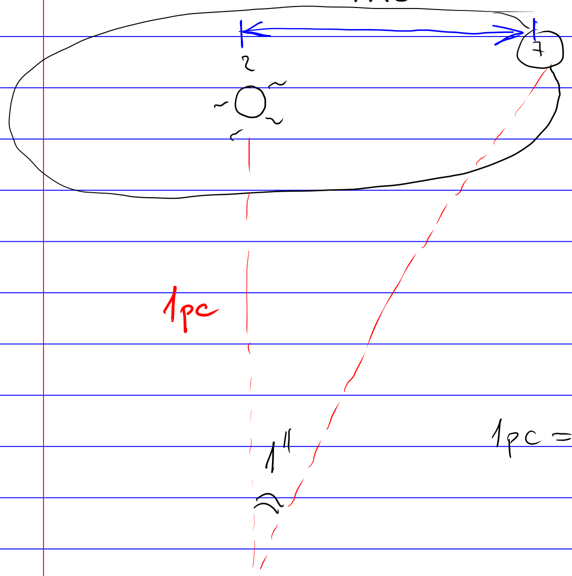
Veličine i jedinice

$1\,AU = 150$ miljuna km $= 1.5 \times 10^{11}$ m (astronomska jedinica)



parsek:

$$\frac{1\,AU}{1\,pc} \sim 1'' = \frac{1}{60^2} \cdot \frac{\pi}{180}$$

$$1pc = 1\,AU \cdot \frac{180 \cdot 60^2}{\pi} = 3.09 \times 10^{16}\ m$$

(= 3.26 godina svjetlosti)

- udaljenost do bliskih zvijezda $\sim$ pc
- polumjer naše galaksije $\sim$ 15 kpc
- udaljenost do M31 $\sim$ 1 Mpc
- skala homogenosti $\sim$ 100 Mpc
- polumjer vidljivog svemira $\sim$ 14 Gpc

- starost svemira 13.7 Ga

- sjaj Sunca: $L_\odot = 3.8 \times 10^{26}$ W

- vidljivi svemir: 100 milijardi galaksija $\times$ 100 milijardi zvijezda $= 10^{22}$ zvijezda $(\sim 10^{24})$

- ukupna prosječna gustoća materije i energije

$$\rho \approx \rho_c = 10^{-26}\ kg/m^3$$

($\approx$ 5 protona po m^3)

Temeljna kozmološka opažanja

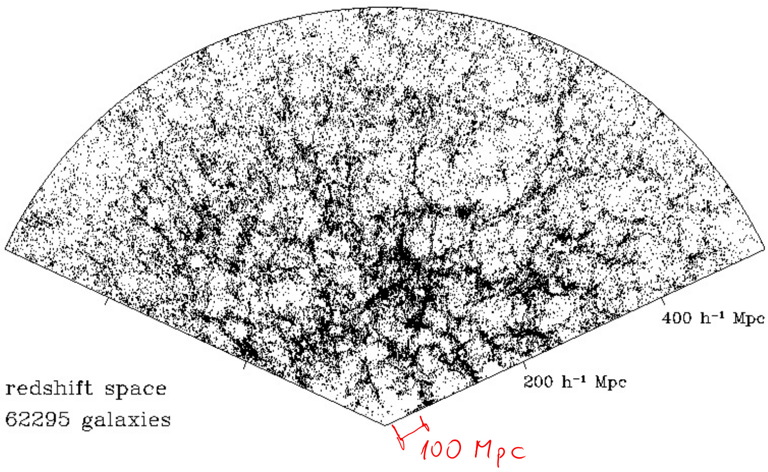
1. Kozmološko načelo

$\boxed{\text{Svemir je homogen i izotropan.}}$

homogen → isti u svakoj točki ↑ opažanja kombiniramo s idejama o evoluciji u vremenu (daleke dijelove svemira vidimo u prošlosti)

izotropan → isti u svakom smjeru ↑ opažamo izravno

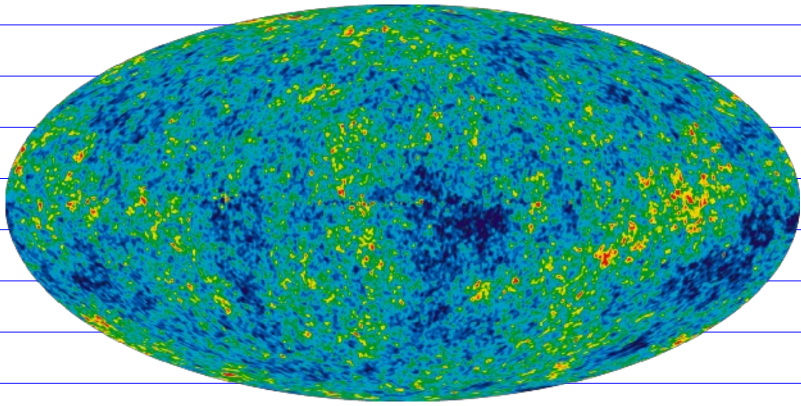
Izravna opažanja raspodjele galaksija (npr. Sloan) daju solidnu podršku homogenosti na skalama 100–300 Mpc. (cf. „Sloan great wall" ... M. Jurić)



$h^{-1} \approx 2.$

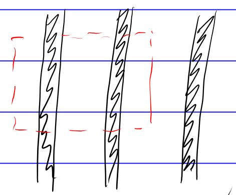
Kozmičko pozadinsko mikrovalno zračenje (CMB) je izotropno $1 : 10^5$ što je snažna podrška kozmološkom načelu. (Eventualne nehomogenosti su onda posljedica lokalne dinamike.)
(Ali, cf. „axis of evil".)

Satelit Planck:

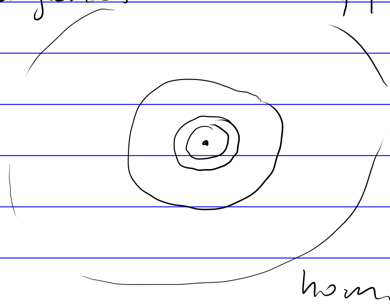


$\Delta T \sim 10^{-5}\,K$

U kojoj mjeri homogenost i izotropija povlače jedna drugu?



homogen ✓
izotropan ✗



homogen ✗
izotropan ✓

Izotropija oko svake točke implicira homogenost. (cf. kviz)

Finese oko opažačkog konsenzusa su manje važne.
Kozmološko načelo je prirodna nulta aproksimacija
za sve kvantitativne modele svemira i
striktno ćemo ga se držati.

„Savršeno kozmološko načelo": Svemir je izotropan i homogen kako u prostoru tako i u vremenu.

⇓

„steady-state universe" (F. Hoyle et al.)

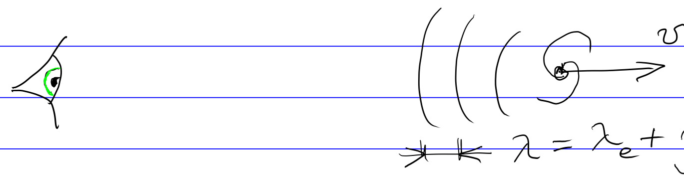
- zahtjeva kontinuirano stvaranje materije kako bi i uz širenje svemira gustoća bila konstantna

- otkriće CMB-a je dalo odlučujuću podršku suprotstavljenoj teoriji velikog praska

2. Hubbleov zakon

$\boxed{\text{Svemir se širi}}$

Dopplerov efekt za razmjerno bliske galaksije koje se udaljavaju nerelativističkom brzinom $v \ll c$



$$\lambda = \lambda_e + \underbrace{vT}_{\text{pomak galaksije tijekom jednog titraja}} = \lambda_e + v\frac{1}{\nu} = \lambda_e + v\frac{\lambda_e}{c}$$

λ_e – emitirano

λ – opaženo

Def crveni pomak $\boxed{z \equiv \frac{\lambda - \lambda_e}{\lambda_e}} = \frac{v}{c}$

vrijedi za $v \ll c$

(i formula i interpretacija kao Dopplerov efekt)

1912. V. Slipher: M31 ima $z = -0.001 \Rightarrow v = zc = -300$ km/s
izmjerio

1927. G. Lemaître: 41 galaksija $d \sim 1$ Mpc → $36\times\ z>0$, $5\times\ z<0$ $\Big\} \Rightarrow$ ekspanzija

- z je lako mjeriti; udaljenost d teško!

km/s !

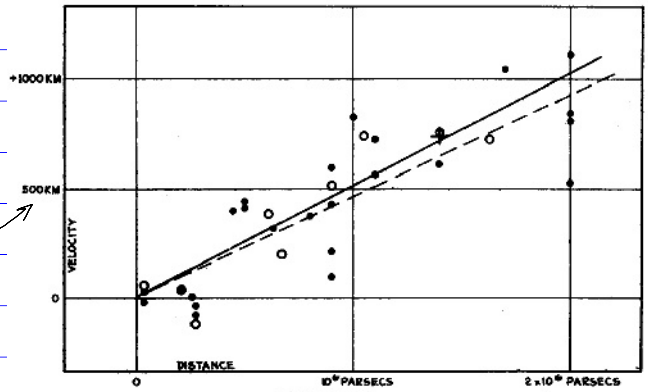


FIGURE 1
Velocity-Distance Relation among Extra-Galactic Nebulae.

1929. E. Hubble određuje udaljenost do 20-ak galaksija metodom cefeida i otkriva

$$\boxed{z = \frac{H_0}{c} r \quad \text{tj.} \quad v = H_0 r}$$ Hubbleov zakon

fit: $H_0 \sim 500$ km/s/Mpc

No potcijenio je udaljenosti 7 puta. Današnja vrijednost

$$\boxed{H_0 = 68 \pm 2 \ \text{km/s/Mpc}}$$

← uglavnom iz CMB-a, izravna mjerenja cefeida itd. daju $H_0 \sim 73$ km/s/Mpc

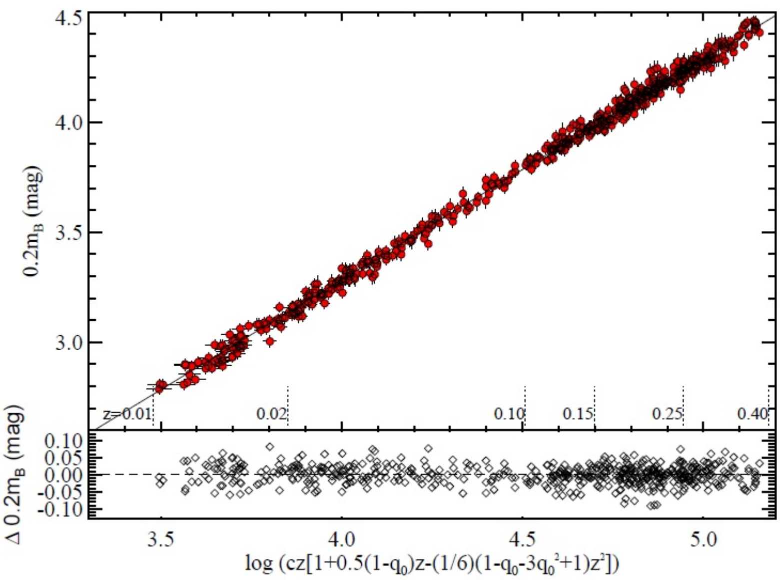
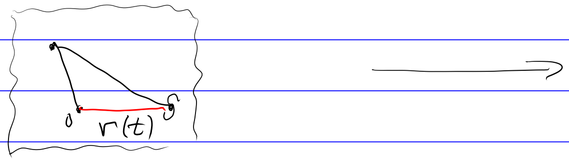
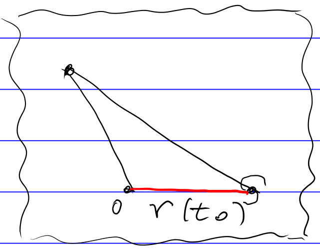


Fig. 8.— Hubble diagram of more than 600 SNe Ia at 0.01 < z < 0.4 in units of log cz.

(Riess et al. arxiv: 1604.01424)

Homogeno širenje svemira:





$t_0 = 0$ ← sadašnji trenutak

$$r(t) = \boxed{a(t)}\, r(t_0)$$

faktor skale, $a(0) = 1$

$$v(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \frac{da(t)}{dt}\, r(t_0) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\, r(t)$$

$$\boxed{H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}$$

Hubbleov parametar (relativna brzina širenja)

$H(0) \equiv H_0$ – Hubbleova konstanta

$$[H] = s^{-1}$$

Hubbleovo vrijeme: $\frac{1}{H_0} = \frac{s\,\mathrm{Mpc}}{68\,\mathrm{km}} = \frac{s \cdot 10^6 \cdot 3.09 \times 10^{16}\,\mathrm{m}}{68 \cdot 10^3\,\mathrm{m}}$

$$= \underbrace{\frac{309}{68}}_{4.54} \cdot 10^{17}\,s = 14.4\ \mathrm{Ga} \qquad (a = \text{godina, annum})$$

– to bi bilo vrijeme od Velikog praska kad bi linearni Hubbleov zakon vrijedio cijelo vrijeme

Hubbleova udaljenost : $\frac{c}{H_0} = 14.4\ Gly = 4.4\ Gpc$

~ veličine vidljivog svemira (ali greška je veća nego za relaciju $\frac{1}{H_0}$ ~ starost svemira jer je to zapravo udaljenost do koje bi došla svjetlost rane zvijezde (od ~ Velikog praska) kad se svemir ne bi širio.
To je lošija aproksimacija nego ona da se svemir širi poštujući linearni Hubbleov zakon cijelo vrijeme

3. Sastav svemira (udjeli u ukupnoj masi/energiji)

opažamo: 75% vodik } „barionska tvar"
25% helij }

e^- – zanemarivo (1000x lakši od protona)
γ, ν – zanemarivi danas (vrlo značajni u prvih par sto tisuća godina nakon V.p.)

5% – barionska tvar (zvijezde 10% toga tj. 0.5% ukupno; uključuje i tzv barionsku tamnu tvar: smeđi patuljci, astrofizičke crne rupe, ...)
27% – tamna tvar (nebarionska)
68% – tamna energija

4. CMB – kozmičko pozadinsko zračenje

– 1965: Penzias & Wilson
– jaka potvrda teoriji velikog praska
– 1989 – 2013 COBE → WMAP → Planck : anizotropije u CMB – kozmologija postaje precizna znanost!

$T = 2.7255\ K$, anizotropije: $10^{-5}\ K$

Zakrivljeni prostori

- Dominantna sila na kozmološkim skalama je gravitacija.

Teorija gravitacije: Newton vs. Einstein

Newton: gravitacija je sila $\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}$

$$G = 6.67 \times 10^{-11}\ m^3\, kg^{-1}\, s^{-2}$$

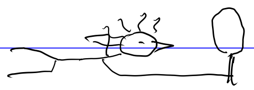
Drugi Newtonov zakon: $\vec{F} = m_i \vec{a} = -G\frac{Mm_g}{r^2}\hat{r}$

$m_i = m_g \equiv m$ načelo ekvivalencije (trome i teške mase)

$\Rightarrow \vec{a} = -G\frac{M\hat{r}}{r^2}$ tj. gibanje tijela u grav. polju ne ovisi o njegovoj masi (Galileo)

Einsteinova specijalna teorija relativnosti (STR):

1. Zakoni fizike su isti u svim inercijalnim sustavima.

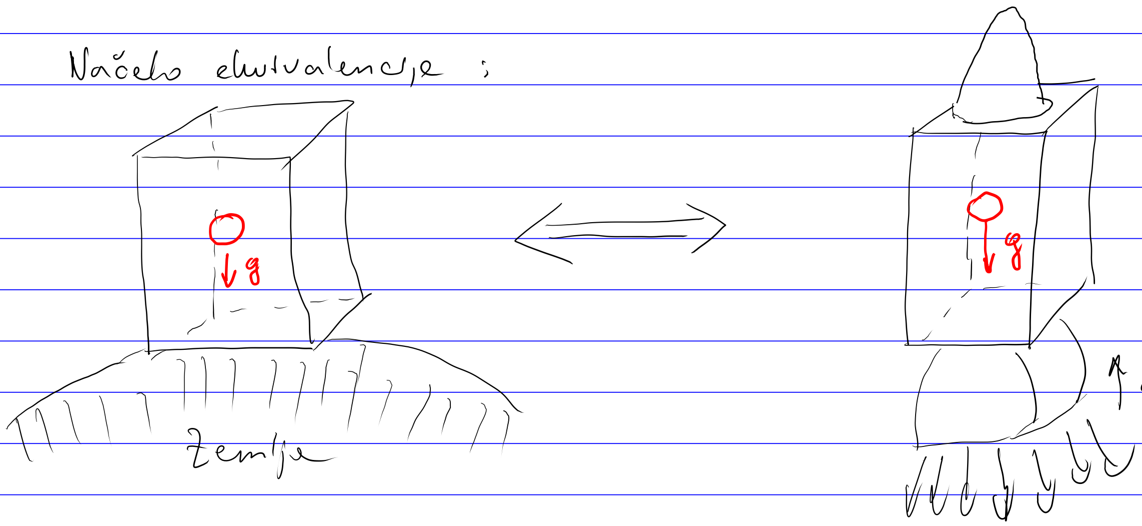
+ Maxwell + 

$\Downarrow$

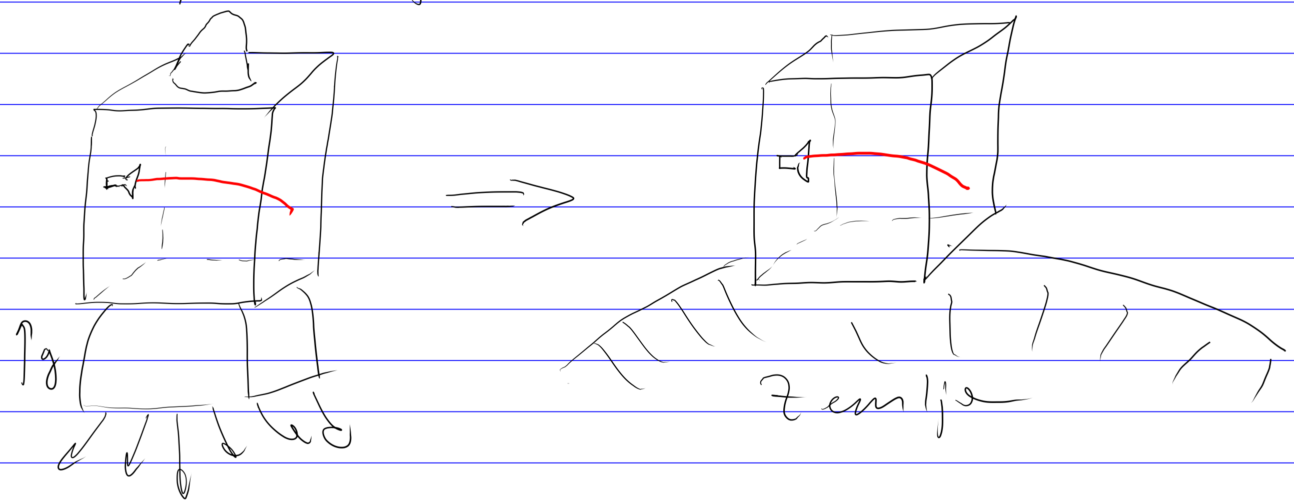
2. Brzina svjetlosti u vakuumu je ista (c) u svim inercijalnim sustavima

Opća teorija relativnosti (GTR)

Načelo ekvivalencije:



Ekvivalencija za sve fizikalne zakone onda znači:



Dakle gravitacija privlači i svjetlost, premda je bezmasena.

Ako sad prihvatimo i Fermatovo načelo da svjetlost putuje od točke A do B u minimalnom vremenu, uz $c = const$ to znači da putuje najkraćim putem!

Ako najkraći put nije ravna linija $\Rightarrow$ prostor nije euklidski tj. zakrivljen je.

U Einsteinovoj teoriji gravitacije masa/energija zakrivljuju prostorvrijeme, a tijela se u tom prostorvremenu gibaju najkraćim putem (po geodetskoj liniji).

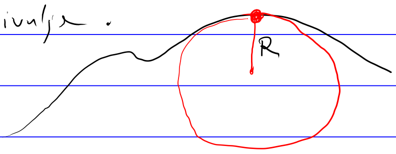
J.A. Wheeler:

„Mass-energy tells spacetime how to curve.
Curved spacetime tells mass-energy how to move."

Pogodno je razviti intuiciju na primjerima niže dimenzionalnih zakrivljenih prostora.

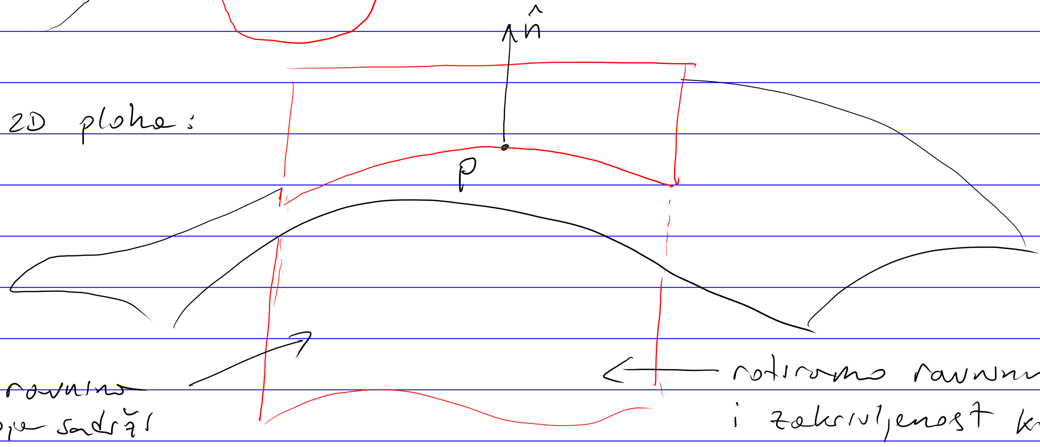
Zakrivljene 2D plohe

krivulja:



$\varkappa = \frac{1}{R}$: zakrivljenost u točki P

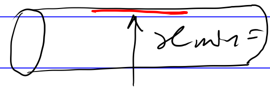
2D plohe:



ravnina koja sadrži normalu $\hat{n}$ u P

← rotiramo ravninu duž $\hat{n}$ i zakrivljenost krivulje presjeka ravnine i plohe se mijenja.

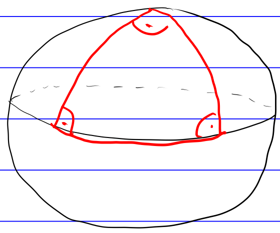
Gaussova zakrivljenost: $K = \varkappa_{min} \cdot \varkappa_{max}$

Da li je valjak zakrivljen? Ne:  $\varkappa_{min} = \frac{1}{\infty} = 0$

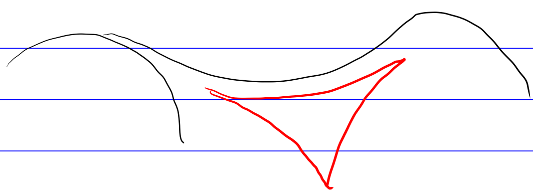
Gauss: ravnine koje daju $\varkappa_{min}$ i $\varkappa_{max}$ su okomite.

Gauss („teorema egregium"): zakrivljenost K, premda definirana kao ekstrinsično (vanjsko) svojstvo plohe, potpuno je određena intrinsičnom geometrijom plohe (tako mjerenjima koje mogu obaviti 2D stvorenja koja žive na plohi). K se ne mijenja savijanjem plohe (tj. nekakvim izometrijama – transformacijama koje čuvaju udaljenosti)

Podesna mjerenja: zbroj kuteva trokuta, opseg kružnice, ponašanje paralelnih pravaca
↳ (i dovelo do otkrića neeuklidskih geometrija)



$\alpha+\beta+\gamma = 270^\circ$



općenito (Girardov teorem)

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi + \frac{A}{R^2}$$

$$\alpha+\beta+\gamma = \pi - \frac{A}{R^2}$$

Kozmološko načelo u 2D: zanimaju nas plohe s istom zakrivljenosti u svim točkama.

$K = 0$: ravnina $\quad x + y + z = \text{const}$

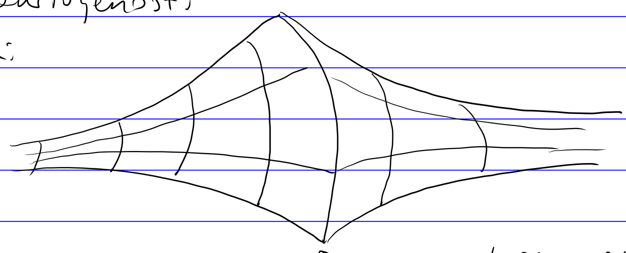
$K > 0$: sfera S^2 $\quad x^2 + y^2 + z^2 = \text{const}^2$

$K < 0$: hiperbolični prostor H^2 $\quad x^2 + y^2 - z^2 = -\text{const}^2$

primjeri uklapanja u 3D prostor → ali to su samo „modeli" 2D prostora

Prostor konstantne negativne zakrivljenosti:

Beltramijeva pseudosfera:



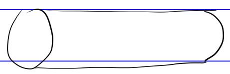
neregularna ovdje

(Hilbert: ne postoji regularna ploha konstantne negativne zakrivljenosti)

Uklapanje zakrivljene plohe u višedimenzionalni ravni prostor (kao gore S^2 u $\mathbb{R}^3$) je nekad zgodno, ali nije nužno tj. plohe „postoji" i bez uklapanja. Dakle, ako je svemir zakrivljeno 4D prostorvrijeme ne mora postojati neki višedimenzionalni prostor, u kojem je ovaj zakrivljen".

Gornje tri mogućnosti su i jedine do na „diskretni kvocijent"

popust



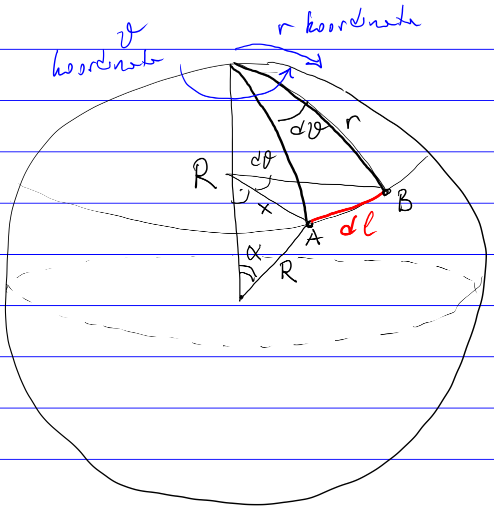
← zapravo ravnina s periodičnim rubnim uvjetom

– slični trikovi su mogući i sa sferom

– traženi su efekti netrivijalnih topologija u svemiru (periodičnosti u CMB-u) – bez rezultata

Za određivanje udaljenosti u zakrivljenom prostoru razmotrimo diferencijalne udaljenosti pa integriramo:

Npr. za sferični 2D prostor:



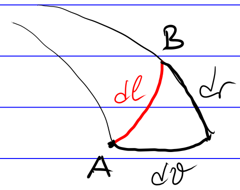
$$dl = x\,d\vartheta$$

$$R\alpha = r$$

$$\frac{x}{R} = \sin\alpha = \sin\frac{r}{R}$$

$$dl = R\sin\frac{r}{R}\,d\vartheta$$

Kad ds ima i komponentu duž r smjera, „Pitagora":



$$dl^2 = dr^2 + R^2\sin^2\frac{r}{R}\,d\vartheta^2 \quad \leftarrow \boxed{\text{„metrika" prostora}}$$

$$\left\{ \text{Pazi notacija: } dx^2 \equiv (dx)^2 \neq 2x\,dx \right\}$$

Slično, u hiperboličnom ($K<0$) 2D prostoru:

$$dl^2 = dr^2 + R^2\sinh^2\frac{r}{R}\,d\vartheta^2$$

Zapišimo to ujedinjeno pomoću funkcije

$$S_k = \begin{cases} R\sin r/R & k=+1 \\ r & k=0 \\ R\sinh r/R & k=-1 \end{cases}$$

↑ indeks zakrivljenosti $\quad K = \frac{k}{R^2}$

$$dl^2 = dr^2 + S_k(r)^2 d\vartheta^2$$

Poopćenje na 3D prostore je lagano:

$$\boxed{dl^2 = dr^2 + S_k(r)^2 \underbrace{\left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2\right)}_{d\Omega^2}}$$

Alternativno se ista metrika može zapisati pomoću koordinate

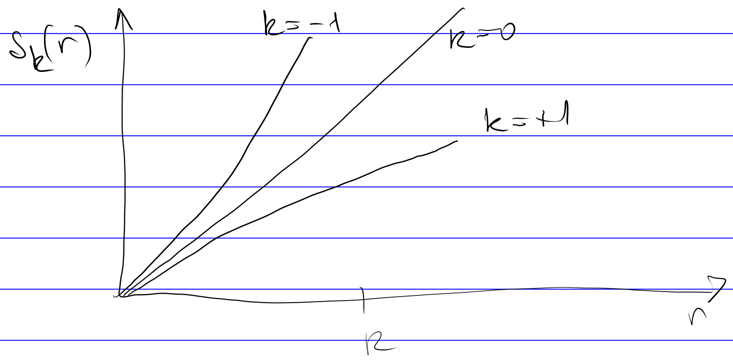
$$x \equiv S_k(r)$$

$$\frac{dx}{dr} = \left\{ \begin{array}{l} \cancel{R}\left(\cos\frac{r}{R}\right)\cdot\frac{1}{\cancel{R}} = \sqrt{1-\sin^2\frac{r}{R}} = \sqrt{1-\frac{x^2}{R^2}} \\ 1 \\ \cancel{R}\left(\cosh\frac{r}{R}\right)\frac{1}{\cancel{R}} = \sqrt{1+\sinh^2\frac{r}{R}} = \sqrt{1+\frac{x^2}{R^2}} \end{array} \right\} = \sqrt{1-\frac{kx^2}{R^2}}$$

$$\boxed{dl^2 = \frac{dx}{1-k\,x^2/R^2} + x^2 d\Omega^2}$$

Suprotno od gornje, ova metrika je euklidska u (ϑ,φ) – smjerovima, a neeuklidska u „radijalnom" x smjeru.

Za mali $r \ll R$ tri mogućnosti se malo razlikuju



$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} \dots$$

Robertson – Walkerova metrika

U 4D prostorvremenu također imamo samo tri mogućnosti ako poštujemo kozmološko načelo:

$$\boxed{ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2\left(dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2\right)} \quad k \in \{+1, 0, -1\}$$

⟸ RW metrika

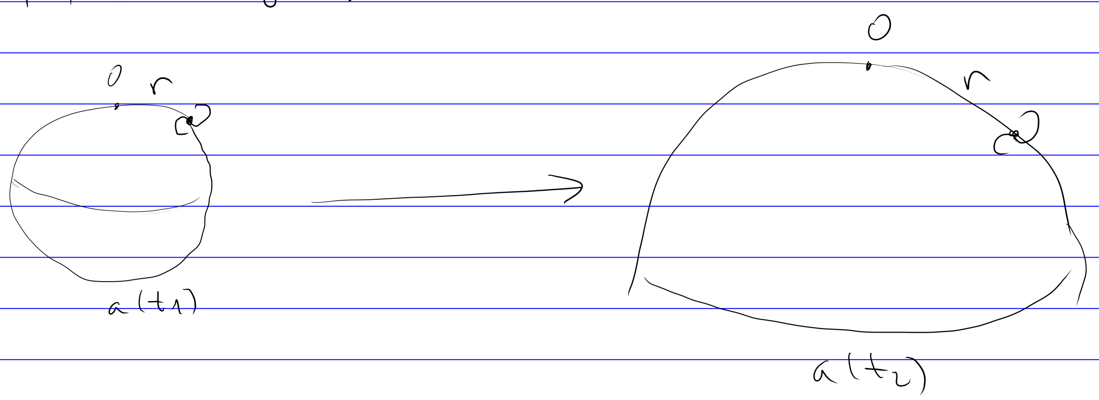
(Bitna je samo relativna skala između dt i dl. Eventualna $ds^2 = b(t)^2 dt^2 - a(t)^2 dl^2$ se pretvara u gornju redefinicijom vremenske koordinate.)

Jedna moguća dinamika je homogeno širenje (ili sažimanje) za faktor skale $a(t)$.

(r, ϑ, φ) – koordinatni sustav promatrača koji se giba zajedno sa širenjem svemira (npr. mi) – sugibajući promatrač (samo za takve promatrače vrijedi kozmološko načelo i RW metrika)

Promjene udaljenosti zbog širenja svemira su sasvim sadržane u faktoru skale $a(t)$ pa se (r, ϑ, φ) koordinate dalekih galaksija (čije vlastita brzina zbog lokalnih efekata je puno manja od brzine zbog Hubbleovog širenja) ne mijenjaju u vremenu.

(r, ϑ, φ) – sugibajući koordinatni sustav



Prava udaljenost

Prava udaljenost između dviju točaka u trenutku t je duljina prostorne geodetske linije između njih uz faktor skale fiksiran na vrijednosti $a(t)$.

Geodetsku liniju definira putanja fotona za koje je relativistički interval $ds^2 = 0$, pa za konstantno vrijeme imamo

$$0 = -ds^2 = -\underbrace{dt^2}_{=0} + a(t)^2\left(dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega\right)$$

tj. duljina geodetske linije $dl^2 = -ds^2$

$$dl = a(t)\, dr$$

do objekta sa sugibajućom koordinatom r

prava udaljenost

$$\boxed{d_p = \int_0^r dl = \int_0^r a(t)\, dr = a(t)\, r}$$

od nas

Izbor normalizacije $a(0) = 1$ znači da je sugibajuća udaljenost r jednaka današnjoj pravoj udaljenosti. (To također znači da je R_0 u $S_k(r)$ današnji radijus zakrivljenosti, ako svemir nije euklidski.)

Promjena d_p u vremenu:

$$\dot{d}_p = \dot{a}(t)\, r = \underbrace{\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}}_{\equiv H(t)} d_p$$

$H(0) = H_0$

$$\dot{d}_p(t_0) = H_0\, d_p(t_0)$$

Hubbleov zakon: promjena udaljenosti je proporcionalna udaljenosti, gdje tu promjenu ne interpretiramo kao „brzinu" udaljavanja nego kao posljedicu širenja svemira.

Informacije o $a(t)$ bismo dakle mogli dobiti mjerenjima d_P i $\dot{d}_P$ za daleke objekte, ali d_P se prilično teško mjeri (cf. kozmička ljestvica udaljenosti").

Crveni pomak z se lako mjeri pa povežimo z i $a(t)$:

Daleka galaksija emitira u t_e svjetlo valne duljine λ_e i mi to detektiramo u t_0 kao λ_0:

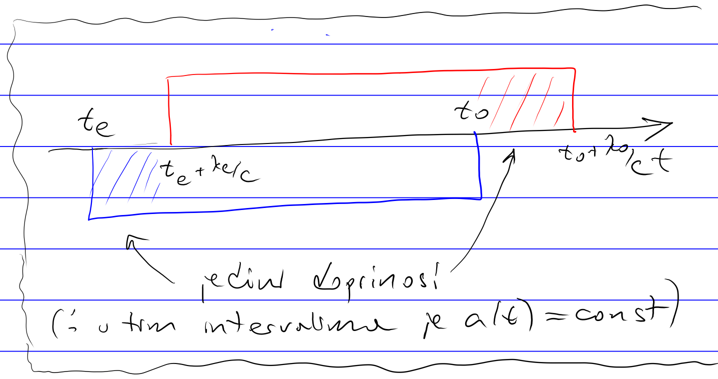
$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 dr^2 = 0 \Rightarrow c\,dt = \pm a(t)\,dr$$

jer svjetlost u vremenu ide od $r>0$ k $r=0$

$$c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = -\int_r^0 dr = r$$

Sljedeća valna fronta kreće u $t_e + \frac{\lambda_e}{c}$ i biva opažena u $t_0 + \frac{\lambda_0}{c}$

$$c\int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} dt/a(t) = r$$



Oduzimanjem ovih dviju jednadžbi

$$0 = \int_{t_e+\lambda_e/c}^{t_0+\lambda_0/c} dt/a(t) - \int_{t_e}^{t_0} dt/a(t) =$$

$$= \int_{t_0}^{t_0+\lambda_0/c} dt/a(t) - \int_{t_e}^{t_e+\lambda_e/c} dt/a(t) = \frac{1}{a(t_0)}\frac{\lambda_0}{c} - \frac{1}{a(t_e)}\frac{\lambda_e}{c} \Rightarrow \frac{\lambda_0}{a(t_0)} = \frac{\lambda_e}{a(t_e)}$$

$$\frac{a(t_0)}{a(t_e)} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} - 1 + 1 = z + 1$$

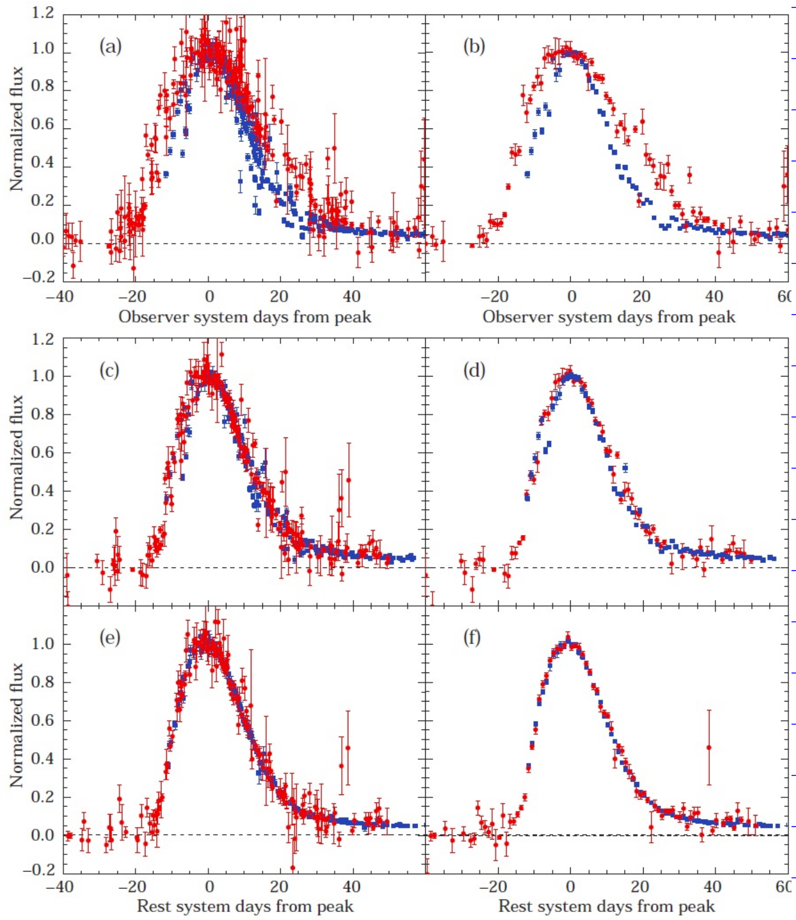
$$\boxed{1 + z = \frac{a(t_0)}{a(t)} = \frac{1}{a(t)}}$$

z ne ovisi o obliku funkcije $a(t)$ tj. kako je točno svemir evoluirao od $a(t_e)$ do današnjeg $a(t_0) = 1$!

z nije posljedica Dopplerovog efekta već kumulativni efekt prolaska svjetlosti kroz prostor u širenju.

Rekordni $z = 11.09$ (2016.) $\rightarrow$ slika te galaksije je iz vremena kad je svemir bio 12x manji.

Efekt se može interpretirati i kao „kozmička dilatacija vremena" što je opaženo i u trajanjima eksplozija supernovih Ia:



← izravno opažanje

← korigirano za (1+z)

← korigirano za varijacije u trajanju eksplozije (poznate kao funkcija vršnog sjaja)

(Goldhaber et al., 2001.)

Ovo je snažan argument da crveni pomak dalekih galaksija nije zbog toga što svjetlo usput na neki drugi način gubi energiju („tired light hypothesis")

Kozmička dinamika

Geometrija prostorvremena uz pretpostavku homogenosti i izotropije je opisana RW metrikom:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2\right)$$

metrički tenzor
$$g = \begin{pmatrix} c^2 & & & \\ & -a(t)^2 & & \\ & & -a(t)^2 S_k(r)^2 & \\ & & & -a(t)^2 S_k(r)^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix}$$

Dinamika je dana Einsteinovom jednadžbom

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

Einsteinov tenzor $f(g_{\mu\nu}, \partial_\rho g_{\mu\nu}, \partial_\rho \partial_\sigma g_{\mu\nu})$

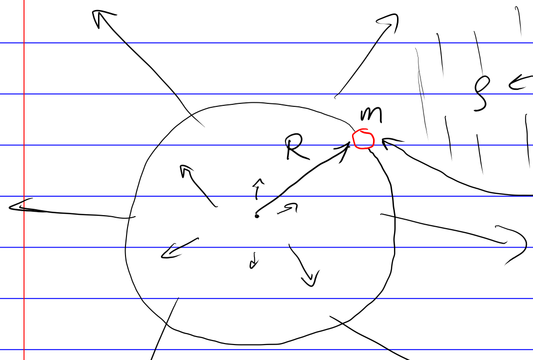
tenzor energije-impulsa (npr. $T_{00} = \mathcal{E}(x)$ ← gustoća energije)

- 10 vezanih nelinearnih diferencijalnih jednadžbi 2. reda
- rješavaju se numerički, a analitički za jednostavne, vrlo simetrične sustave:
  - sferična raspodjela: Schwarzschildovo rješenje
  - homogena i izotropna raspodjela: Friedmannova jednadžba

Friedmannova jednadžba

Izvest ćemo je prvo u okviru Newtonove teorije.

ρ ← homogena gustoća mase svuda



testna masa na udaljenosti (pravoj) R od ishodišta

kozmičko širenje (može i sažimanje)

- masa izvan sfere ne doprinosi sili na m (Newton, cf. Birkhoffov teorem u GTR)

Energija testne mase:

U = kinetička + potencijalna

$$= \frac{1}{2} m \dot{R}^2 - \frac{G\left(\frac{4\pi}{3} R^{\cancel{3}\,2} \rho\right) m}{\cancel{R}}$$

$\Bigg\}$ $R(t) = a(t)\, r$ ← sugibajući radijus

$$= \frac{1}{2} m r^2 \dot{a}^2 - \frac{4\pi G r^2 a^2 \rho m}{3} \quad \Big/ \frac{2}{mr^2a^2}$$

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho + \underbrace{\frac{2U}{mr^2a^2}}$$

ne može ovisiti o r zbog homogenosti
(ostali članovi ne ovise o r)

$\Rightarrow U \propto \frac{1}{r^2}$

$$-\frac{2U}{c^2 m r^2} \equiv K_0 \leftarrow \text{const}(r), \text{ a mora biti i const}(t)$$

jer je energija očuvana

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{K_0 c^2}{a^2}}$$

- $(\dot{a})^2 \rightarrow$ svaki scenarij s širenjem $\dot{a} > 0$ ima analogon sa sažimanjem $\dot{a} < 0$

Mi se specijaliziramo na slučaj širenja.

$U \geq 0$ tj. $K_0 \leq 0 \Rightarrow \dot{a} \neq 0$ uvijek $\rightarrow$ beskonačno širenje

$U < 0$ tj. $K_0 > 0 \Rightarrow \dot{a} = 0$ kad se ρ dovoljno smanji

$\rightarrow$ prestanak širenja (i slijedi sažimanje)

Rješavanje Einsteinove jednadžbe (vidi prilog) daje

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\,\mathcal{E}(t) - \frac{k c^2}{R_0^2 a(t)^2}}$$

Friedmannova jednadžba

obzirom na njutnovski pristup:

$\rho \rightarrow \frac{\mathcal{E}}{c^2} \leftarrow$ gustoća energije
(sva energija gravitira)

$K_0 \rightarrow \frac{k}{R_0^2}$

k ← indeks zakrivljenosti
R_0 ← radijus zakrivljenosti

Kako je $H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$ možemo pisati

$$H(t)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2}$$

odnosno, danas,

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_0 - \frac{kc^2}{R_0^2} \qquad (a(0)=1)$$

Točno mjerenje H_0 i ε_0 bi odredilo zakrivljenost k/R_0^2.
No i bez mjerenja možemo postaviti granice!

Ako je $k=-1$

$$\frac{1}{R_0^2} = \frac{H_0^2}{c^2} - \frac{8\pi G}{3c^4}\varepsilon_0$$

Kako je $\varepsilon_0 \geq 0$, $\frac{1}{R_0^2}$ je maksimalno za $\varepsilon_0 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad R_0\Big|_{\substack{min \\ \text{za } k=-1}} = \frac{c}{H_0} \quad \Leftarrow \text{Hubbleova udaljenost}$$

I za $k=+1$ imamo

$$R_0\Big|_{\substack{min \\ k=+1}} \sim \frac{c}{H_0}$$

iz negativnih rezultata potrage za periodičnim ponavljanjem slika galaksija i CMB-a.

Uvrštavanjem $k=0$ dobivamo granicu između ova dva slučaja:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon \quad \text{i odgovarajuću gustoću energije}$$

zovemo kritična gustoća $\quad \varepsilon_c(t) = \frac{3c^2}{8\pi G} H(t)^2$

Danas:

$$\frac{\varepsilon_{c,0}}{c^2} = \rho_{c,0} = 9\times 10^{-27}\ \mathrm{kg/m^3} \approx 5 \text{ protona}/\mathrm{m^3}$$

Obično je gustoće u kozmologiji izražavati u omjeru prema kritičnoj:

$$\Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c(t)} \quad , \quad \text{mjerenja} : \Omega_0 \approx 1 \quad (\pm 0.5\%)$$

$$H(t)^2 = \underbrace{\frac{8\pi G}{3c^2}}_{\frac{H(t)^2}{\varepsilon_c(t)}} \varepsilon(t) - \frac{kc^2}{R_0^2 a(t)} \quad \Big/ \frac{1}{H(t)^2}$$

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a(t) H(t)^2}$$

$\Omega > 1 \Rightarrow k = +1$ „zatvoreni" svemir

$\Omega = 1 \Rightarrow k = 0$ „ravni" svemir

$\Omega < 1 \Rightarrow k = -1$ „otvoreni" svemir (ako nema netrivijalnu topologiju)

Friedmannova je jedna jednadžba s dvije nepoznanice: $a(t)$ i $\varepsilon(t)$. Kad bi i izmjerili ε_0 i odredili $\dot{a}_0$ ne bismo mogli odrediti $a(t \neq 0)$ i $\varepsilon(t \neq 0)$.

Dobili smo je iz zakona očuvanja energije testne mase na površini sfere.
Drugu jednadžbu daje nam zakon očuvanja energije „fluida" same sfere:

$$dE = \underbrace{dQ}_{=0} - p\,dV$$

$\Leftarrow$ nema transfera topline jer je sve na istoj temperaturi (kozmološko načelo strikes again)

$$V(t) = \frac{4\pi}{3} R(t)^3 = \frac{4\pi}{3} a(t)^3 r^3$$

$$\dot{V}(t) = \frac{4\pi}{3} r^3 \, 3\, a(t)^2 \dot{a}(t) = V(t) \cdot 3 \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$$

tj. $\frac{\dot{V}}{V} = 3\frac{\dot{a}}{a}$ (očito i iz razmatranja dimenzija)

$$E(t) = \varepsilon(t) \cdot V(t)$$

$$\dot{E} = \dot{\varepsilon} V + \varepsilon \dot{V} = -p \dot{V}$$

$$\dot{\varepsilon} \cancel{V} = -(\varepsilon + p)\dot{V} = -(\varepsilon+p) \cancel{V} \cdot 3 \frac{\dot{a}}{a}$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p)}$$ „jednadžba fluida"

(ista i u Einsteinovoj teoriji!)

Gustoća energije pada i zbog razrjeđivanja i zbog vršenja rada protiv sile gravitacije.

Sad imamo dvije jednadžbe s tri nepoznanice: $a(t)$, $\varepsilon(t)$, $p(t)$.

Da bi kompletirali sustav trebamo znati kako tlak ovisi o gustoći energije:

$$\boxed{p = p(\varepsilon)}$$ „jednadžba stanja"

Sad imamo sve što nam treba (3 jednadžbe s 3 nepoznanice). Postupak:

1. Izbor jednadžbe stanja
2. rješavanje $\underbrace{\text{Friedmannove i jednadžbe fluida}}_{\text{„Friedmannove jednadžbe (plural)"}}$

No prije svega spomenimo i jednadžbu za $\ddot{a}$.
(U fizici smo navikli koristiti takve jednadžbe 2. reda poput $F = m\ddot{x}$.)

$$\dot{a}^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon a^2 - \frac{kc^2}{R_0^2} \quad \Big/ \frac{d}{dt}$$

$$2\cancel{\dot{a}}\ddot{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\left(\dot{\varepsilon}a^2 + \varepsilon 2a\dot{a}\right) = \frac{8\pi G}{3c^2}\Big(\underbrace{\underbrace{a^2(-3)\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon+p)}_{-3a\dot{a}(\varepsilon+p)} + 2\varepsilon a\dot{a}}_{a\cancel{\dot{a}}(-\varepsilon-3p)}\Big)$$

$$\boxed{\ddot{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p)} \quad \text{„jednadžba ubrzanja"}$$

Nećemo je baš koristiti. (cf vertikalni hitac: lakše je koristiti ZSE: $\frac{\cancel{m}v_0^2}{2} = \cancel{m}gh \Rightarrow h$ nego $mg = \dot{h}$ & v_0)

Ipak jedna opservacija:

- Ako je $p > -\frac{\varepsilon}{3}$, $\ddot{a} < 0$ i širenje usporava.
(Gravitacija se opire širenju.)

- Ako je $p < -\frac{\varepsilon}{3}$, $\ddot{a} > 0$ tj. širenje se ubrzava
(Imamo „antigravitacijsko" ponašanje; „tamna energija")

{ Ako znamo GTR: pogledati izvod Friedmannovih jednadžbi iz Einsteinove. }

Jednadžbe stanja

Rijetki nerelativistički plin (dobra aproksimacija za većinu kozmičke materije koja je u obliku atoma):

$$pV = N k_B T \qquad N - \text{broj čestica}, \quad \mu - \text{masa jedne čestice}$$

$$p = \frac{N}{V} k_B T = \frac{1}{\mu} \underbrace{\frac{\overset{m}{N \cdot \mu}}{V}}_{\rho \approx \frac{\varepsilon}{c^2}} k_B T = \frac{\varepsilon}{\mu c^2} k_B T = \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\langle v^2 \rangle}{3}$$

S druge strane: $\langle E_K \rangle = \dfrac{\mu \langle v^2 \rangle}{2} = \dfrac{3}{2} k_B T$

I za druge kozmičke fluide (zračenje, tamna energija, ...) imat ćemo

$$\boxed{p = \underset{\text{broj}}{w}\, \varepsilon} \qquad \text{(jedn. stanja kozmičkih fluida)}$$

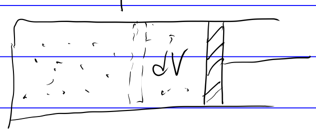
Za NR plin $\quad w = \dfrac{\langle v^2 \rangle}{3c^2} \approx 0$

Za zračenje $\quad w = \dfrac{1}{3} \quad$ (cf. DZ03 ili poznate formule iz statistike; $\langle v^2 \rangle = c^2$ u gornjem izvodu nije korektno)

Tamna energija

Ukoliko vakuum ima konstantnu pozitivnu gustoću energije ε_Λ.

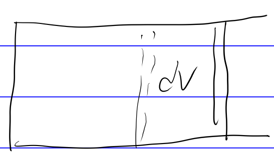
Usporedba: Obični plin



$dE = -p\,dV, \quad p > 0$

$dV > 0 \Rightarrow dE < 0$

Vakuumske energije:



$$\left.\begin{array}{l} dE = \varepsilon_\Lambda \cdot dV \\ dV > 0 \Rightarrow dE > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} p = -\varepsilon_\Lambda \\ w = -1 \end{array}} < 0$$

Ako znamo OTR:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & p & & \\ & & p & \\ & & & p \end{pmatrix} \Rightarrow T^{\Lambda}_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \varepsilon & & & \\ & -\varepsilon & & \\ & & -\varepsilon & \\ & & & -\varepsilon \end{pmatrix} = \varepsilon g_{\mu\nu}$$

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = \underbrace{\frac{8\pi G}{c^4}}_{\equiv \Lambda} \Big(\underbrace{T^{\Lambda}_{\mu\nu}}_{\varepsilon_\Lambda g_{\mu\nu}} + T^{\text{ostalo}}_{\mu\nu} \Big)$$

$$\Lambda = \frac{8\pi G}{c^4} \varepsilon_\Lambda = \Lambda^{[\text{Rydberg}]} / c^2$$

$$\Rightarrow R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T^{\text{ostalo}}_{\mu\nu}$$

„kozmološka konstanta" (Einstein)

Očekivanje

$$\Lambda \sim \frac{1}{\ell_P^2} = \frac{1}{(10^{-35} m)^2} \sim 10^{70} m^{-2} \qquad \left(\Rightarrow \varepsilon_\Lambda \sim 10^{132} \, eV/m^3 \right)$$

Dugo se vjerovalo da je iz nepoznatog razloga $\Lambda = 0$

Najnovija mjerenja SNIa + CMB:

$$\Lambda = 1.11 \times 10^{-52} \, m^{-2}$$

Pogreška od 122 reda veličine!

(„Najgore predviđanje u povijesti fizike!")

Modeli svemira

Rješavamo tri temeljne jednadžbe

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\,\varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2} \qquad \text{(Friedmannova j.)}$$

$$\dot\varepsilon = -3\frac{\dot a}{a}(\varepsilon + p) \qquad \text{(j. fluida)}$$

$$p = w\,\varrho \qquad \text{(j. stanja)}$$

$$w = \begin{cases} 1/3 & \text{zračenje} \\ 0 & \text{NR tvar} \\ -1 & \Lambda \end{cases}$$

Naš svemir je kombinacija

$$\varepsilon = \underset{\text{(matter)}}{\varepsilon_m} + \underset{\text{(radiation)}}{\varepsilon_r} + \varepsilon_\Lambda = \sum_i \varepsilon_i$$

gdje (zasad) zanemarujemo interakcije i transfer energije među komponentama (npr. zvijezde: $\varepsilon_m \to \varepsilon_r$).

$$\Rightarrow \quad p = \sum_i w_i \varepsilon_i$$

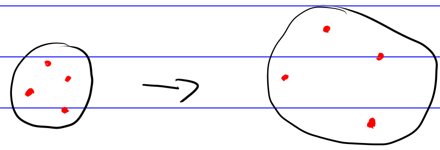
Zbog takve linearnosti svaka komponenta zadovoljava j. kontinuiteta ponaosob (pojedini članovi u jednadžbi su neovisni)

$$\dot\varepsilon_i = -\frac{3\dot a}{a}(\varepsilon_i + \underbrace{p_i}_{w_i\varepsilon_i}) = -\frac{3\dot a}{a}\varepsilon_i(1+w_i)$$

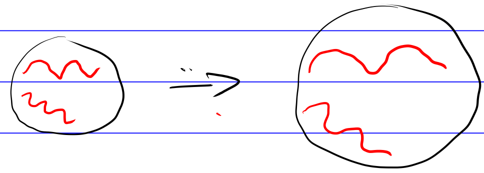
$$\frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} = -3\frac{da}{a}(1+w_i) \qquad /\int$$

$$\boxed{\varepsilon_i = \varepsilon_{i,0}\, e^{-3(1+w_i)}}$$

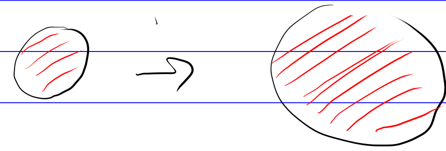
$w_m = 0 \Rightarrow \varepsilon_m = \dfrac{\varepsilon_{m,0}}{a^3}$ $\quad (E_{\check{c}estice} \simeq mc^2)$



$w_r = \frac{1}{3} \Rightarrow \varepsilon_r = \dfrac{\varepsilon_{r,0}}{a^4}$ $\quad (E_{foton} = pc = hc/\lambda)$



$w_\Lambda = -1 \Rightarrow \varepsilon_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda,0} = \text{const}$



Koliki su $\varepsilon_{i,0}$? ← početni uvjeti za evoluciju diferencijalnih jednadžbi unatrag

$t = t_0 \to t = 0$

$\varepsilon_{CMB,0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Planckov zakon} \\ \text{zračenja,} \\ \text{kao DZ 01} \end{array} \right\} = 4.17 \times 10^{-14}\ \mathrm{J/m^3} = 2.6 \times 10^{-4}\ \mathrm{GeV/m^3}$

odnosno $\Omega_{CMB,0} \equiv \dfrac{\varepsilon_{CMB,0}}{\varepsilon_{c,0}} = 5.35 \times 10^{-5}$

$\{5\ \text{protona}/m^3 \approx 5\ \mathrm{GeV}/m^3\}$

$\Omega_{zvijezde\ etc} \lesssim 0.1\ \Omega_{CMB}$ (vježbe) ← zanemarujemo

U „zračenje" spadaju i neutrini dok god su relativistički (vjerojatno veći dio vremena):

$\Omega_{\nu,0} \simeq 0.68\ \Omega_{CMB,0}$ (pozadinski neutrini, izračunat ćemo kasnije)

Radit ćemo s

$$\boxed{\begin{aligned} \Omega_{r,0} &= \Omega_{CMB,0} + \Omega_{\nu,0} = 9.0 \times 10^{-5} \\ \Omega_{m,0} &= 0.31 \\ \Omega_{\Lambda,0} &= 0.69 \\ \Omega_0 &= \sum_i \Omega_{i,0} = 1 \end{aligned}}$$

Referentni model našeg svemira („benchmark")

$$\frac{\Omega_{\Lambda,0}}{\Omega_{m,0}} = \frac{0.69}{0.31} = 2.23$$, ali idući u prošlost $\varepsilon_m = \frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3}$

raste jer $a(t)$ pada pa ćemo u

nekom trenutku $t = t_{m\Lambda}$ imati $\Omega_\Lambda = \Omega_m \Leftrightarrow \varepsilon_\Lambda = \varepsilon_m$

$$\frac{\varepsilon_{m,0}}{a^3_{m\Lambda}} = \varepsilon_{\Lambda,0} \Rightarrow \boxed{a_{m\Lambda} = \left(\frac{\varepsilon_{m,0}}{\varepsilon_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = 0.77}$$

Slično u $t = t_{rm}$ je bilo $\Omega_r = \Omega_m$.
(U literaturi to često zovu t_{eq} = „equality".)

$$\frac{\varepsilon_{m,0}}{\cancel{a^3_{rm}}} = \frac{\varepsilon_{r,0}}{a_{rm}^{\cancel{4}}} \Rightarrow \boxed{a_{rm} = \frac{\varepsilon_{r,0}}{\varepsilon_{m,0}} = \frac{9\times10^{-5}}{0.31} = 2.9\times10^{-4} = \frac{1}{3400}}$$

Općenito, zbog $\varepsilon_i \propto a^{-3(1+w_i)}$ u ranom svemiru $(a \ll 1)$ dominira komponenta s najvećim w_i (zračenje), a u kasnom svemiru $(a \gg 1)$ ona s najmanjim (Λ)

Od velikog praska $(t=0)$ do danas svemir se neprestano širi pa je monotona funkcija $a(t)$ dobra zamjena za vrijeme, a kako smo pokazali

$$1+z = \frac{1}{a} \qquad \text{(kozmološki crveni pomak)}$$

pa je z (koji se izravno lako mjeri) isto dobra zamjena.

Npr. $z_{rm} = \frac{1}{a_{rm}} - 1 = 3400$

Veza s vremenom t je komplicirana i slijedi iz Friedmannove jednadžbe.

Idemo u analizu toga na jednostavnijim modelima.

Prazni svemir $\quad \varepsilon_i = 0 \quad \forall i$

$$\frac{\dot a^2}{\cancel{a^2}} = 0 - \frac{kc^2}{R_0^2 \cancel{a^2}}$$

1. mogućnost $\quad k=0, \ \dot a = 0 \quad$ (statični ravni svemir)

biramo u skladu s našim svemirom koji se širi

2. mogućnost $\quad k=-1, \quad \dot a = \pm \frac{c}{R_0}$

$$\frac{da}{dt} = \frac{c}{R_0} \quad \Rightarrow \quad a(t) = \frac{c}{R_0} t = \frac{t}{t_0}$$

$$\left\{ a(t=t_0) = 1 = \frac{c}{R_0} t_0 \Rightarrow \frac{c}{R_0} = \frac{1}{t_0} \right\}$$

$$H(t) = \frac{\dot a}{a} = \frac{1/t_0}{t/t_0} = \frac{1}{t}, \quad H_0 = \frac{1}{t_0}, \quad a(t) = H_0 t$$

Linearna ekspanzija s vremenom; nema gravitacije da uspori.

Zbog te linearnosti starost svemira $t_0 = \frac{1}{H_0}$ = Hubbleovo vrijeme

(tzv. Milneov svemir)

Udaljenost do galaksije (moraju biti jako rijetke; $\varepsilon_m \approx 0$) s crvenim pomakom z?

Prava udaljenost danas je jednaka sugibajućoj koordinati r

$$d_p = \int_0^r \underbrace{a(t_0)}_{=1} dr = r ,$$

Putanja svjetla određena je s RW metrikom

$$ds^2 = 0 = c^2 dt^2 - a(t)^2 (dr^2 + r^2 \underbrace{d\Omega^2}_{=0})$$

$$\Rightarrow dr = \frac{c}{a(t)} dt$$

$\Downarrow$ t_0 ← opservacija = sada

$$\boxed{d_p = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}}$$

t_e ← emisija

Za Milneov svemir

$$d_p = c \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{H_0 t} = \frac{c}{H_0} \ln \frac{t_0}{\underbrace{t_e}_{1/a(t_e) = 1+z}} = \frac{c}{H_0} \ln(1+z)$$

Za male z, $\ln(1+z) \approx z$; imamo Hubbleov zakon: $z = \frac{H_0}{c} d_p$.

(zadnji) veliki prasak $\equiv$ $\boxed{a=0 \quad \text{tj.} \quad z=\infty}$ (definicija)

def. starost svemira = vrijeme od velikog praska = t_0

$$a(t=0)=0 \longrightarrow a(t=t_0)=1$$

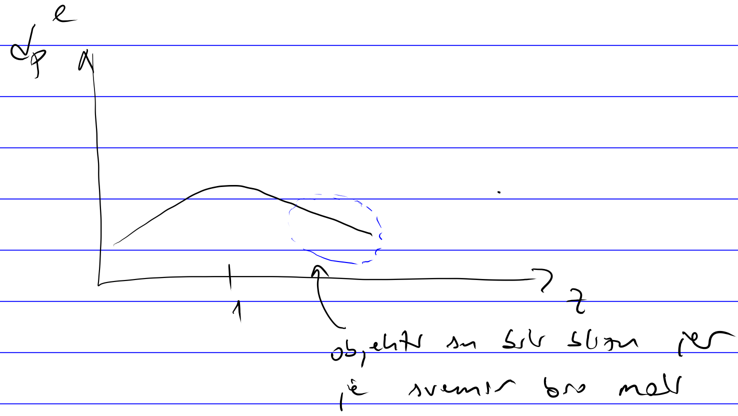
$$d_p = \frac{c}{H_0} \ln(1+z)$$

objekti s $z \gg 1$ su puno dalje od Hubbleovog radijusa c/H_0

Koja je bila prava udaljenost d_p^e u trenutku emisije svjetlosti galaksije s crvenim pomakom z?

$$a_e = \frac{1}{1+z}$$

$$\frac{d_p^e}{d_p} = \frac{a_e}{a(t_0)=1} \Rightarrow d_p^e = \frac{d_p}{1+z} = \frac{c}{H_0} \underbrace{\frac{\ln(1+z)}{1+z}}_{\text{max at } z=e-1=1.718}$$



Općeniti svemir

$$\frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\,\varepsilon - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

$$\varepsilon = \sum_i \varepsilon_i = \sum_i \underbrace{\varepsilon_{i,0}}_{\Omega_{i,0}\,\varepsilon_{c,0}} a^{-3(1+w_i)} \quad , \quad \varepsilon_{c,0} = \frac{3c^2}{8\pi G} H_0^2$$

$$= H_0^2 \sum_i \Omega_{i,0}\, a^{-3(1+w_i)} - \frac{kc^2}{R_0^2 a^2}$$

$$1-\Omega(t) = \frac{-kc^2}{R_0^2\, a(t)^2\, H(t)^2} \xrightarrow{t=t_0} -\frac{kc^2}{R_0^2} = H_0^2 \underbrace{(1-\Omega_0)}_{\equiv \Omega_K}$$

u nekim knjigama „omega – curvature"

$$\boxed{\frac{\dot a^2}{a^2} = H(t)^2 = H_0^2\left(\sum_i \Omega_{i,0}\, a^{-3(1+w_i)} + (1-\Omega_0)\, a^{-2}\right)}$$

$\sqrt{\ }$

$$\dot a = H_0 a \sqrt{\sum_i \Omega_{i,0}\, a^{-3(1+w_i)} + (1-\Omega_0) a^{-2}}$$

$$\boxed{dt = \frac{da}{H_0 a\sqrt{\Omega_{r,0}\, a^{-4} + \Omega_{m,0}\, a^{-3} + \Omega_{\Lambda,0} + (1-\Omega_0)\, a^{-2}}}}$$

– numeričkom integracijom možemo odrediti npr. starost svemira za proizvoljni sastav.

– za jednostavnije sastave moguća je i analitička integracija.

Jednokomponentni ravni svemir: $\Omega_{i,0} = \Omega_0 = 1$

$\uparrow$ da bi bilo $k=0$

$$dt = \frac{da}{H_0 a \sqrt{\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{\Omega_{i,0}}\, a^{-3(1+\underset{\substack{\shortparallel \\ w}}{w_i})}}} = \frac{da}{H_0}\, a^{+\frac{3}{2}(1+w)-1} \quad \Big/ \int_0^t$$

$$t = \frac{1}{H_0}\frac{1}{\frac{3}{2}(1+w)}\, a^{\frac{3}{2}(1+w)} \quad \leftarrow \text{bilo koji } t$$

$t = t_0$ (danas), $a(t_0)=1$, pa je starost svemira

$$t_0 = \frac{1}{H_0}\frac{2}{3(1+w)} = \begin{cases} w=0 & t_0 = \frac{2}{3H_0} < t_{Hubble} = \frac{1}{H_0} \\ w<-\frac{1}{3} & t_0 > t_{Hubble} = \frac{1}{H_0} \end{cases}$$

$\swarrow$

Λ ili kvintesencija čine svemir starijim za dati H_0 pa su se i upotrebljavali za rješavanje problema starih zvijezda

$\Downarrow$

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} = \frac{1}{1+z}$$ crveni pomak galaksije čije svjetlo je emitirano u trenutku t

Prava udaljenost d_p do promatrane galaksije sada:

$$d_p(t_0) = \int_r^0 dr = c\int_{t_e}^{t_0}\frac{dt}{a(t)} \quad ; \quad \text{zamjena varijable } t \to z$$

$$(1+z) = (t/t_0)^{-2/3(1+w)}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{2}{3(1+w)}\underbrace{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-\frac{2}{3(1+w)}-1}}_{\left(\frac{1}{1+z}\right)^{\frac{3(1+w)}{2}\left(-\frac{2}{3(1+w)}-1\right)}}\cdot\frac{1}{t_0}$$

$$\underbrace{\frac{3(1+w)}{2}\left(-\frac{2}{3(1+w)}-1\right)}_{-1-\frac{3(1+w)}{2}}$$

$$\boxed{d_p = c\,t_0\int_z^0 \frac{(1+z)\,dz}{-\frac{2}{3(1+w)}\left(\frac{1}{1+z}\right)^{-1-3(1+w)/2}}} = -\frac{c}{H_0}\int_z^0 dz\,(1+z)^{-\frac{3(1+w)}{2}} = \left\{z' = 1+z\right\}$$

$$= -\frac{c}{H_0}\int_{1+z}^1 dz'\, z'^{-3(1+w)/2} = -\frac{c}{H_0}\frac{1}{-\frac{1}{2}-\frac{3w}{2}}\, z'^{\frac{-1-3w}{2}}\Big|_{1+z}^{1} = \boxed{\frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3w}\left(1-(1+z)^{-\frac{(1+3w)}{2}}\right)}$$

(čestični) horizont = pozicija s koje svjetlo emitirano u $t=0$ sada stiže do promatrača.

= granica sada vidljivog svemira

horizont događaja = pozicija s koje svjetlo emitirano sada (u t_0) stiže do promatrača u $t=\infty$

= granica sadašnjeg svemira iz kojeg više vidljivog

Prava udaljenost do čestičnog horizonta:

$$d_{p-hor} = c\int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = \left\{ z \to \infty \right\} = \begin{cases} w \leq -\frac{1}{3} & \to d_{p-hor} = \infty \\ w > -\frac{1}{3} & \to d_{p-hor} = \frac{c}{H_0}\frac{2}{1+3w} \end{cases}$$

$$\left\{ \text{za hor. događaja: } \int_{t_0}^{\infty} \right\}$$

Kad izračunamo $a(t)$, ostale informacije dobivaju se lagano. Npr.

$$\varepsilon_i(t) = \varepsilon_{i,0}\, a^{-3(1+w_i)} = \varepsilon_{i,0}\left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w_i)}}\right)^{-3(1+w_i)} = \varepsilon_{i,0}\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-2}$$

(neovisno o w!)

Dvokomponentni svemir: $\Omega_{m,0} = \Omega_0 \neq 1 \Rightarrow (1-\Omega_0) \neq 0$

1. materija + 2. zakrivljenost

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \frac{\Omega_0}{a^3} + \frac{(1-\Omega_0)}{a^2}$$

za $\Omega_0 < 1$ RHS > 0 uvijek $\to$ beskonačno širenje

za $\Omega_0 > 1$ $H(t) = 0$ u trenutku kad je $a = a_{max}$:

$$\frac{\Omega_0}{a_{max}^{\cancel{3}}} + \frac{(1-\Omega_0)}{\cancel{a_{max}^2}} \Rightarrow a_{max} = \frac{\Omega_0}{\Omega_0 - 1}$$

Nakon toga: sažimanje.

– Najpopularniji model 2. polovice XX. stoljeća

Dvokomponentni svemir: $\Omega_{m,0} + \Omega_{\Lambda,0} = 1$

1. materija 2. Λ

– trenutni model našeg svemira

$$dt = \frac{da}{H_0 a \sqrt{\underbrace{\Omega_{m,0}}_{(1-\Omega_{m,0})a_{m\Lambda}^3} a^{-3} + \underbrace{(1-\Omega_{m,0})}_{\Omega_\Lambda}}} = \left\{ a_{m\Lambda} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{\Omega_{\Lambda,0}}\right)^{1/3} = \left(\frac{\Omega_{m,0}}{1-\Omega_{m,0}}\right)^{1/3} \right\}$$

$$t = \frac{1}{H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \underbrace{\int_0^{a(t)} \frac{da}{a\sqrt{1+a_{m\Lambda}^3/a^3}}}$$

sympy: $\frac{2}{3} \operatorname{arcsinh}\left(\frac{a}{a_{m\Lambda}}\right)^{3/2}$

Starost svemira:

$$\boxed{t_0} = \frac{2}{3H_0\sqrt{1-\Omega_{m,0}}} \operatorname{arcsinh}\sqrt{\frac{1-\Omega_{m,0}}{\Omega_{m,0}}} = \left\{ \Omega_{m,0} = 0.31 \right\}$$

$$= 0.955 \cdot \frac{1}{H_0} = 0.955 \cdot \underbrace{(\text{Hubbleovo vrijeme})}_{14.4 \text{ Ga}} = \boxed{13.8 \text{ Ga}}$$

Referentni model – reArme

$H_0 = 68 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$

$\Omega_{r,0} = 9.0 \times 10^{-5}$

$\Omega_{m,0} = 0.31$

$\Omega_{\Lambda,0} = 0.69$

$a_0 = 1$	$z_0 = 0$	$t_0 = 13.8$ Ga
$a_{m\Lambda} = 0.77$	$z_{m\Lambda} = 0.3$	$t_{m\Lambda} = 10.2$ Ga
$a_{rm} = \frac{1}{3400}$	$z_{rm} = 3400$	$t_{rm} = 50$ ka

iz gornje formule

ne može iz gornje formule

Mjerenje kozmoloških parametara

Ako znamo $\varepsilon_{i,0}$ (ili $\Omega_{i,0}$) Friedmannove j. nam u načelu daju $a(t)$:

$$\left(\frac{\dot a}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_i - \underbrace{\boxed{\frac{kc^2}{R_0^2 a^2}}}_{H_0^2(1-\Omega_0)}$$

U praksi idemo više obrnuto: mjerimo $a(t)$ pa određujemo Ω_i.
Očekujemo da je $a(t)$ pitoma funkcija:

$$a(t) = \underbrace{a(t_0)}_{=1} + \underbrace{\left.\frac{da}{dt}\right|_{t=t_0}}_{=H_0}(t-t_0) + \underbrace{\left.\frac{d^2a}{dt^2}\right|_{t=t_0}}_{\equiv -H_0^2 q_0}\frac{1}{2}(t-t_0)^2$$

$$H_0 = \left.\frac{\dot a}{a}\right|_{t=0}$$

$$q_0 \equiv -\left(\frac{\ddot a}{aH^2}\right)_{t=t_0}$$ – parametar deceleracije (očekivalo se $q_0 > 0$, ali danas mjerimo $q_0 \approx -0.5$)

H_0 je poput početne brzine i mora se izmjeriti, ali deceleraciju q_0 možemo odrediti za dani model (sastav) svemira iz Friedmannovih j., zapravo iz j. ubrzanja:

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}\sum_i \varepsilon_i(1+3w_i) \qquad \Big/ \cdot \frac{-1}{H^2}$$

$$-\frac{\ddot a}{aH^2} = +\frac{4\pi G}{3c^2H^2}\sum_i \varepsilon_i(1+3w_i)$$

$$t\to t_0: \quad \underbrace{-\frac{\ddot a}{aH^2}}_{q_0} = \underbrace{+\frac{4\pi G}{3c^2H^2}}_{=\frac{1}{2\varepsilon_{c,0}}}\sum_i \varepsilon_i(1+3w_i)$$

$$\boxed{q_0 = \frac{1}{2}\sum_i \Omega_{i,0}(1+3w_i)}$$

≥ 0 za $w_i \geq -1/3$
$= -0.53$ za naš referentni model ($\Omega_m = 0.31$, $\Omega_\Lambda = 0.69$)

Ponovimo, ideja je mjeriti q_0 i tako saznati nešto o $\Omega_{i,0}$

Za to nije podesno koristiti izravno gornji Taylorov red jer ne mjerimo $(t-t_0)$ nego ćemo $a(t)$ relaciju pretvoriti u $d_p(z)$:

$$d_p = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$$

$$\frac{1}{a(t)} = 1 - H_0(t-t_0) + \underbrace{\frac{1}{2} q_0 H_0^2 (t-t_0)^2 + H_0^2(t-t_0)^2}_{\left(1+\frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t-t_0)^2}$$

$$d_p = c\int_{t_e}^{t_0} dt\,\left(1 - H_0(t-t_0) + \dots\right) = c(t_0-t_e) + \frac{c}{2}H_0(t_0-t_e)^2 + \dots$$

s druge strane, $1+z = \frac{1}{a(t_e)}$ tj.

$$z = -H_0(t_e-t_0) + \underbrace{\left(1+\frac{q_0}{2}\right)H_0^2(t_e-t_0)^2}_{\approx z^2 + O((t_e-t_0)^3)}$$ (iz ove iste jednadžbe iterativno)

$$\Downarrow$$

$$t_0 - t_e = \frac{1}{H_0}\left(z - \left(1+\frac{q_0}{2}\right)z^2\right)$$

$$\Downarrow$$

$$d_p = \frac{c}{H_0}\left(z - \left(1+\frac{q_0}{2}\right)z^2\right) + \frac{c\cancel{H_0}}{2}\left(\frac{z^2}{\cancel{H_0^2}} + O(z^3)\right)$$

$$\boxed{d_p = \frac{c}{H_0}\, z\left(1 - \frac{1+q_0}{2}\, z\right)}$$

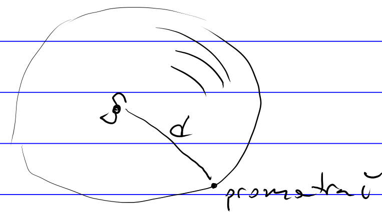
Ako želimo vidjeti odstupanje ~10% od linearnog Hubbleovog zakona u našem svemiru ($q_0 \approx -0.5$), $0.25z \gtrsim 0.1 \Rightarrow z \gtrsim 0.4$

No ni d_p nije izravno mjerljiv (to je udaljenost koju bismo izmjerili u statičnom svemiru) pa uvodimo alternativne „udaljenosti":

Luminozitetna udaljenost

Ako objekt ima sjaj L [W] (snaga zračenja) onda na udaljenosti d u statičkom euklidskom svemiru mjerimo tok svjetlosti

$$f = \frac{L}{4\pi d^2} \quad [W/m^2]$$



No, u realnom svemiru imamo tri efekta koja mijenjaju tok f:

1. U zakrivljenom svemiru opisanom RW metrikom
$$ds^2 = c^2 dt^2 - a(t)^2 \left(dr^2 + S_k(r)^2 d\Omega^2\right)$$
površina sfere $r = \text{const}$ je $4\pi a(t)^2 S_k(r)^2$.
(Sfera (poput gornje) oko izvora je ista kao sfera oko nas koja prolazi kroz izvor.)
pa L treba dijeliti s $4\pi S_k(r)^2$ u t_0 $(a(t_0)=1)$.

2. Kozmička dilatacija vremena: ako izvor emitira fotone svakih δt_e mi ćemo ih detektirati svakih
$$\delta t_0 = (1+z)\,\delta t_e$$

3. Svaki foton trpi crveni pomak $(1+z)$ pa mu se za isti faktor smanjuje energija

1 & 2 & 3 : $$f = \frac{L}{4\pi S_k(r)^2 (1+z)^2}$$ (ovo se komplicira ako f nije bolometrički → pomak pojasa)

Definiramo luminozitetnu udaljenost d_L kao onu koja bi dala tok f kao u statičkom euklidskom svemiru

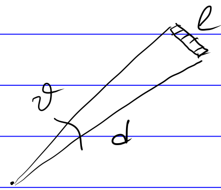
$$f = \frac{L}{4\pi d_L^2} \Rightarrow d_L = S_k(r)(1+z)$$

Naš svemir je ravan $(k=0)$ ili barem $r_{\text{izvora koje mjerimo}} \ll R_0$

$$\Rightarrow S_k(r) \approx r = d_p(t_0) \quad + \quad d_L = d_p(t_0)(1+z) = \frac{c}{H_0} z\left(1 - \frac{1+q_0}{2} z\right)(1+z)$$

$$\boxed{d_L \simeq \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right)}$$

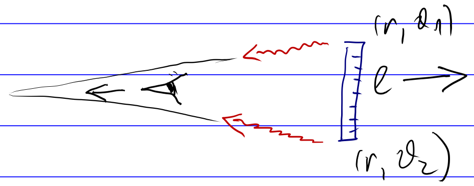
Udaljenost kutnog promjera



$$d = \frac{l}{\vartheta}$$

No, stvar se opet modificira u RW metrici

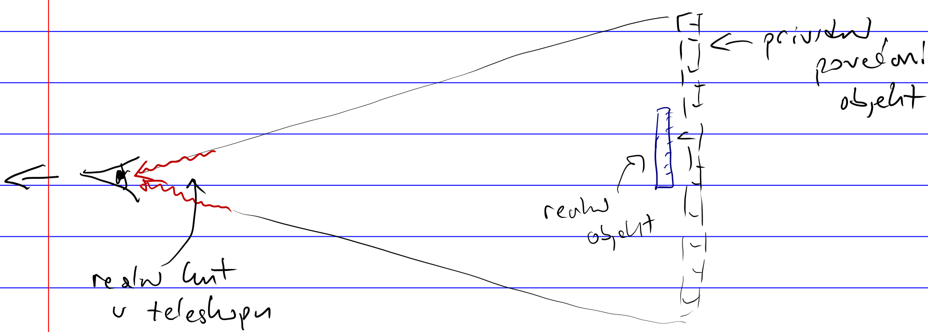
$$dl^2 = a(t)^2 \left(\underbrace{dr^2}_{=0} + S_k(r)^2 \left(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \underbrace{d\varphi^2}_{=0}\right)\right)$$



$$l = a(t_e) S_k(r)\, d\vartheta$$

$$\delta\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1 = \text{const.}$$

$\uparrow$ sugibajuće koordinate



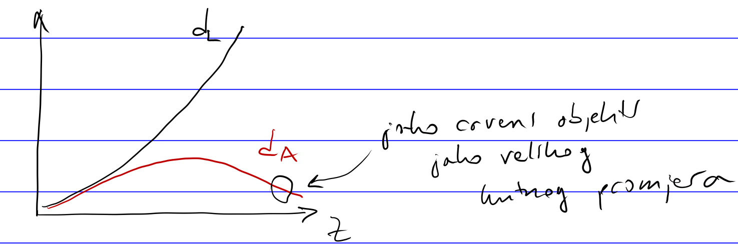
je za $\frac{1}{a(t_e)} = 1+z$ veći nego pri emisiji

Definiramo udaljenost kutnog promjera d_A:

$$d_A \equiv \frac{l}{\delta\vartheta} = a(t_e) S_k(r) = \frac{S_k(r)}{1+z} \simeq \frac{d_p(t_0)}{1+z}.$$

tj. $$\boxed{d_L = d_p(t_0)(1+z) = d_A(1+z)^2}$$

$$d_A = \frac{c}{H_0} z\left(1 - \frac{(1+q_0)}{2} z\right)\frac{1}{1+z} = \frac{c}{H_0} z\left(1 - \frac{3+q_0}{2} z\right)$$



d_A je slabo koristan za galaksije, ali jest za CMB anizotropije.

Magnitude i modul udaljenosti svjetlosnog izvora

Hiparhova klasifikacija zvijezda po (opaženom) sjaju:

$$\text{magnitude} \quad m = \begin{cases} -1.5 & \text{Sirius} \\ 0 & \text{Vega} \\ 6 & \text{najtamnije zvijezde vidljive golim okom} \end{cases}$$

Oko ima logaritamsku osjetljivost i Hiparhova skala je kasnije precizirana:

ukupni tok svjetla (sve frekvencije)

$$m \equiv -2.5 \log_{10} \frac{f}{f_x} \qquad f_x = 2.53 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^2}$$

(To je tzv bolometrička magnitude $m = m_{bol}$. Astronomi koriste i pojaseve: m_B (blue), m_V (visual), ...)

Apsolutna magnitude $M \overset{\text{def.}}{=}$ prividna mag. na $d_L = 10$ pc

$$m(d_L) = -2.5 \log_{10} \frac{L/4\pi d_L^2}{f_x} = 5 \log_{10} \frac{d_L}{\sqrt{L/4\pi f_x}}$$

$$M = m(10\,\mathrm{pc}) = 5 \log_{10} \frac{10\,\mathrm{pc}}{\sqrt{L/4\pi f_x}} \cdot \frac{d_L}{d_L} \cdot \frac{\mathrm{Mpc}}{\mathrm{Mpc}} = m - 5 \log_{10} \frac{d_L}{\mathrm{Mpc}} - 25$$

Modul udaljenosti $\mu \equiv m - M = 5 \log_{10} \frac{d_L}{\mathrm{Mpc}} + 25$

(Npr. $\mu_{LMC} = 5 \log_{10} 0.05 + 25 = 18.5$)

large Magellanic cloud, na 50 kpc

$$d_L = \frac{c}{H_0} z \left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right)$$

$$\mu = -5 \log_{10} \frac{H_0 \cdot \mathrm{Mpc}}{c} + 5 \log_{10} z + \underbrace{\underbrace{5 \log_{10}}_{\underbrace{\log_{10} e}_{0.434} \cdot \ln} \underbrace{\left(1 + \frac{1-q_0}{2} z\right)}_{\approx \frac{1-q_0}{2} z}}_{1.086(1-q_0) z} + 25$$

Fita se μ vs $\log z$ za male z i određuje H_0

Standardne svijeće i ljestvica kozmičkih udaljenosti

Da bi odredili μ trebamo standardne svijeće poznatog apsolutnog sjaja M. Najvažnije standardne svijeće

1. cefeide : zvijezde čiji period pulsacije sjaja P ovisi o apsolutnom sjaju

$$M = a \log P + b \qquad \text{(P-L relacija)}$$

(Ovo se može razumjeti – veća zvijezda sporije pulsira – ali a i b se ne mogu izračunati nego se mjere.)

2. supernove SN Ia : nastaju nakupljanjem materije u dvojnom sustavu na bijelom patuljku blizu tzv. Chandrasekharove granice. Kad se granica pređe dolazi do eksplozije s skoro uvijek istim $M \simeq -19.2$.
(Može se računati, ali mjerenja su još uvijek bolja.)

U upotrebi je bilo i jest dvadesetak metoda određivanja apsolutnog sjaja/apsolutne udaljenosti. Jedna moderna ljestvica mjerenja udaljenosti jest:

1. Mjerenje 1 AU radarskim mjerenjem udaljenosti Marsa i korištenjem Newtonovih zakona

2. Mjerenje paralakse bliskih zvijezda (što daje apsolutnu udaljenost poznavajući 1 AU). Sateliti Hipparcos i Hubble su omogućili da se ovom metodom ide do ~300 pc.

3. Mjerenje sjaja i perioda bliskih cefeida u našoj galaksiji kojima možemo odrediti udaljenost paralaksom
→ kalibracija P-L relacije

4. Mjerenje apsolutnog sjaja supernovih SN Ia koje eksplodiraju u galaksijama u kojima vidimo i cefeide
(pa im iz P-L relacije znamo udaljenost)

5. Mjerenje dalekih supernovih SN Ia i određivanje kozmoloških parametara

1.
Mjerenje H_0

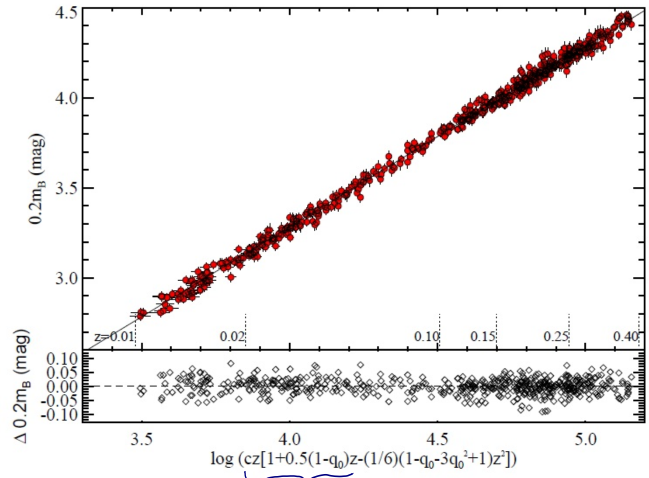
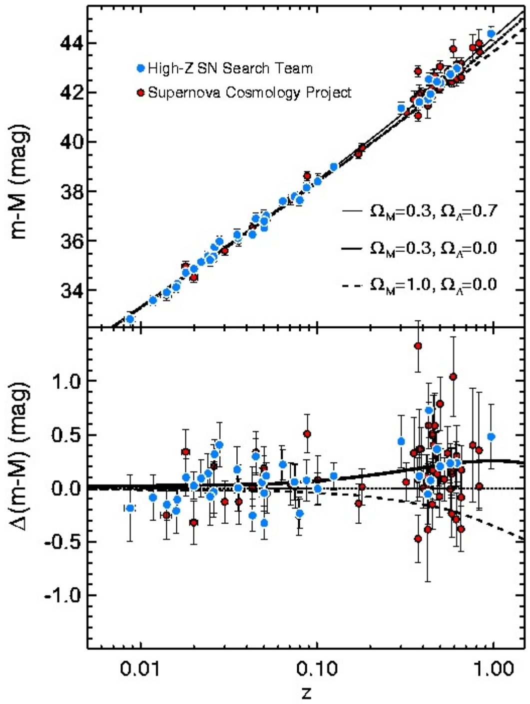


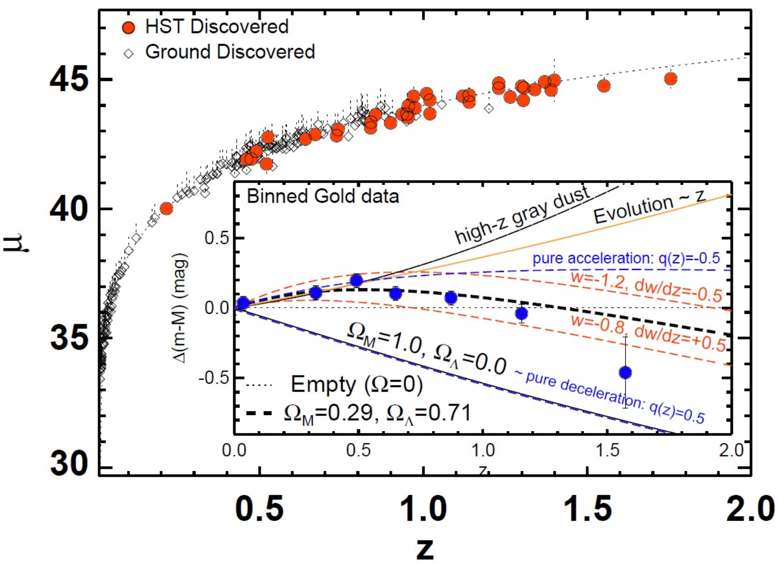
Fig. 8.— Hubble diagram of more than 600 SNe Ia at $0.01 < z < 0.4$ in units of $\log cz$.

$= \log(H_0 d_L)$

$\Rightarrow H_0 = 73.24 \pm 1.74$ km/s/Mpc

2. Dokazivanje Λ :

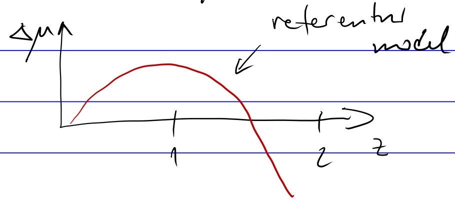




$a_{m\Lambda} = 0.77$

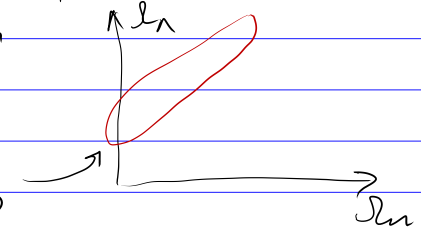
$\Rightarrow z_{m\Lambda} \sim 0.3$

Za $z \gg z_{m\Lambda}$ očekujemo deceleraciju



Tamna tvar

Vidjeli smo da SN Ia podaci ograničavaju samo kombinaciju $\Omega_\Lambda - \Omega_m$



Konzistentno i s $\Omega_m \approx 0$

Pogledajmo alternativne metode određivanja Ω_m i njegovih komponenata (zvijezde, tamna barionska tvar, tamna (nebarionska) tvar)

Vidljiva tvar: zvijezde

1. Mjerimo gustoću sjaja izvora svjetla (galaksije) koja je (uprosječeno)

$$j_V = 1.1 \times 10^8 \, L_{\odot,V}/Mpc^3$$

vidljivi dio spektra – držat ćemo se njega u ovom poglavlju

2. Procijenimo omjer mase prema svjetlu M/L za zvjezdanu populaciju

$$\Rightarrow \rho_{zvijezde} = \frac{M}{L}\Big|_{\substack{zvijezde \\ (prosjek)}} \cdot j_V$$

(Idemo tako zaobilazno jer je običaj i za druge vrste materije određivati M/L, a ne npr. ρ.)

Omjer $\frac{M}{L}$ se tradicionalno izražava u jedinicama

$$\frac{M_\odot}{L_\odot} = \frac{1.99 \times 10^{30}\ kg}{3.8 \times 10^{26}\ W}$$

Zvijezde su jako raznolike i

$$0.03 \frac{M_\odot}{L_\odot} \lesssim \frac{M}{L} \lesssim 2000 \frac{M_\odot}{L_\odot}$$

$M = 60 M_\odot$ (manje ih je i kraće žive)

Srednji $\frac{M}{L}\Big|_{zvijezde} \sim 4 \frac{M_\odot}{L_\odot}$

$$\Omega_{zvijezde,0} = \frac{\rho_{zvijezde,0}}{\rho_{c,0}} = \frac{\frac{M}{V}}{\rho_{c,0}} = \frac{\frac{M}{L}\cdot\frac{L}{V}}{\rho_{c,0}} = \frac{M/L}{\rho_{c,0}/\mathcal{L}_V} \qquad \frac{L}{V} = \mathcal{L}_V$$

$$\boxed{\frac{\rho_{c,0}}{\mathcal{L}_V} = \frac{9\times10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}}{1.1\times10^{8}\,L_{\odot,V}/\mathrm{Mpc}^3} = \frac{9\times10^{-27}\,\mathrm{kg\,m^{-3}}\cdot(3.09\times10^{16+6}\,\mathrm{m/Mpc})^3}{2\times10^{30}\,\mathrm{kg}/M_\odot\cdot1.1\times10^{8}\,L_{\odot V}/\mathrm{Mpc}^3}}$$

$$= \frac{0.9\cdot3.09^3}{2\cdot1.1}\cdot10^{\overbrace{-26+3\cdot22-30-8}^{2}}\,\frac{M_\odot}{L_\odot} \sim 1200\,\frac{M_\odot}{L_\odot}$$

$$\boxed{\Omega_{zvijezde,0} \approx \frac{4\,M_\odot/L_\odot}{1200\,M_\odot/L_\odot} \sim 0.003 \text{ tj. } 3‰}$$

Barionska tvar: sva tvar poznate prirode: atomi, ioni, elektroni (dominantna komponenta su protoni i neutroni - otud ime)

- planeti, kometi, asteroidi - zanemarivo (vidi Sunčev sustav: Sunce 99.9% mase)
- zvijezde - sad smo izračunali
- međugalaktički plin - preostao nakon formiranja zvijezda/galaksija
  - ionziran zračenjem prvih zvijezda (Pop III)
  - uglavnom vruć (10^5-10^8 K) i rijedak (nekoliko - nekoliko × 10-100 č/m^3)

- masa se može procijeniti iz intenziteta emitiranog X-zračenja: 10× više nego zvijezde! $\Rightarrow \Omega_b \sim 0.03$

Postoje preciznije indirektne metode:

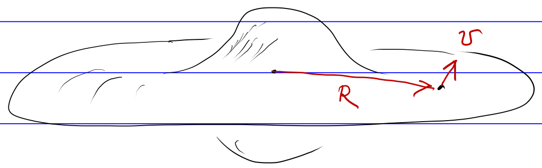
- prvotna nukleosinteza (količina stvorenog He ovisi o gustoći) $\rightarrow \Omega_b \sim 0.05$
- CMB anizotropije (barionska plazma titra za razliku od DM koja ne interagira s fotonima $\rightarrow \Omega_b = 0.048 \pm 0.003$

$$\Rightarrow \boxed{\Omega_b \simeq 0.05} \qquad \text{(barioni ukupno)}$$

Dosad navedene metode mjere Ω_b – materiju koja međudjeluje s elektromagnetskim zračenjem.

Za detekciju preostale tvari u svemiru oslanjamo se na njenu gravitaciju.

Tamna tvar u galaksijama



zvijezda na R od središta
– obodna brzina v

Izjednačavanjem gravitacijske i centrifugalne sile

$$a = \frac{v^2}{R} = \frac{G\,M(R)}{R^2}$$

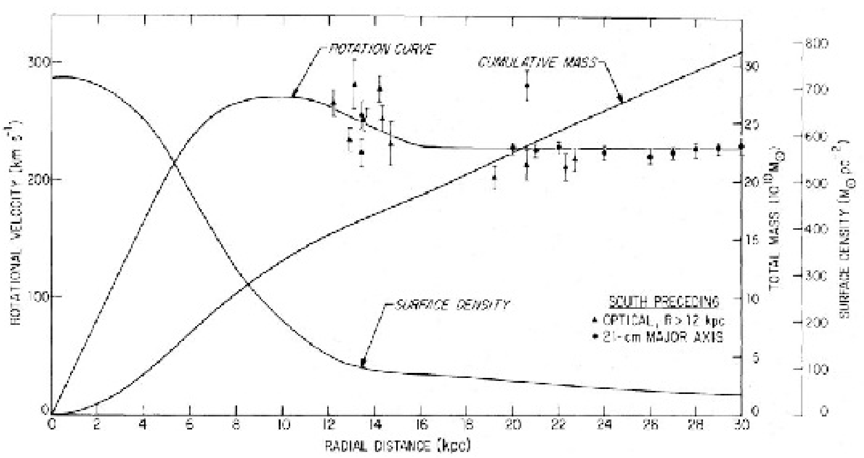
$M(R)$ – masa sadržana unutar radijusa R

– pretpostavljamo sferičnu raspodjelu što ne uvodi veliku grešku

$$v = \sqrt{\frac{GM(R)}{R}}$$

– većina barionske mase u svjetlećem dijelu galaksije je u zvijezdama, a ne u međuzvjezdanom plinu

M31:
Rubin & Ford
(v iz Dopplerovog pomaka)



ovdje bismo očekivali „keplerovsko" ponašanje $v \propto \frac{1}{\sqrt{R}}$

Naša galaksija:

Ako brzina ostaje konstantna do radijusa R, imamo

$$M(R) = \frac{v^2 R}{G} = \Big\} v = 235\ \mathrm{km/s} \Big\}$$

$$= \frac{(\underbrace{235\cdot 10^3}_{2.35\times10^5} \cancel{m}/\cancel{s})^2 \cdot \underbrace{100}_{10^5} \underbrace{\cancel{kpc}}_{3.09\times10^{16}\,\cancel{m}}}{6.67\times10^{-11}\ \cancel{m^3}/\mathrm{kg}\ \cancel{s^2}} \left(\frac{R}{100\ \mathrm{kpc}}\right) \frac{M_\odot}{2\times10^{30}\ \mathrm{kg}}$$

$$= \frac{2.35^2 \cdot 10^{10} \cdot 10^5 \cdot 3.09\times10^{16}}{6.67\times10^{-11} \cdot 2\times10^{30}} M_\odot \left(\frac{R}{100\ \mathrm{kpc}}\right)$$

$$= 1.28\times10^{\overbrace{10+5+16+11-30}^{12}}\ M_\odot \left(\frac{R}{100\ \mathrm{kpc}}\right)$$

$$L_{gal,V} = 2\times10^{10}\ L_{\odot,V}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{M}{L}\right|_{galaksija} = 64 \left(\frac{R}{100\ \mathrm{kpc}}\right) \frac{M_\odot}{L_{\odot,V}}$$

Rydn: R ide do 75 kpc $\quad (R_{Magellan} \sim 60\ \mathrm{kpc})$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\left.\frac{M}{L}\right|_{galaksija} \simeq 48\ \frac{M_\odot}{L_\odot}}$$

10x više nego zvijezde,
(a plina ima manje)

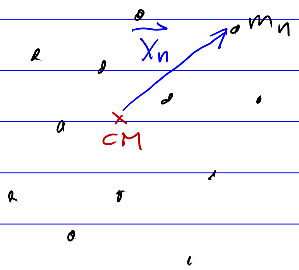
$\Downarrow$

DM!

Tamna tvar u jatima galaksija

eng. cluster = jato, grozd

Kao i Zwicky u 1930-ima, koristimo virijalni teorem za jato u Berenikinoj kosi (Coma cluster)



NR sustav točkastih masa

$$\underset{\text{nije sumirano}}{m_n \ddot{x}_n^i} = -\frac{\partial V}{\partial x_n^i} \qquad (*)$$

$$V = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{n,\ell \\ n\neq \ell}} \frac{G m_n m_\ell}{|\vec{x}_n - \vec{x}_\ell|} \qquad \text{(potencijal)}$$

$\frac{1}{2}$ kompenzira dvostruko brojanje

$$\sum_n x_n^i \Big/ (*) \Rightarrow \underbrace{-\sum_n x_n^i \frac{\partial V}{\partial x_n^i}}_{=V} = \sum_n m_n \Big(\underbrace{\vec{x}_n \cdot \ddot{\vec{x}}_n \overbrace{+ \dot{\vec{x}}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n}^{=0}}_{\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}(\vec{x}_n^2)} \; \underbrace{- \dot{\vec{x}}_n \cdot \dot{\vec{x}}_n}_{\vec{v}_n^2} \Big)$$

za $f(x)$ homogenu u x $\left(x \frac{d}{dx}\right)$ broji red/potenciju od x

$$\sum m_n \vec{x}_n^2 = I \qquad \text{(moment inercije)}$$

$$\frac{1}{2} \sum m_n \vec{v}_n^2 = T \qquad \text{(kinetička energija)}$$

$$\boxed{2T + V = \frac{1}{2} \ddot{I}}$$

Kad je sustav u statističkoj ravnoteži („virijaliziran"): $I = \text{const.}$

$$2T + V = 0$$

$$T = \frac{1}{2} \sum m_n \vec{v}_n^2 = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum m_n\right)}_{M} \underbrace{\frac{\sum m_n \vec{v}_n^2}{\sum m_n}}_{\langle v^2 \rangle} = \frac{1}{2} M \langle v^2 \rangle$$

$\langle v^2 \rangle$ – težinski usrednjena brzina

slično $V = -\frac{1}{2} G M^{\cancel{2}} \left\langle \frac{1}{r} \right\rangle = -2T = -\cancel{M} \langle v^2 \rangle$

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{2 \langle v^2 \rangle}{G \langle 1/r \rangle}}$$

$\langle v^2 \rangle$ određujemo iz disperzije brzina

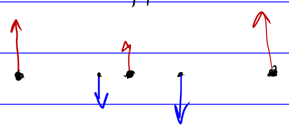
$$\sigma^2 = \langle (v - \underbrace{\langle v \rangle}_{=0 \text{ (u CM sustavu)}})^2 \rangle = \langle v^2 \rangle$$

Mjerimo Dopplerov efekt $\Rightarrow v_z^2$, no $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

$\uparrow \hat{z}$

pa iz izotropije:

$$\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_z \rangle^2$$



$\langle 1/r \rangle \sim 1/r_h$ $\quad r_h$ – radijus unutar kojeg je pola mase galaksije (half-mass radius)

Za jato u Berenikinoj kosi je izmjereno

$$\langle v^2 \rangle = 3 \cdot 880 \text{ km/s}$$

$$\langle 1/r \rangle \sim 1/r_h \sim 1{,}5 \text{ Mpc}$$

$$L = 5 \times 10^{12} L_\odot$$

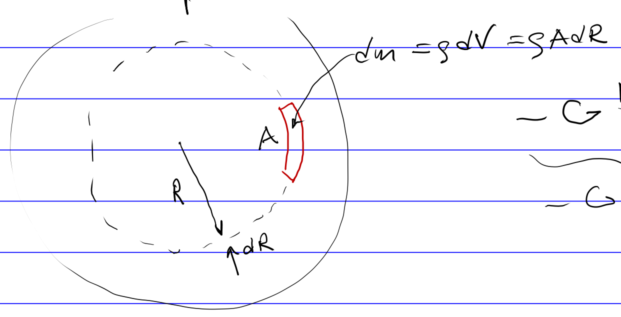
$$M = \frac{2 \cdot 3 \cdot (0{,}88 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{6{,}67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}} \cdot 1{,}5 \times 3{,}09 \times 10^{16+6} \text{ m}$$

$$\sim 4 \times 10^{\overbrace{12+22+11}^{45}} \text{ kg} \cdot \frac{M_\odot}{2 \times 10^{30} \text{ kg}} = 2 \times 10^{15} M_\odot$$

$$\boxed{\left.\frac{M}{L}\right|_{\text{Coma cluster}} = \frac{2 \times 10^{15} M_\odot}{5 \times 10^{12} L_\odot} = 400 \frac{M_\odot}{L_\odot}}$$

(U usporedbi s pojedinim galaksijama za koje $\frac{M}{L} \sim 50\text{–}100 \frac{M_\odot}{L_\odot}$

Alternativna metoda određivanja ukupne mase jata koristi mjerenja X-zračenja vrućeg plina (10^8 K) u jatu za kojeg očekujemo da je u hidrostatičkoj ravnoteži (tlak plina u ravnoteži s gravitacijskom silom.



$$-G \frac{M(R)\, dm}{R^2} = dP \cdot \cancel{A}$$

$$-G \frac{M(R) \rho \cancel{A} dR}{R^2}$$

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{G\overset{\text{ukupno}}{M(r)}\,\overset{\text{samo plin}}{\rho_{gas}(r)}}{r^2}$$

Idealni plin: $PV = \underbrace{N}_{M_{gas}/\mu}kT \longrightarrow P = \frac{\rho_{gas}}{\mu}kT$

μ – masa čestice plina

Ne mjerimo $T(r)$ i $\rho_{gas}(r)$ nego modeliramo poznatu fiziku zračenja takve plazme i prilagodbom na mjereno zračenje određujemo $T(r)$, $\rho_{gas}(r) \longrightarrow M(r)$. (Bolje od virijalnog pristupa koji daje samo M_{ukupno})

Rezultati: $M \sim 1.3 \times 10^{15}\, M_\odot$ (konzistentno s virijalnim pristupom)

$$\Omega_{cluster} = \frac{\rho_{cluster}}{\rho_{c,0}} = (\text{kao ranije}) = \frac{(M/L)_{cluster}}{\rho_{c,0}/j_V} = \frac{400\, M_\odot/L_\odot}{1200\, M_\odot/L_\odot} = 0.3$$

Kvalitetnije analize:

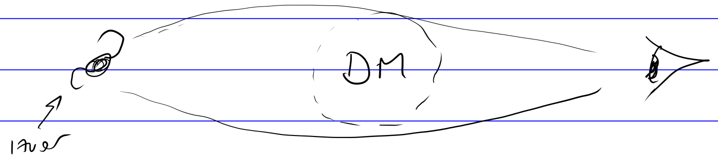
$$\boxed{\Omega_{cluster} \sim 0.15 - 0.2} \gg \Omega_b \sim 0.05$$

$\Downarrow$

nebarionska tamna tvar!

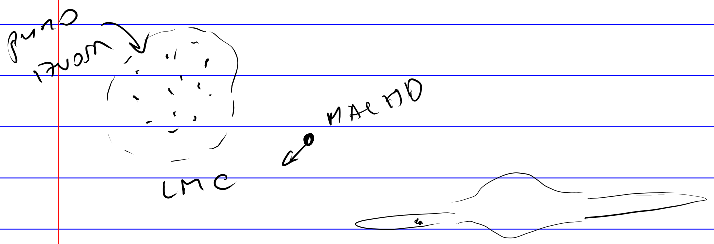
Da bi dobili Ω_m u $\Omega_{cluster}$ nedostaje još eventualno homogena neklasterirana pozadina (po simulacijama toga nema puno)

Metoda gravitacijske leće



- vidimo povećani izvor

1. Traženje MACHO-a (Massive Compact Halo Object)



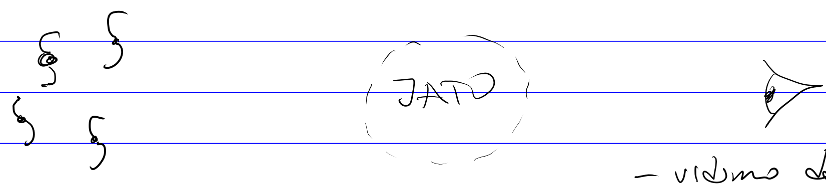
Rezultat

$$M_{MACHO} \lesssim 8\% \, M_{HALO}$$

$$\Downarrow$$

DM uglavnom nije u kompaktnim objektima nego je difuzna

2. Određivanje mase jata galaksija



- vidimo deformiranu sliku pozadine
„weak lensing" „cosmic shear"

Rezultati slaže se s virijalnim teoremom i hidrostatičkom masom
tj. $\Omega_{cluster} \sim 0.2$

Kandidati za nebarionsku tamnu tvar

- čestice iz proširenja standardnog modela
  npr. axioni, najlakši supersimetrični partneri
  $\downarrow$ $m \sim 10^{-5}$ eV ; $\downarrow$ $m \sim 10^{12}$ eV

- WIMPs (Weakly Interacting Massive Particle) : eksperimenti ih bezuspješno traže (XENON)

- neutrini $m_\nu \sim 3.8$ eV $\Rightarrow$ $\Omega_\nu = 0.26$
  - $\uparrow$ tu negdje je osjetljivost direktnih potraga
  - no utječu na formiranje strukture : $m_\nu < 1$ eV

Razvezivanje čestičnih vrsta u ranom svemiru

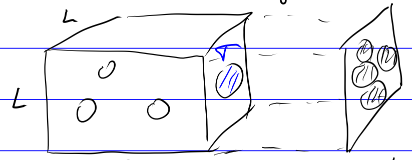
Promatramo konkretnu vrstu čija je gustoća u nekom trenutku n čestica po jediničnom volumenu.

$$n \propto \frac{1}{a^3} \quad \text{(ako nema stvaranja/uništavanja čestica)}$$

$$\frac{d}{dt}(\underbrace{na^3}) = 0$$

↳ broj čestica u jediničnom sugibajućem volumenu ne mijenja se

Ako čestice interagiraju s udarnim presjekom σ, srednji slobodni put λ je



λ – duljina za koju ukupna površina centara raspršenja

$$N\cdot\sigma = n\cdot V\cdot\sigma = n\cdot\lambda \cancel{L^2}\sigma = L^2$$

↑ prosječno „prekrije cijeli presjek L^2"

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{n\sigma}$$

Broj interakcija u jedinici vremena za datu česticu brzine v:

$$\boxed{\Gamma = \frac{v}{\lambda} = n v \sigma}$$

Ako u toj interakciji čestica nestaje (npr. $1+2 \to 3+4$) ukupna promjena sugibajuće gustoće je

$$\frac{d}{dt}(na^3) = -\Gamma\, \underline{na^3} = -n^2\sigma v a^3$$

broj interakcija po čestici

koliko ih ima

No, postoji i inverzna reakcija $3+4 \to 1+2$ pa je

$$\boxed{\frac{d}{dt}(na^3) = -(n^2 - n_{eq}^2)\sigma v a^3}$$

Boltzmannova jednadžba

↑ ravnotežna gustoća

$N \equiv na^3$ (sugibajuća gustoća)

$$\frac{dN}{dt} = \frac{dN}{da}\underbrace{\frac{da}{dt}}_{=H\cdot a} = \underbrace{-n^2\sigma v a^3}_{=N\Gamma}\left(1-\frac{n_{eq}^2}{n^2}\right)$$

$$\boxed{\frac{d\ln N}{d\ln a} = -\frac{\Gamma}{H}\left(1-\frac{N_{eq}^2}{N^2}\right)}$$

$\Gamma \gg H$: $N \to N_{eq}$ (gustoća je ravnotežna)

$\Gamma < H$: vrsta se razvezuje od interakcije (ako je nestabilna, $N \to 0$ nakon toga)

Kozmičko pozadinsko zračenje (CMB)

Preostalo nakon raspršivanja fotona od elektrona.

Kratka povijest:
1964. Penzias & Wilson – otkriće.
90.-e COBE – spektar crnog tijela + otkriće anizotropije
00.-e WMAP } precizno mjerenje
10.-e Planck } anizotropije

– CMB je u području jake apsorpcije rotacionim modovima vode
⇒ sateliti ili barem južni pol

Rezultati opažanja

1. $T = 2.7255 \pm 0.0006$ ← najsavršenije crno tijelo

2. dipolna anizotropija $\pm 10^{-3}$ K – Doppler zbog gibanja instrumenta relativno prema CMB / RW sustavu:
   - Zemlja oko Sunca: 30 km s^{-1}
   - Sunce oko središta galaksije: 235 km s^{-1}
   - galaksija i lokalna grupa: $\boxed{630 \text{ km s}^{-1}}$ prema Hidri ("Veliki atraktor" ??)

3. $\frac{\delta T}{T} \sim 10^{-5}$ (nakon što se dipol odračuna)
   → kozmologija postaje "precision science"

Formiranje CMB

Kada je raspršivanje? ($a=?$, $T=?$, $z=?$)

1. Super-naivni i super-pogrešni račun.

Kada je $\Gamma \sim H$? $\Gamma = n v \sigma$

– Thomsonovo raspršenje ($E_\gamma \ll m_e$): $\sigma_e = 6.65 \times 10^{-29}\ m^2$ $\left(\propto \frac{1}{m_e^2}\right.$ pa su zato protoni nebitni$\left.\right)$

– $v = c$

– $n = n_e = n_p = \frac{n_{b,0}}{a^3}$, $n_{b,0} = \frac{\varepsilon_{b,0}}{m_p c^2} = \frac{\Omega_{b,0} \cdot \varepsilon_{c,0}}{m_p \quad c^2}$

$$= \frac{0.048 \times 8.7 \times 10^{-27}\ kg/m^3}{1.67 \times 10^{-27}\ kg} = 0.25\ m^{-3}$$

(5% od $\rho_c = 5\ m_p/m^3$)

$H(a)$ nam daje Friedmannova jednadžba.
Pretpostavimo da se raspetavanje dogodilo u vrijeme dominacije materije (rezultat će pokazati da je to točno):

$$H = H_0 \sqrt{\frac{\Omega_{m,0}}{a^3}} = \Gamma = c \sigma_e \frac{n_{b,0}}{a^3}$$

$$\Rightarrow a = 0.025 \quad , \quad z = \frac{1}{a} - 1 = 38$$

$T = ?$ $\quad \varepsilon_\gamma = \alpha T^4$ (Stefan-Boltzmann)

ostovremeno $\varepsilon_\gamma = \dfrac{\varepsilon_{\gamma,0}}{a^4}$ (od raspetavanja do danas sigurno, a uglavnom i ranije)

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_{\gamma,0}} = \frac{1}{a^4} = \frac{T^4}{T_0^4} = \frac{T^4}{T_{CMB}^4} \quad \Rightarrow \boxed{T = \frac{T_{CMB}}{a} = T_{CMB}(1+z)}$$

$$\Rightarrow T = \frac{2.7\ K}{0.025} = 107\ K$$

No, to bi vrijedilo kad bi elektroni bili slobodni cijelo vrijeme. $E_\gamma \sim kT = 0.01\ eV \ll 13.6\ eV$

$\Rightarrow$ e^- i p se spoje u neutralni vodik puno ranije i fotoni se tada raspetavaju.

Relevantna interakcija nije Thomsonovo raspršenje na slobodnom elektronu nego ionizacija $\gamma + H \leftrightarrow e^- + p$

Kada se dogodila rekombinacija? ($e^- + p \rightarrow H$)

(svemir je neutralan)

Def frakcionalna ionizacija $\quad X \equiv \dfrac{n_p}{n_p + n_H} \approx \dfrac{n_p}{n_b} = \dfrac{n_e}{n_b}$

barioni

(zanemarujemo ulogu He koji je već neutralan u vrijeme rekombinacije)

Definiramo trenutak rekombinacije kad je $X = 1/2$.
(Negdje u literaturi $X_{rekomb.} = 0.1$)

2. Malo manje, ali još uvijek dosta naivno:

Tražimo trenutak kad je prosječna energija fotona $\sim 13.6\ eV$

$$\varepsilon_\gamma = \alpha T^4 = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} T^4 = 7.57 \times 10^{-16}\ J m^{-3} K^{-4}$$

$$n_\gamma = \beta T^3 = \frac{2.4}{\pi^2} \frac{k^3}{\hbar^3 c^3} T^3 = 2.03 \times 10^7\ m^{-3} K^{-3}$$

$$\Rightarrow \langle E_\gamma \rangle = \frac{\varepsilon_\gamma}{n_\gamma} = 2.7\, kT$$

$$T_{rekomb?} = \frac{13.6\ eV}{2.7\, k} = \frac{13.6\ eV}{2.7\,(8.6 \times 10^{-5}\, eV/K)} = 59\,000\ K$$

Ali, prisjetimo se:

$$n_{\gamma,0} = 411\ cm^{-3} \quad \text{vs.} \quad n_{b,0} = 0.25\ m^{-3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\eta = \frac{n_{b,0}}{n_{\gamma,0}} = 6.1 \times 10^{-10}}$$

$\Rightarrow$ I na nižim temperaturama u repu Planckove raspodjele ima dovoljno fotona s energijom $E \sim 13.6\ eV$!

3. Ispravan pristup

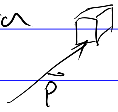
- Trebamo i η uključiti u račun tj. raditi s cijelom raspodjelom po energijama i za elektrone i za fotone (i za p i H)

Pretpostavke:

- sustav je u toplinskoj ravnoteži. T je ista za sve vrste (prestaje biti točno kad $X \to 0$)

- sustav je u kinetičkoj ravnoteži. Vrste poštuju Fermi-Dirac ili Bose-Einstein distribuciju. (Dovoljno je vremena za preraspodjelu energije sudarima)

Iz FEČ1: broj raspoloživih kvantnih stanja u d^3p volumenu impulsnog prostora



je $\frac{V d^3p}{\hbar^3(2\pi)^3} = \frac{V d^3p}{h^3} = V\frac{4\pi p^2\, dp}{h^3}$

Pa je raspodjela po impulsima (broj čestica s impulsom između p i $p+dp$ za vrstu x:

$$n_x\, dp = g_s \frac{1}{e^{(E-\mu)/kT} \pm 1}\cdot\frac{4\pi p^2\, dp}{h^3}$$

$-\to B$, $+\to F$

broj „internih" kvantnih stanja po ćeliji faznog prostora

$$g_s = \begin{cases}2 & \text{za } \gamma, e^-, p \quad \text{(polarizacije/spinovi)}\\ 4 & \text{za } H \quad (\text{spinovi } e^- \text{ i } p)\end{cases}$$

Čak i za T_{rekomb} (netočno) $= 59\,000$ K $\to kT = 5$ eV elektroni bi bili nerelativistički, a sada pogotovo:

$$E = mc^2 + \frac{p^2}{2m} \gg kT \quad \Big\} \quad \frac{1}{e^u \pm 1} \approx e^{-u}$$

Za $x = e^-, p, H$:

$$n_x\, dp = g_x \frac{\cancel{4}\pi}{h^3} e^{-(m_xc^2-\mu_x)/kT} \underbrace{e^{-\frac{p^2}{2m_xkT}} p^2\, dp}_{\frac{\sqrt{\pi}}{\cancel{4}}(2m_xkT)^{3/2}} \quad \Big/ \int_0^\infty$$

$$\boxed{n_x = g_x\left(\frac{m_x kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-(m_xc^2-\mu_x)/kT}}$$

Na temperaturi T:

$$\frac{n_H}{n_e n_p} = \underbrace{\frac{g_H}{g_e g_p}}_{=\frac{4}{2\cdot 2}=1}\underbrace{\left(\frac{m_H}{m_e m_p}\right)^{3/2}}_{\approx m_e^{-3/2}}\left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} e^{\left[\underbrace{(m_e+m_p-m_H)c^2}_{=Q=13.6\text{ eV}} + \underbrace{(\mu_H-\mu_p-\mu_e)}_{=0}\right]/kT}$$

u kemijskoj ravnoteži $\mu_H + \underbrace{\mu_\gamma}_{=0} = \mu_p + \mu_e$

$$\boxed{\frac{n_H}{n_e n_p} = \underbrace{\left(\frac{m_e kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2}}_{=\lambda_e^3} e^{Q/kT}}$$ Sahina jednadžba

$=\lambda_e^3$ — termalna de Broglieva valna duljina elektrona

$$LHS = \frac{n_H}{n_p^2} \qquad (n_e = n_p)$$

$$X = \frac{n_p}{n_p + n_H} \rightarrow \frac{n_H}{n_p} + 1 = \frac{1}{X} \rightarrow \frac{n_H}{n_p} = \frac{1-X}{1}$$

$$\frac{1-X}{X} = n_p \left(\quad \right)^{-3/2} e^{Q/kT}$$

$$n_p = X n_b = X \eta n_\gamma \quad , \quad n_\gamma = \frac{2.4}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3$$

$$\frac{1-X}{X^2} = \underbrace{\frac{2.4}{\pi^2} \left(\frac{kT}{\hbar c} \right)^3 \eta \left(\frac{m_e kT}{2\pi \hbar^2} \right)^{-3/2}}_{=3.83} e^{Q/kT}$$

$$\boxed{\frac{1-X}{X^2} = 3.83\, \eta \left(\frac{kT}{m_e c^2} \right)^{3/2} e^{Q/kT}}$$

Numerički (vidi na githubu) $X = 0.5$ za $T_{rec} = 3760\ K$

$$\boxed{z_{rec} = \frac{T_{rec}}{T_{CMB}} - 1 = 1379}$$

Rekombinacija s emisijom jednog fotona energije $\approx 13,6$ eV nije efikasna jer taj obično reionizira drugi atom vodika. Treba ići kaskadno s dva fotona manjih energija

$\rightarrow$ korekcija za při 10–15 % $\quad z_{rec} \simeq 1200$

Raspršenje fotona $\quad \Gamma \simeq H \quad$ je sad

$$\Gamma(z) = X(z)\, \underbrace{(1+z)^3}_{\propto 1/a^3} n_{b,0}\, \sigma_e c = H(z) = H_0 \sqrt{\Omega_{m,0} (1+z)^3}$$

modifikacija obzirom na super-nadmi raniji pristup

numerička: $\boxed{z_{dec} = 1121}$

$\{ z_{last-scatter} \simeq z_{dec}$

Anizotropije CMB-a

Svemir nije bio savršeno homogen i izotropan u vrijeme rekombinacije i odvezivanja fotona. Tadašnje varijacije gustoće su začeci današnje strukture svemira (galaksije, jata, ...)

To se odražava na temperaturi CMB-a:

$$\frac{\delta T}{T}(\hat{n})$$
↑ smjer promatranja

$\hat{n} = (\vartheta, \varphi)$, ali temperatura u konkretnom smjeru $\hat{n}$ nas ne zanima (ovisi o našem položaju), nego samo statistička svojstva. Prema današnjim spoznajama kompletna informacija je sadržana u korelacijskoj funkciji

$$\left\langle \frac{\delta T(\hat{n})}{T} \frac{\delta T(\hat{n}')}{T} \right\rangle_{\hat{n}\cdot\hat{n}' = \cos\vartheta} = f(\vartheta) = \frac{1}{4\pi} \sum_{\ell} (2\ell+1) C_\ell P_\ell(\cos\vartheta)$$

(Usrednjeno preko svih $\hat{n}, \hat{n}'$, uz uvjet $\hat{n}\cdot\hat{n}' = \cos\vartheta$.)

↑ Legendreovi polinomi

C_ℓ – mjeri fluktuacije na kutnoj skali $\frac{\pi}{\ell} = \frac{180°}{\ell}$

Često se određuje/crta veličina

$$\Delta_T(\ell) \equiv \sqrt{\frac{(2\ell+1) C_\ell}{2\pi}} \qquad [K]$$

Zbog nehomogenosti gustoće (uglavnom DM koje ima 5× više od bariona, a u vrijeme rekombinacije i od zračenja)

varijacija gravitacijskog potencijala je $\delta\Phi$, a posljedične varijacija temperature

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{3} \frac{\delta\Phi}{c^2} \qquad \text{(Sachs-Wolfe efekt)}$$

Dva suprotna efekta:
- fotoni su rano zgusnuti
- gube energiju pri izlasku iz potencijalnog zdenca

Akustične oscilacije – titranje foton–barion plazme u grav. potencijalu (vlastitom + od DM)

Detaljni spektar oscilacija ovisi o spektru zgušnjavanja DM, no najveća moguća valna duljina je određena brzinom zvuka u plazmi i raspoloživim vremenom od velikog praska – $\Rightarrow$ horizont zvuka d_s (kao (čestični) horizont, ali uz $c \to v_s$)

$$v_s^2 = \frac{\partial P}{\partial \rho}\Big|_{S=\text{const}} = wc^2 \qquad v_s \approx \frac{c}{\sqrt{3}}$$

Prava udaljenost do izvora danas $d_{p,0} = \int_0^r dr = r = c\int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)}$,

a u vrijeme zadnjeg raspršenja $d_{p,ls} = a_{ls}\cdot r$

$\Downarrow$

$$d_s = a_{ls}\cdot v_s \int_0^{t_{ls}} \frac{dt}{a(t)}, \qquad a(t) = \frac{1}{1+z} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$$ (za jednokomponentni svemir)

$w \approx 0$ veći dio vremena

$$d_s = \left(\text{vidi poglavlje 4}\right) = -a_{ls}\frac{v_s}{H_0}\underbrace{\int_\infty^{z_{ls}} dz\,(1+z)^{-3/2}}_{\frac{1}{-1/2} z^{-1/2}\Big|_\infty^{1+z_{ls}}} = \frac{2v_s}{H_0}\, a_{ls}\, \underbrace{(1+z_{ls})}_{1/a_{ls}}{}^{-1/2}$$

$$d_s = \frac{2v_s}{H_0}(a_{ls})^{3/2} = 0.141\ \text{Mpc}$$ ← „standardno ravnalo" za udaljenost kutnog promjera (najbolje koje znamo)

$$d_{A,ls} = \frac{d_{p,ls}}{1+z_{ls}} \approx \frac{d_{p-hor,0}}{1+z_{ls}} = \frac{14\ \text{Gpc}}{1090} = 12.8\ \text{Mpc}$$

{udaljenost do ls nije puno različita od udaljenosti do velikog praska

$$\theta_s = \frac{d_s}{d_{A,ls}} = \frac{0.141}{12.8} = 0.011 \ (\approx 1^\circ), \qquad \ell \sim \frac{\pi}{\theta_s} \sim 200$$ $\Rightarrow$ u skladu s eksperimentom (Planck: $\theta_s = 0.0104131 \pm 0.0000062$)

Pažljiviji račun:
$\theta_s = 0.011\sqrt{\Omega_0}$ ← (izravno mjerenje geometrije svemira)

(8.) BBN

$$\frac{\varepsilon_\gamma}{\varepsilon_{\gamma 0}} = \frac{\alpha T^4}{\alpha T_0^4} = \frac{a^4 = 1}{a^4} \Rightarrow T \propto \frac{1}{a}$$

$$T(t) = \frac{T_0}{a}$$, for radiation: $a = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}}$, $= \frac{4}{3}$

$$T(t) = T_0 \sqrt{\frac{t_0}{t}} = \frac{T_0}{\sqrt{2H_0}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \sqrt{\frac{t}{t_0}}$$

$$t_0 = \frac{1}{2H_0}$$

vrlo approx (jer H_0 je određen u matter-dominated)

$$kT(t) = \frac{kT_0}{\sqrt{2H_0}} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$= \frac{8.62 \times 10^{-5}\ eV/K \cdot 2.755\ K}{\sqrt{2 \cdot 68\ km/s/Mpc}} = \underbrace{1.1 \times 10^6\ eV}_{\sim 1\ MeV} \frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$T = 10^{10} K \frac{1}{\sqrt{t}}$$

1 eV = 11 600 K

$$\langle E_\gamma \rangle = 2.7\ kT \approx \frac{3\ MeV}{\sqrt{t}}$$

$$p + n = D + 2.22\ MeV$$ nastaje ~ 1 sec

old we know better how:

$$\frac{Q_{recomb}}{Q_{deut}} \approx \frac{T_{recomb}}{T_{deut}} \approx \frac{2.22 \times 10^6\ eV}{13.6\ eV} = 1.6 \times 10^5$$

$$\Rightarrow T_{deut} = 1.6 \times 10^5 * 3762\ K = 6.1 \times 10^8\ K \Leftrightarrow 53\ keV$$

$$\frac{t}{\text{sec}} = \cancel{\left(\frac{3\,\text{MeV}}{53\,\text{keV}}\right)^{2}} \left(\frac{10^{10}\,K}{6.1\times10^{8}\,K}\right)^{2} \sim 300\ \text{s}$$

„prve 3 minute“

D → He → Li → . . . → Fe

ali pretvorba je vrlo neefikasna.

$t = 0.1$ s $\langle E_\gamma \rangle \sim 10$ MeV

$$n + \nu_e \longleftrightarrow p + e^-$$

$$n + e^+ \longleftrightarrow p + \bar{\nu}_e$$

$$n \longleftrightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

imamo ih dovoljno jer je $\gamma + \gamma \longleftrightarrow e^+ + e^-$ u ravnoteži

Za pč. momenta vremena $p + \bar{p} \longleftrightarrow \gamma + \gamma$

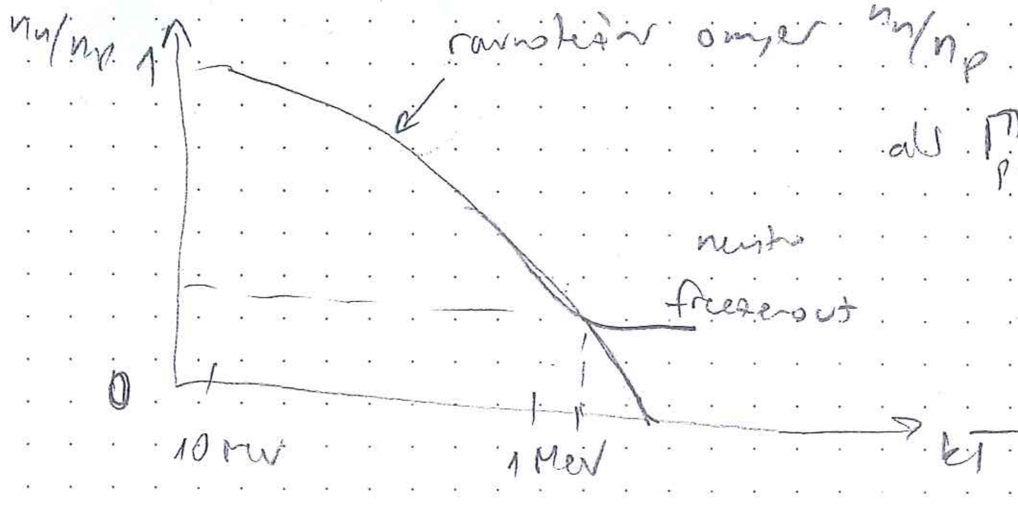
$\cancel{(m_n - m_p)c^2 = Q_n = 1.29\ \text{MeV}}$

$m_{n,p}c^2 \gg kT$ → NR raspodjela:

$$n_x = g_x \left(\frac{m_x kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{3/2} e^{-m_x c^2/kT}$$

$$\frac{n_n}{n_p} = \underbrace{\left(\frac{m_n}{m_p}\right)^{3/2}}_{\approx 1} e^{-\overbrace{(m_n - m_p)c^2}^{\equiv Q_n = 1.29\ \text{MeV}}/kT}$$

iz lab. mjerenja



ali $\Gamma_{p\leftrightarrow n} \sim H$ za

$kT = 0.8$ MeV

~1 sec

$t \ll \tau_n$ irelevantno

3

$$\left.\frac{n_n}{n_p}\right|_{\substack{\text{at}\\ \text{neutron}\\ \text{freeze-out}}} = e^{-1.29/0.8} = 0.2$$

Primordijalna nukleosinteza (BBN)

~~[illegible]~~ n se mogu polako raspadati

dok se ne vežu u D

$$p + n \to D + \gamma \qquad B_D = 2.22\ \text{MeV}$$

$$\frac{n_D}{n_p n_n} = \underbrace{\frac{g_D}{g_p g_n}}_{\frac{3}{2\cdot 2}} \underbrace{\left(\frac{m_D}{m_p m_n}\right)^{3/2}}_{\approx \frac{2}{m_n}} \left(\frac{kT}{2\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} e^{\overbrace{(m_p + m_n - m_D)}^{B_D} c^2/kT}$$

$J(D) = 1$

$\Downarrow$

$g_D = 3$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{n_D}{n_p n_n} = 6 \left(\frac{m_n kT}{\pi \hbar^2}\right)^{-3/2} e^{B_D/kT}}$$

BBN „Saha" eq

$$n_p = 0.8\, n_b = 0.8\, \eta\, \underbrace{n_\gamma}_{\frac{2\zeta(3)}{\pi^2}\left(\frac{kT}{\hbar c}\right)^3}$$

{jer 0.2 su neutroni}

$$\boxed{\frac{n_D}{n_n} = 6.5\, \eta \left(\frac{kT}{m_n c^2}\right)^{3/2} e^{B_D/kT}}$$

$n_n = n_D \rightarrow$ numerically: $kT_{nuc} = 0.066$ MeV

$\Rightarrow 7.67 \times 10^8$ K

$$t \simeq \left(\frac{10^{10}}{T_{nuc}}\right)^2 \approx 200\ \text{sec}$$

S.W.: „prve tri minute"

$$n_n(t) = n_n(0)\, e^{-t/\tau} \quad , \tau = 880\,s$$

$$e^{-200/880} = 0.8$$

$$\boxed{\frac{n_n}{n_p} = 0.2 = \frac{1}{5}} \rightarrow \frac{1\cdot 0.8}{5+0.2} = 0.15$$

D se promptno spoji u He

U svemiru općenito opažamo Y u 0.25 (maseni)

helija He^4

$2n \rightarrow He$
$2p \rightarrow He$

$$\boxed{Y_p} = \frac{m_{He}}{m_{He}+m_H} = \frac{4N_{He}}{4N_{He}+N_H} = \frac{2N_n}{2N_n+(N_p-N_n)} = \frac{2N_n}{N_n+N_p}$$

$N_n = 2N_{He}$

$N_p = N_H + 2N_{He}$

$N_H = N_p - 2N_{He}$
$= N_p - N_n$

$$= \frac{2\, n_n/n_p}{1+n_n/n_p}$$

$$= \frac{2\cdot 0.15}{1+0.15} = 0.26$$

- Nakon He stvar stane jer nema stabilnih $A=8,5$ (u. zvijezdama $3\times\alpha \rightarrow C$)
- Stvori se nešto Li i Be
- računaju također $\sigma(T)$ ... $\Rightarrow n_x(\eta) \Rightarrow$ $\eta \sim 5-7\times 10^{-10}$ $\Updownarrow$ $\Omega_b \sim 0.04$

Ključno D za usporedbu spektra $Ly\text{-}\alpha D \neq Ly\text{-}\alpha H$

Inflacija

1. Problem ravnosti

Friedmanova j.:

$$1 - \Omega(t) = -\frac{kc^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2}$$

danas, $t = t_0$, $a(t_0) = 1$:

$$1 - \Omega_0 = -\frac{kc^2}{R_0^2 H_0^2}$$

Uvrstimo gore:

$$1 - \Omega(t) = \frac{(1-\Omega_0) H_0^2}{a(t)^2 H(t)^2}$$

Također

$$\frac{H(t)^2}{H_0^2} = \underbrace{\frac{\Omega_{r,0}}{a^4} + \frac{\Omega_{m,0}}{a^3}}_{\text{dominiraju za } t < t_{m\Lambda} \approx 10 \text{ Ga}} + \Omega_{\Lambda,0} + \frac{1-\Omega_0}{a^2}$$

$$\boxed{1 - \Omega(t) = \frac{(1-\Omega_0)\, a^2}{\Omega_{r,0} + a\,\Omega_{m,0}}}$$

Danas mjerimo: $|1-\Omega_0| \leq 0.005$, pa u vrijeme t_{rm} kad je $a_{rm} \approx 2.9 \times 10^{-4}$

$$|1 - \Omega_{rm}| \lesssim \frac{0.005 \cdot (2.9 \times 10^{-4})^2}{9 \times 10^{-5} \times 2} \approx 2.5 \times 10^{-6}$$

i to se i dalje smanjuje kako idemo prema velikom prasku. Npr

$$|1 - \Omega_{BBN}| \lesssim 10^{-15} \leftarrow$$ ne očekujemo tako malu brojku slučajno

Točno je onda $1 - \Omega(t) = 1 - \Omega_0 = 0$, ali zašto ??

$\downarrow$

„Problem ravnosti"

2. Problem horizonta

(čestični) horizont: $$d_{hor} = c\int_0^{t_0} \frac{dt}{a(t)} = 14\ \text{Gpc}$$

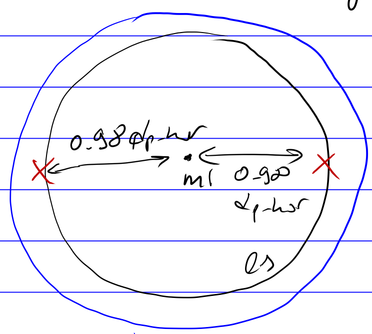
referentni model (naš svemir)

Istovremeno, prava udaljenost do površine zadnjeg raspršenja fotona:

$$d_{ls} = c\int_{t_{ls}\approx 0.0004\ \text{Ga}}^{t_0 = 13.7\ \text{Ga}} \frac{dt}{a(t)} \approx d_{p\text{-}hor}$$

Točnije $d_{ls} = 0.98\, d_{p\text{-}hor}$

No onda su antipodalne točke površine zadnjeg raspršenja na nebu sigurno jedna drugoj izvan horizonta



p-hor

No, ako nisu nikad bile u kauzalnom kontaktu kako je moguće da su međusobno termalizirane (na istoj $T_{CMB} = 2.755\,K$)?

Možemo i točnije odrediti dio površine zadnjeg raspršenja koja je bio u kauzalnom kontaktu.

Odredili smo bili udaljenost kutnog promjera do površine ls

$$d_{A,ls} = 12.8\ \text{Mpc}$$

te zvučni horizont u $t = t_{ls}$

$$d_s = \frac{2 v_s}{H_0} (a_{ls})^{3/2} = 0.141\ \text{Mpc}$$

Za čestični horizont u $t = t_{ls}$ samo zamijenimo $v_s \to c$ pa kako je $v_s = c/\sqrt{3}$

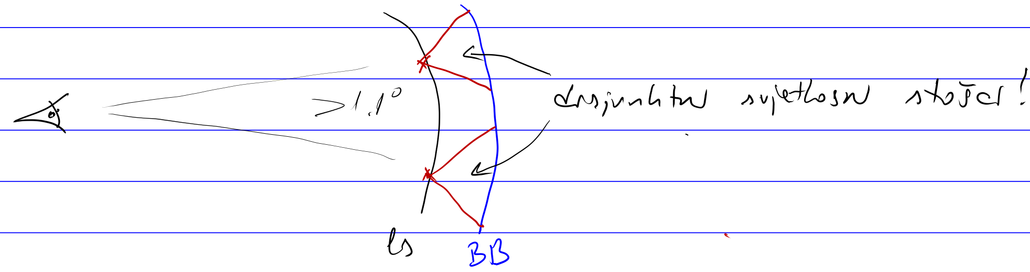
$$d_{p\text{-}hor} = \sqrt{3}\, d_s = 0.25\ \text{Mpc}$$

Pa po definiciji d_A imamo

$$\vartheta_{hor} = \frac{d_{hor}(t_{es})}{d_{A,es}} = \frac{0.25\ \mathrm{Mpc}}{12.8\ \mathrm{Mpc}} \approx 0.02 \approx 1.1^\circ$$

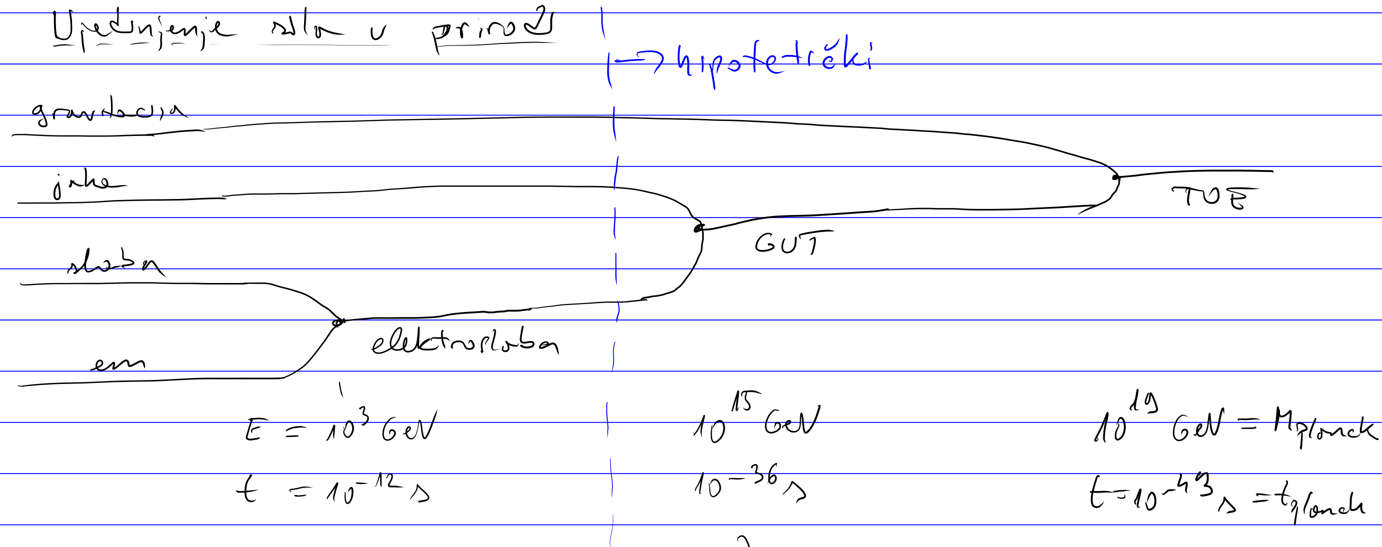
Dakle, očekivali bi da područja na nebu udaljenija od $\sim 1.1^\circ$ imaju različitu T_{CMB}, što nije slučaj → „problem horizonta".

Alternativno:



3. Problem monopola

Ujedinjenje sila u prirodi



ovaj fazni prijelaz uzrokuje topološke defekte: magnetske monopole

otprilike jedan unutar svake kauzalne domene. $d_{p-hor}(t_{GUT}) \sim c t_{GUT}$

$$n_{monopol} \sim \frac{1}{(c t_{GUT})^3} = \frac{1}{(3\times 10^{8}\ \mathrm{m/s} \cdot 10^{-36}\ \mathrm{s})^3} \sim 10^{82}\ \mathrm{m}^{-3}$$

zračenje svejedno dominira u t_{GUT}, ali monopoli bi trebali preuzeti dominaciju oko $t \sim 10^{-16}$ s i dominirati sve do danas, no ne opažamo ih. (Problem monopola)

Inflacija: period ubrzanog širenja ranog svemira

Jednadžba ubrzanja

$$\frac{\ddot a}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3p)$$

kaže da širenje može biti ubrzano ako je $p < -\frac{\varepsilon}{3}$

npr. za jednokomponentni svemir s $w < -\frac{1}{3}$.

To je najjednostavnije postići pozitivnom Λ_i $(w = -1)$

$$p_{\Lambda_i} = -\varepsilon_{\Lambda_i} \qquad \frac{\ddot a}{a} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_{\Lambda_i} \underset{\text{od ranije}}{=} \frac{c^2}{3}\Lambda_i \left\{ = \frac{1}{3}\Lambda_i^{[\text{Ryden}]} \right\} > 0$$

$(\Lambda_i \neq \Lambda$ (iz referentnog modela današnjeg svemira))

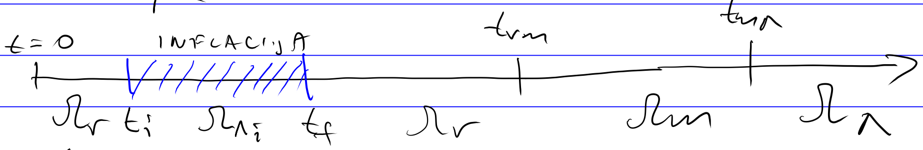
Friedmannova j.:

$$H^2 = \frac{\dot a^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon_\Lambda = \frac{c^2\Lambda_i}{3}$$

$$H_i = \sqrt{\frac{c^2\Lambda_i}{3}} = \text{const} = \frac{\dot a}{a} = \frac{da}{dt}\frac{1}{a} \quad \Big/\int$$

$$a(t) \propto e^{H_i t}$$ ← eksponencijalno širenje ✓

Pretpostavimo da je period inflacije unutar perioda dominacije zračenja



dominira Ω_r : $a(t) \propto \sqrt{t}$ tj. $\frac{a(t)}{a_i} = \sqrt{\frac{t}{t_i}}$ $\qquad t < t_i$

Ω_{Λ_i} : $\frac{a(t)}{a_i} = e^{H_i(t - t_i)}$ $\qquad t_i < t < t_f$

$$\frac{a(t_f)}{a(t_i)} = e^{H_i(t_f - t_i)} \equiv e^N \qquad N = H_i(t_f - t_i) \equiv \text{„broj e-strukosti"}$$

(„e-folding")

Uzmimo da je $t_i = t_{GUT} = 10^{-36}\,s$

$$H_i \approx \frac{1}{t_{GUT}} \approx 10^{36}\,s^{-1}$$

$$t_f = \frac{N}{H_i} + t_i = (N+1)\,t_{GUT}$$

Kako inflacija rješava problem ravnosti i koliko je N potrebno?

$$1-\Omega = -k\,\frac{c^2}{R_0^2 a^2 H^2} \qquad \Omega > 1 \Rightarrow k=+1 \qquad \Omega < 1 \Rightarrow k=-1$$

$$|1-\Omega(t)| = \frac{c^2}{R_0^2 a(t)^2 H(t)^2} \qquad \text{ako } k \neq 0$$

Za vrijeme inflacije

$$|1-\Omega(t)| = \frac{c^2}{R_0^2 H_i^2 a_i^2}\, e^{-2H_i(t-t_i)}$$

$$|1-\Omega(t_i)| = \frac{c^2}{R_0^2 H_i^2 a_i^2}$$

$$|1-\Omega(t_f)| = |1-\Omega(t_i)|\,\underbrace{e^{-2N}}_{\text{eksponencijalno potisnuće ne-ravnosti u } t_i}$$

Uzmimo da je $|1-\Omega(t_i)| \sim 1$, a znamo $|1-\Omega_0| < 0.005$

što ekstrapoliramo unatrag do $t_f = (N+1)\,t_{GUT}$

$$\frac{a(t_f)}{a_{rm}} = \sqrt{\frac{t_f}{t_{rm}}} \qquad a_{rm} = 2.9\times10^{-4} \qquad t_{rm} = 50\ \text{ka}.$$

$$a(t_f) = \frac{a_{rm}}{\sqrt{t_{rm}}}\sqrt{t_{GUT}}\,\sqrt{N+1} = \frac{2.9\times10^{-4}\sqrt{10^{-36}\,s}}{\sqrt{50\ \text{ka}\cdot 3{,}1\times10^{7}\,s/a}}\sqrt{N+1}$$

$$= 2.3\times10^{-28}\sqrt{N+1}$$

$$1-\Omega(t_f) = \frac{(1-\Omega_0)\,a(t_f)^2}{\Omega_{r,0}} = \frac{0.005}{9\times10^{-5}}\left(2.3\times10^{-28}\right)^2(N+1)$$

$$= 3\times10^{-54}(N+1) \sim e^{-2N}$$

$$\Rightarrow N = -\frac{1}{2}\ln\underbrace{(3\times10^{-54})}_{-123} - \frac{1}{2}\ln(N+1) \approx 60$$

minimalni broj e-strukosti inflatorne ekspanzije

Kako inflacija rješava problem horizonta?

$$d_{hor}(t) = a(t)\, c \int_0^t \frac{dt}{a(t)}$$

dominacija zračenja: $a(t) \propto \sqrt{t}$ $\qquad \frac{a(t)}{a_i} = \sqrt{\frac{t}{t_i}}$

inflacija: $a(t) \propto e^{H_i t}$

$$d_{hor}(t_f) = \underbrace{a(t_f)}_{e^N a(t_i)}\, c \int_0^{t} \frac{dt}{a(t)} = \cancel{a(t_i)}\, e^N c \left\{ \underbrace{\int_0^{t_i} \frac{dt}{\cancel{a_i}\sqrt{t/t_i}}}_{\underbrace{\sqrt{t_i}\, \frac{t^{1/2}}{1/2}\Big|_0^{t_i}}_{2t_i}} + \underbrace{\int_{t_i}^{t_f} \frac{dt}{\cancel{a_i} \exp(H_i(t-t_i))}}_{\underbrace{e^{H_i t_i} \cdot \frac{e^{-H_i t}}{-H_i}\Big|_{t_i}^{t_f}}_{\underbrace{\frac{e^{H_i t_i}}{-H_i}\left[e^{-H_i t_f} - e^{-H_i t_i}\right]}_{\frac{1}{H_i} - \frac{1}{H_i}\underbrace{e^{-H_i(t_f - t_i)}}_{\ll 1}}}} \right.$$

$$d_{hor}(t_f) \approx e^N c\,(2t_i + H_i^{-1}) = e^N c\, 3t_i \qquad (t_i = t_{GUT} = 10^{-36}\,s)$$

$$d_{hor}(t_i) = 2ct_i = 2 \times 3\times 10^8\, m/s \cdot 10^{-36}\, s = 6\times 10^{-28}\, m$$

$$d_{hor}(t_f) = e^N \cdot \frac{3}{2} \cdot 6\times 10^{-28}\, m = \{N = 65\} = 15\, m$$

Udaljenost do plohe zadnjeg raspršenja danas: $d_p(t_0) \approx d_{hor}(t_0) = 14\,Gpc$

To je na kraju inflacije bilo manje za faktor

$$a(t_f) = 2.3\times 10^{-28}\sqrt{65+1} = 2\times 10^{-27}$$

tj. $d_p(t_f) = a(t_f)\, d_p(t_0) = 0.9\, m$ ← naš svemir nakon inflacije

a prije inflacije

$d_p(t_i) = e^{-N} d_p(t_f) = 5\times 10^{-29}\, m$ ← –"– prije inflacije

što sve stane u tadašnji horizont

$$d_{hor}(t_i) = 6\times 10^{-28}\, m$$ ✓

- Ekspanzija za faktor e^{65} tołuder razrjeđuje monopole do manje od jednog u vidljivom svemiru.

Dakle svi problemi su riješeni. Preostala pitanja:

1. Što uključuje i isključuje inflaciju u t_i i t_f?
2. Zašto se i druge čestice (npr. fotoni) ne razrjeđe kao monopoli?
   nakon inflacije: $T = e^{-N} T_{GUT} < 1\,K$!?
3. otkud, nakon toliko ekstremnog "izravnavanja",
   $\frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} \sim e^{-N} \sim 10^{-28}$,
   fluktuacije gustoće u $t = t_{ls}$ $\left(\frac{\delta\varepsilon}{\varepsilon} \sim 10^{-5}\right)$ od kojih nastaje struktura?

Za odgovore treba nam konkretni model inflacije.

Skalarno polje ϕ. Klasična teorija polja → tenzor energije impulsa $T_{\mu\nu}$ → ε_ϕ, P_ϕ

$$\varepsilon_\phi = \frac{1}{2\hbar c^3}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \qquad \approx V(\phi)$$

$$P_\phi = \frac{1}{2\hbar c^3}\dot{\phi}^2 - V(\phi) \qquad \approx - V(\phi)$$

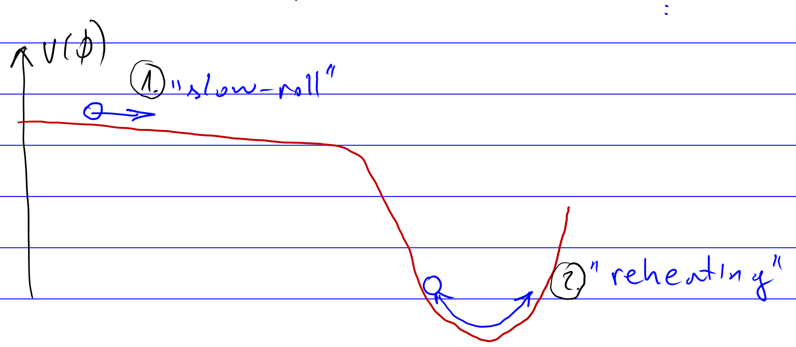
ukoliko je $\underbrace{\quad}_{\text{ovo}} \ll V(\phi)$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P_\phi = -\varepsilon_\phi}$$

pa se ϕ ponaša kao Λ.

Dovoljno mali $\dot{\phi}$ može se postići s $V(\phi)$ koji se sporo mijenja:

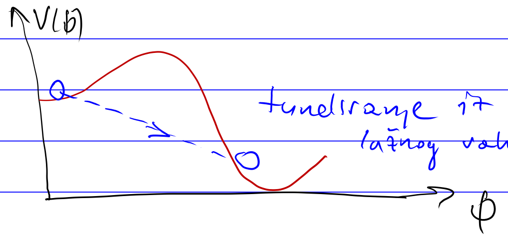


Interakcijom s ostalim poljima ϕ predaje svoju energiju i zagrijava svemir → "pravi veliki prasak"
→ stvaranje čestica koje vidimo danas
→ zagrijavanje je na $t < t_{GUT}$ pa se ne stvaraju novi monopoli

Naš vidljivi svemir: $\boxed{t_i = t_{GUT} \quad 10^{-28}\ \text{cm}} \xrightarrow{\text{inflacija}} \boxed{t_f \quad 0.9\ \text{m}} \xrightarrow{\text{Normalno širenje}} \boxed{t_0 \quad 14\ \text{Gpc}}$

kvantne fluktuacije prostor-vremena ⟶ galaksije

„Stara inflacija" (A. Guth)



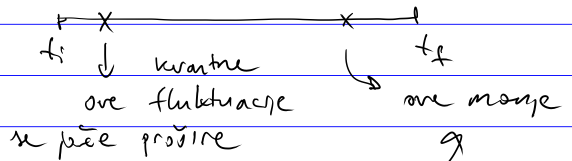
→ „graceful exit" problem

(sva energija je u opni mjehurića pravog vakuuma) koji se osim toga ne uspiju spojiti i završiti inflaciju

Uspješna predviđanja inflacijske teorije:

1. svemir je ravan ($\Omega \approx 1$) (činilo se drugačije 80-ih)
2. Nejednolikosti CMB-a su neovisne o skali (spektralni indeks $n \simeq 1$)

jer



ali amplituda je ista („tilt")

pažljiv račun $n = 0.92 - 0.98$

WMAP & Planck: $n \simeq 0.95$

Problemi (neki):

– „slow-roll" $\Rightarrow V(\phi) = \lambda \phi^4 \quad \lambda \sim 10^{-13}$ ← „fine tuning"

– vječna inflacija → multiverse

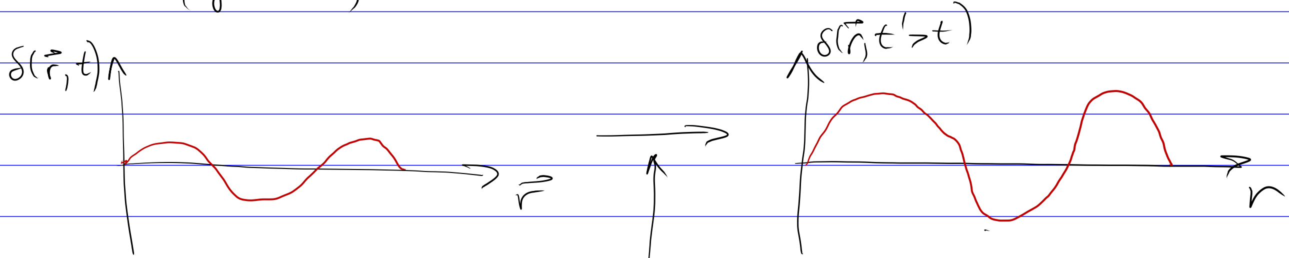
Formiranje strukture: gravitacijska nestabilnost

- svemir je homogen na skalama $\gtrsim 100$ Mpc
- na manjim skalama nehomogenosti nisu po slučajnoj raspodjeli nego imaju strukturu:
  - na malim skalama: galaksije i jata galaksija
  - na velikim skalama: „mjehuričasta" struktura (materija je u „nitima" (filaments), a okolo su praznine (voids))

Glavni mehanizam formiranja strukture je: gravitacijska nestabilnost.

Prosječna gustoća energije $\bar{\varepsilon}(t) \equiv \frac{1}{V}\int d^3r\, \varepsilon(\vec{r},t)$

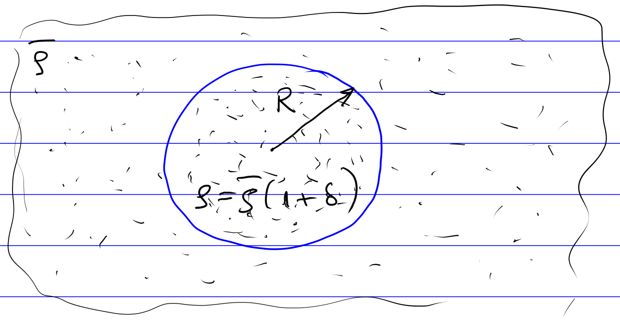
Kontrast (gustoće): $\delta(\vec{r},t) \equiv \dfrac{\varepsilon(\vec{r},t) - \bar{\varepsilon}(t)}{\bar{\varepsilon}(t)}$



gušća područja povlače materiju iz rjeđih

njutnovski pristup: statički homogeni svemir

$\delta \ll 1$



višak mase u sferi:

$$\Delta M = \frac{4\pi}{3} R^3 \bar{\rho}\, \delta$$

ubrzanje zbog ΔM:

$$\ddot{R} = -G\frac{\Delta M}{R^2} \Rightarrow \frac{\ddot{R}(t)}{R(t)} = -\frac{4\pi G \bar{\rho}}{3}\delta(t)$$

$\delta > 0 \Rightarrow \ddot{R} < 0$ (kontrakcija)

Očuvanje ukupne mase:

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho(t)R(t)^3 = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}(1+\delta)R^3 = \text{const}$$

$$R(t) = \underbrace{\left(\frac{3M}{4\pi\bar{\rho}}\right)^{1/3}}_{\equiv R_0}(1+\delta)^{-1/3} \underset{\delta \ll 1}{\approx} R_0\left(1-\frac{\delta(t)}{3}\right)$$

$$\ddot{R} \approx -R_0\frac{\ddot{\delta}}{3} \approx -R\frac{\ddot{\delta}}{3} \Rightarrow \frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{\ddot{\delta}}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\delta} = 4\pi G\bar{\rho}\,\delta}$$

ansatz $\delta(t) = A\,e^{\pm t/t_{dyn}}$ → jedan bitan za velike t

$$A\frac{1}{t_{dyn}^2}\cancel{e^{t/t_{dyn}}} = 4\pi G\bar{\rho}\cancel{A}\cancel{e^{t/t_{dyn}}} \Rightarrow t_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{4\pi G\bar{\rho}}}$$

$$t_{dyn} \approx 9{,}6\,\text{h}\left(\frac{\bar{\rho}}{1\,\text{kg}\,\text{m}^{-3}}\right)^{-1/2}$$

Imamo eksponencijalnu kontrakciju bez obzira na R ili $\delta(0)$!

No, gravitacijskom sažimanju se opire tlak.

$$p = \underbrace{\frac{kT}{\mu c^2}}_{w}\varepsilon \qquad \text{(vidi P-03, 4. poglavlje Ryden)}$$

Uravnotežujući gradijent tlaka se ne stvara trenutačno nego brzinom zvuka $c_s = \sqrt{w}\,c$ pa da bi uravnotežio područje polumjera R treba mu vrijeme

$$t_{pre} \sim \frac{R}{c_s}$$

pa ako je

$$t_{pre} > t_{dyn}$$

svejedno dolazi do kolapsa.

t_{pre} ovisi o R, za razliku od t_{dyn} pa se granična situacija obično izražava preko

Jeansove duljine λ_J:

$$t_{dyn} = \frac{1}{\sqrt{G\rho}} = \sqrt{\frac{c^2}{G\mathcal{E}}} \sim t_{pre} \sim \frac{\lambda_J}{c_s}$$

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{c^2}{G\mathcal{E}}}$$

Pažljiviji račun:

$$\lambda_J = c_s \sqrt{\frac{\pi c^2}{G\mathcal{E}}} = 2\pi c_s t_{dyn}$$

Područja manja od λ_J samo osciliraju; veća područja su podložna gravitacijskoj nestabilnosti i sažimanju.

Alternativno: Jeansova masa: $M_J = \rho\left(\frac{4\pi}{3}\lambda_J^3\right)$

U kozmološkom kontekstu $t_{dyn} \sim \frac{1}{H}$

pa je $\lambda_J \sim 2\pi\sqrt{w}\,\frac{c}{H}$

Za zračenje $w = \frac{1}{3} \Rightarrow \lambda_J \gtrsim \frac{c}{H}$

i nema sažimanja.

Za sažimanje trebamo $w \ll 1 \Rightarrow$ NR tvar

No prije razvezivanja zračenje ne da barionskoj tvari da se sažme. Tek nakon razvezivanja imamo efektivno

$$w = \frac{kT_{dec}}{mc^2} = \frac{0.26\ \text{eV}}{1.14\ \text{GeV}} \Rightarrow c_s = \sqrt{w}\,c = 1.5\times10^{-5}\,c$$

uključuje 24% helija

Pa se mogućih λ_J mijenja: 10 Gpc $\Rightarrow$ 0.1 Mpc (galaktička skala)

i galaksije se mogu početi formirati (tj. njihova barionska komponenta)

Gravitacijska nestabilnost u ekspandirajućem svemiru

U statičkoj situaciji smo za strukture veće od λ_J imali eksponencijalni rast kontrasta

$$\delta \propto e^{t/t_{dyn}}$$

Friedmann za $k=0$: $H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon$

$$t_{dyn} = \sqrt{\frac{c^2}{4\pi G \bar{\varepsilon}}}$$

. No svemir se širi s vremenskom skalom

$$H^{-1} = \sqrt{\frac{3c^2}{8\pi G \bar{\varepsilon}}}$$

skala sažimanja $\approx$ skala širenja

$\Downarrow$

Moramo oboje uzeti u obzir.

Opet njutnovski pristup (kombiniramo s njutnovskim izvodom Friedmannove j-)

$$\ddot{R} = -\frac{GM}{R^2} = -\frac{G}{\cancel{R^2}}\frac{4\pi}{3}\underbrace{\rho_m}_{\bar{\rho}(1+\delta)} R^{\cancel{3}}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = -\frac{4\pi}{3}G\bar{\rho} - \frac{4\pi}{3}G\bar{\rho}\delta$$

Opet, s druge strane, masa je očuvana:

$$M = \frac{4\pi}{3}\bar{\rho}(1+\delta)R^3 = \text{const}$$

$$\Rightarrow \quad R \propto \bar{\rho}^{-\frac{1}{3}}(1+\delta)^{-1/3}$$

, a kako $\bar{\rho} \propto \frac{1}{a^3}$

$$R \propto a \underbrace{(1+\delta)^{-1/3}}_{\approx\left(1-\frac{\delta}{3}\right)}$$

(R uvijek raste, samo raste sporije gdje je $\delta > 0$.)

$$\dot{R} \propto \dot{a}\left(1-\frac{\delta}{3}\right) - a\frac{\dot{\delta}}{3}, \quad \ddot{R} \propto \ddot{a}\left(1-\frac{\delta}{3}\right) - \dot{a}\frac{\dot{\delta}}{3} - \dot{a}\frac{\dot{\delta}}{3} - a\frac{\ddot{\delta}}{3}$$

$$\frac{\ddot{R}}{R} = \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{2}{3}\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} - \frac{\ddot{\delta}}{3} + O(\delta^2)$$

$$= -\frac{4\pi G}{3}\bar{\rho} - \frac{4\pi G}{3}\bar{\rho}\delta$$

δ je proizvoljan pa jednadžba mora posebno vrijediti za

$\delta = 0$: $\quad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3} G \bar{\rho}$ (jednadžba ubrzanja poznata od ranije)

a posebno za članove linearne u δ:

$$-\frac{1}{\cancel{3}}\ddot{\delta} - \frac{2}{\cancel{3}}\frac{\dot{a}}{a}\dot{\delta} = -\frac{4\pi G}{\cancel{3}}\bar{\rho}\,\delta$$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} = 4\pi G \bar{\rho}\,\delta$$

„Hubbleovo trenje"

(U statičkom slučaju smo imali ovu jednadžbu s $H=0$.)

Kao i kod Friedmannove j., potpuni relativistički tretman daje samo $\bar{\rho} \Rightarrow \bar{\varepsilon}_m/c^2$. (Podrazumijevamo da se samo NR Ω_m s $w \ll 1$ sažima.)

Pa uz $\varepsilon_c = \frac{3c^2H^2}{8\pi G}$ imamo

$$\boxed{\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2}\Omega_m H^2 \delta = 0}$$

1. Dominacija zračenja: $\Omega_m \ll 1$, $H = \frac{1}{2t}$

$$\ddot{\delta} + \frac{1}{t}\dot{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(t) = B_1 + B_2 \ln t$$

$\left\{ \dot{\delta} = \frac{B_2}{t}, \quad \ddot{\delta} = -\frac{B_2}{t^2} \quad \rightarrow \quad -\frac{B_2}{t^2} + \frac{1}{t}\left(\frac{B_2}{t}\right) = 0 \checkmark \right.$

$\Rightarrow$ kontrast raste samo logaritamski, sporo

2. Dominacija Λ: $\Omega_m \ll 1$, $H = H_\Lambda = \text{const}$

$$\ddot{\delta} + 2H_\Lambda \dot{\delta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta(t) = C_1 + C_2 e^{-2H_\Lambda t}$$

$\left\{ \dot{\delta} = C_2(-2H_\Lambda)e^{-2\Lambda t}, \quad \ddot{\delta} = C_2(-2H_\Lambda)^2 e^{-2\Lambda t} \checkmark \right.$

$\Rightarrow$ kontrast je konstantan

3. Dominacija materije: $\Omega_m \approx 1$, $H = \frac{2}{3t}$

$$\ddot{\delta} + \frac{4}{3t}\dot{\delta} - \frac{2}{3t^2}\delta = 0$$

$\delta = D t^n$: $\dot{\delta} = D n t^{n-1}$, $\ddot{\delta} = D n(n-1) t^{n-2}$

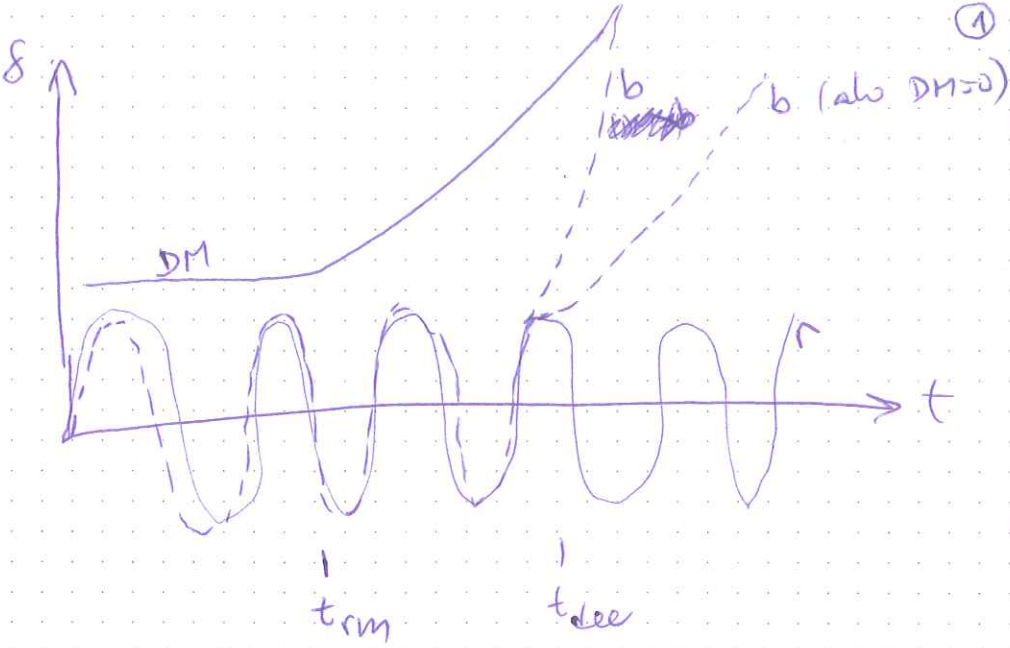
$$n(n-1) + \frac{4}{3}n - \frac{2}{3} = 0 \implies n = -1, \frac{2}{3}$$

$$\implies \delta(t) = \underbrace{D_1 t^{2/3}}_{\text{dominira za velike } t} + D_2 \frac{1}{t}$$

Za dominaciju materije imamo: $a(t) \propto t^{2/3}$

$$\propto \delta(t) \propto a(t) \propto \frac{1}{1+z}$$ → O.K. formiranje strukture

U $t_{rm} \simeq 50$ ka počinje rasti kontrast zbog tamne tvari, a barionska se priključuje u $t_{decoupling} \simeq 400$ ka.



Spektar snage

U nekom trenutku t i volumenu V

$$\delta(\vec{r}) = \frac{V}{(2\pi)^3} \int \delta_{\vec{k}}\, e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, d^3k$$

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} - \frac{3}{2} H^2 \Omega_m \delta = 0$$

uvrštavanje:

$$\ddot{\delta}_k + 2H\dot{\delta}_{k} - \frac{3}{2} H^2 \Omega_m \delta_{\vec{k}} = 0$$

što vrijedi za

$$\frac{c}{H} > \underbrace{a(t)\,\frac{2\pi}{k}}_{\lambda_p} > \lambda_J$$

inače je mod izvan horizonta

inače se tlak opire sažimanju

$$P(k) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle$$ prosjek po $\hat{k}$

U najjednostavnijem slučaju (koji je u skladu s eksperimentima) sva relevantna informacija je sadržana u $P(k)$

$P(k) \propto k^n$. ~~Harrison-~~ ~~Zeldovich~~

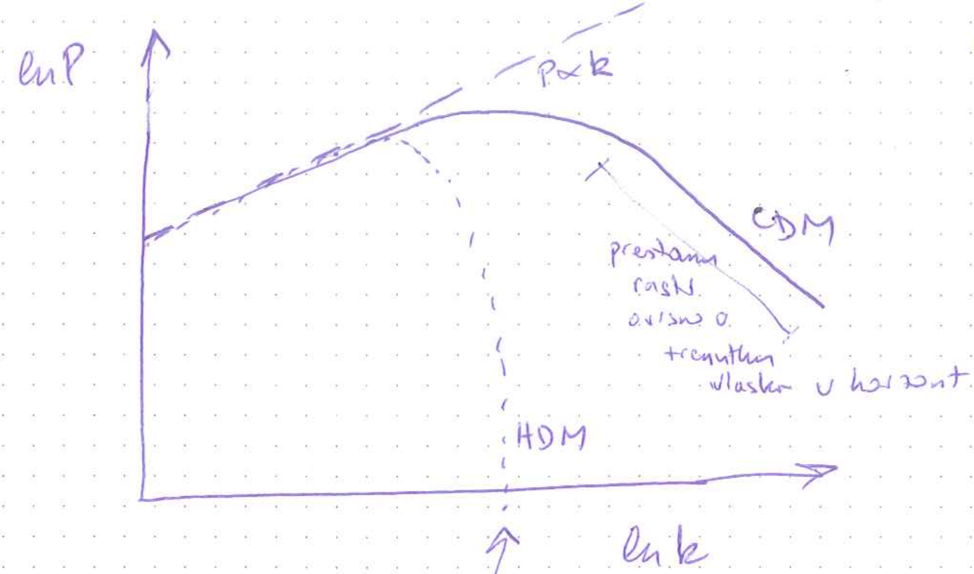
$n = 1$: Harrison - Zeldovichev spektar (scale invariant)

inflacija : $n = 0.92 - 0.98$

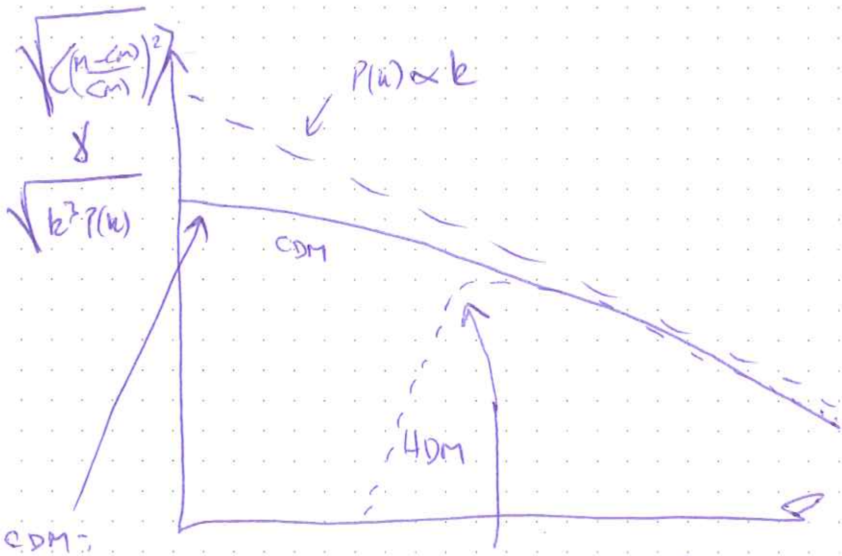
exp : $n = 0.95 - 0.96$

Srednja fluktuacija mase u području sugibajućeg radijusa L :

$$\left\langle \left(\frac{M - \langle M \rangle}{\langle M \rangle} \right)^2 \right\rangle \propto k^3 P(k) \qquad k = \frac{2\pi}{L}$$



za HDM modovi s velikim k su obrisani free-streamingom relativističkih HDM čestica



CDM: prvo se stvaraju male strukture pa se aglomeriraju „bottom-up"

HDM: prvo se stvaraju velike strukture pa fragmentiraju „top-down"

BAO

U t_{es} akustički horizont je imao fizičku (pravu) veličinu

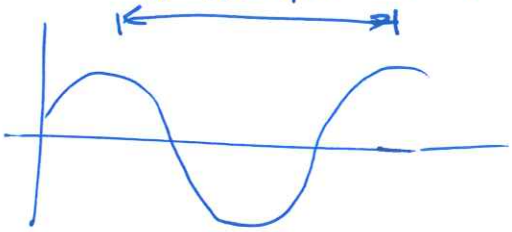
$$d_s(t_{es}) = 0.145 \text{ Mpc}$$

(vidi CMB poglavlje)

To odgovara sugibajućoj, dakle današnjoj, veličini

$$r_s = d_s(t_{es})(1+\underset{\substack{\uparrow\\ 1090}}{z_{es}}) \approx 160 \text{ Mpc}$$

Osim fotona i barioni su sudjelovali u tom titranju pa za najveći mod



očekujemo potpis u rasporedu galaksija danas.

Broj galaksija u volumenu dV na udaljenosti r od neke date galaksije

$$dN = \bar{n}_{gal}\left(1 + \xi(r)\right) dV$$

korelacijska funkcija
F.T. od $P(k)$

Za random raspodjelu očekujemo $\xi(r)=0$.

BAO: $\xi(r)$ ima bump na $r = r_s = 160$ Mpc ✓

- Za razliku od CMB, BAO ima i 3. dimenziju: z

Formiranje strukture: barioni i fotoni

- Vidjeli smo da u ekspandirajućem svemiru kontrast gustoće $\delta = \frac{\varepsilon - \bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}}$ raste

$$\delta \propto t^{2/3} \propto a \propto \frac{1}{1+z}$$

počevši od t_{rm} (DM), odnosno t_{dec} (barioni)

- Inflacija vjerojatno daje početni spektar snage $P(k)$
- $r_s = d_s(t_{ls})(1 + z_{ls}) = 160\ \mathrm{Mpc}$ (BAO) → standard ruler
  ($z_{ls} \approx 1090$)
- barioni nakon t_{ls} su uglavnom neutralni ($Y_p = 24\%$, H: 76%)

- barioni danas: uglavnom ionizirani $X \approx 1$
- CMB se raspršuje na tom ioniziranom plinu (slično kao prije t_{ls})

ukupno izmjereno:

optička dubina (Planck) $\tau_* = 0.066$ (1 od 15 CMB fotona se raspršio)

Iz toga možemo odrediti trenutak reionizacije t_*

$$\tau_* = \int_{t_*}^{t_0} \Gamma(t)\, dt = \int_{t_*}^{t_0} n_e \sigma_e c\, dt =$$

{ pretp. da je reionizacija trenutna i potpuna

$$n_e = n_b = \frac{n_{b,0}}{a^3} \quad t > t_*$$

$$= \sigma_e c\, n_{b,0} \int_{t_*}^{t_0} \frac{dt}{a(t)^3} \rightarrow t_* \rightarrow \boxed{z_* = 7.8}$$

exp: Gunn-Peterson efekt

porijeklo reionizacije (AGN: premalo ih, prve zvijezde: moguće) → 21 cm hiperfina linija eksperimenti

Formiranje galaksija

ZSE, virijalni teorem

+ hlađenje emisijom

$\delta_{rm} \ll 1$ ← početni uvjeti

$\delta \propto a \propto \frac{1}{1+z}$ ⇒ δ raste do trenutka

$\delta \simeq 1$ kad ulazimo u nelinearni režim, odvajamo se od Hubbleovog širenja i imamo sustav koji se počinje sažimati

$\underbrace{\delta_{coll}}_{\text{kolaps}} \approx 1$

$$\frac{\delta_{rm}}{\underbrace{\delta_{coll}}_{\approx 1}} = \frac{1/(1+z_{rm})}{1/(1+z_{coll})}$$

$\Rightarrow (1+z_{coll}) = \delta_{rm}(1+z_{rm})$ ← intenzivna gušća područja prije kolapsiraju (za veći z)

u t_{coll} sva energija je potencijalna $E = W_{coll}$, $K_{coll} = 0$

Nakon „virijalizacije" tj. danas: $W + K = E = W_{coll}$ (ZSE)

$W + 2K = 0$ (virijalni teorem)

$\Rightarrow K = -\frac{W}{2}$ $\quad W - \frac{W}{2} = W_{coll}$ $\Rightarrow W = 2W_{coll}$

$W \propto \frac{1}{r}$ $\Rightarrow R_{halo} = \frac{1}{2}R(t_{coll})$ $\Rightarrow \rho_{halo} = 8\underbrace{\rho_{coll}}_{\bar\rho(t_{coll})(1+\underbrace{\delta_{coll}}_{\approx 1})}$

$\rho_{halo} = 16\bar\rho(t_{coll}) = 16\frac{\rho_{m,0}}{a^3_{coll}} = 16\rho_{m,0}(1+z_{coll})^3$

↑ mjerimo ⇒ znamo z_{coll} kad je kolaps počeo. (Npr $z_{coll} \simeq 5$ za naše galaksije

– to je sve za DM koja dominira u Sm,o.

Barioni mogu kolapsirati i dalje (u galaktičke diskove)

ako im je na raspolaganju gubitak energije

emisijom (hlađenje), ($\vec{J}$ je teže izgubiti ⇒ <u>disk</u>)

Hidrostatska ravnoteža:

$$T_{gas} \approx 1.0 \times 10^{6}\,K \left(\frac{M_{tot}}{10^{12} M_{\odot}}\right)^{2/3} \left(\frac{1+z_{vir}}{5}\right)$$

Mehanizmi hlađenja:

$T > 10^{7}$ K : plin je uglavnom ioniziran : bremsstrahlung

$10^{4} < T < 10^{6}$ K : ima vezanih elektrona : linijska emisija

$T < 10^{4}$ K : za hlađenje trebaju teži elementi
ili molekule (rotacijske/vibracijske linije)

Za $M_{tot} \gg 10^{12} M_{\odot}$ <u>vrijeme</u> hlađenja je predugo i

to postavlja granicu na veličinu galaksija.

Zato Coma halo $M \sim 10^{15} M_{\odot}$ nije mogao rezultirati

samo jednom super-galaksijom.

– Naivni model predviđa efikasno hlađenje : brzi kolaps

→ SN & AGN feedback reheating

→ „cold flow"

↳ <u>ZVIJEZDE</u> – od hladnih molekularnih oblaka ($T \sim 20$ K)

→ $M_J \sim 15 M_{\odot}$ → sažimanje, hlađenje ($M_J \downarrow$) → fragmentacija