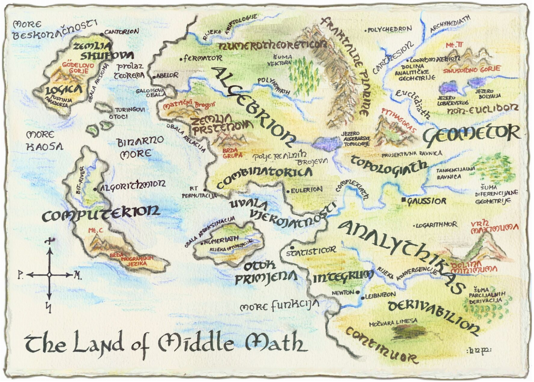
Povijest matematike

2. Starogrčka matematika prije Platona.

Franka Miriam Brückler



Slika: © FMB 1999 (CC BY-NC-ND)

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε;

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ; I, ι; K, κ; Λ, λ; M, μ; N, ν;

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ; I, ι; K, κ; Λ, λ; M, μ; N, ν; Ξ, ξ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ; I, ι; K, κ; Λ, λ; M, μ; N, ν; Ξ, ξ; O, o; Π, π; P, ρ; Σ, σ ili ς; T, τ;

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ; I, ι; K, κ; Λ, λ; M, μ; N, ν; Ξ, ξ; O, o; Π, π; P, ρ; Σ, σ ili ς; T, τ; Y, υ; Φ, φ; X, χ; Ψ, ψ; Ω, ω.

Počeci grčke kulture i znanosti

- tijekom 8. st. pr. Kr. Grci su od Feničana preuzeli ideju alfabeta i razvili svoj alfabet s 24 slova:A, α; B, β; Γ, γ; Δ, δ; E, ε; Z, ζ; H, η; Θ, θ; I, ι; K, κ; Λ, λ; M, μ; N, ν; Ξ, ξ; O, o; Π, π; P, ρ; Σ, σ ili ς; T, τ; Y, υ; Φ, φ; X, χ; Ψ, ψ; Ω, ω.
- počinju se razvijati gradovi-države, a na području Jonije (današnja jugozapadna Turska) se krajem 7. st. pr. Kr. pojavljuju temelji filozofije i znanstvenog načina razmišljanja.
- utjecaj Egipta i Babilona
- jonsko razdoblje (ca. 7.–5. st. pr. Kr.): nema sačuvanih primarnih izvora

Akrofonski (atički, miletski) brojevni sustav

Aditivan; primarna baza 10, sekundarna baza 5:

1	5	10	50	100	500	1000	5000	10.000	50.000
I	𐅃	Δ	𐅄	H	𐅅	X	𐅆	M	𐅇

Koji broj predstavlja brojka

M𐅅ΔΔΔ𐅃IIII?

Tales iz Mileta (ca. 624.–527. pr. Kr.)

- Napomena: Detaljnije biografije matematičarâ.

Tales iz Mileta (ca. 624.–527. pr. Kr.)

- Napomena: Detaljnije biografije matematičarâ.
- Prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inžinjer.
- Ne zna se je li išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sred. 4. st. pr. Kr.).
- Pripisuju mu se prvi matematički dokazi, ali nije sigurno je li išta dokazivao!
- Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. AD) i Proklovih (5. st. AD) komentara o Euklidu.

Tales iz Mileta (ca. 624.–527. pr. Kr.)

- Napomena: Detaljnije biografije matematičarâ.
- Prvi poimence poznat grčki filozof, znanstvenik i inžinjer.
- Ne zna se je li išta pisao, a ako i jest, svi njegovi zapisi nestali su prije Aristotelovog doba (sred. 4. st. pr. Kr.).
- Pripisuju mu se prvi matematički dokazi, ali nije sigurno je li išta dokazivao!
- Talesu pripisani teoremi pripisuju mu se temeljem biografije koju je napisao Diogenes Laertius (2./3. st. AD) i Proklovih (5. st. AD) komentara o Euklidu.
- Talesov teorem o kutu nad promjerom kružnice, Talesovi teoremi o proporcionalnosti; promjer raspolavlja krug, vršni kutovi su jednaki, kutovi uz osnovicu jednakokračnog trokuta su jednaki, KSK-teorem o sukladnosti trokuta — empirijski ili deduktivno?

Pitagora sa Samosa (ca. 570.–490. pr. Kr.)

- Sin trgovca Mnezarha i majke Pitaide, rođen na otoku Samosu. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar.
- Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos.

Pitagora sa Samosa (ca. 570.–490. pr. Kr.)

- Sin trgovca Mnezarha i majke Pitaide, rođen na otoku Samosu. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar.
- Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos.
- Prva Pitagorina škola: 'polukrug' na Samosu.
- 518. (ili ranije) odlazi u južnu Italiju, gdje je u grčkoj koloniji Krotonu osnova znanstveno-vjerski-mističku pitagorejsku školu. Njeni članovi: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$ ($\mu\acute{\alpha}\tau\eta\mu\alpha$ = znanje, ono što se uči).

Pitagora sa Samosa (ca. 570.–490. pr. Kr.)

- Sin trgovca Mnezarha i majke Pitaide, rođen na otoku Samosu. Na njegovo obrazovanje su bitno utjecali filozofi Ferekid, Tales i Talesov učenik Anaksimandar.
- Oko 535. je otišao u Egipat, gdje je 525. pao u perzijsko zarobljeništvo i odveden u Babilon. Nekoliko godina kasnije vratio se na Samos.
- Prva Pitagorina škola: 'polukrug' na Samosu.
- 518. (ili ranije) odlazi u južnu Italiju, gdje je u grčkoj koloniji Krotonu osnova znanstveno-vjerski-mističku pitagorejsku školu. Njeni članovi: $\mu\acute{\alpha}\theta\eta\mu\alpha\tau\iota\kappa o\iota$ ($\mu\acute{\alpha}\tau\eta\mu\alpha$ = znanje, ono što se uči).
- Obveza tajnosti — ne znamo je li Pitagora osobno išta dokazivao, ali je sigurno da su pitagorejci počeli deduktivno dokazivati matematičke tvrdnje.

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji (prirodnih) brojeva: $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ je isključivo prirodan broj.[1]
Pitagorejci su prvi koji brojeve gledaju kao samostalne objekte.
Pridavana su im mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima: teorijska aritmetika.

[1] Jedinica ili monada ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji (prirodnih) brojeva: $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ je isključivo prirodan broj.[1]
Pitagorejci su prvi koji brojeve gledaju kao samostalne objekte.
Pridavana su im mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima: teorijska aritmetika. Praktično računanje: logistika.

[1] Jedinica ili monada ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

Prema pitagorejskoj filozofiji bit svijeta je u harmoniji (prirodnih) brojeva: $\acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\acute{o}\varsigma$ je isključivo prirodan broj.[1]
Pitagorejci su prvi koji brojeve gledaju kao samostalne objekte.
Pridavana su im mistična značenja, ali su dokazani i prvi rezultati o njima: teorijska aritmetika. Praktično računanje: logistika.
Pitagorejci su prvi za koje je sigurno da su svoje matematičke tvrdnje dokazivali. Razlikovali su veličine i iznose.
Quadrivium:

- (teorijska) aritmetika: bavi se onim što se može prebrojati (kvantiteta, brojnost);
- geometrija ($\gamma\varepsilon\omega\mu\varepsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$): bavi se onim što se može mjeriti (veličinama: duljina, površina, volumen, trajanje, masa);
- glazba (harmonija): primjena aritmetike (aritmetika u vremenu)
- astronomija: primjena geometrije (raspored veličina u vremenu i prostoru)

[1] Jedinica ili monada ($\mu\acute{o}\nu o\varsigma$) nije broj, nego osnova svih brojeva. Tako u drugoj definiciji EEVII: Broj je skup jedinica.

Pitagorejska aritmetika

O pitagorejskoj aritmetici saznajemo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. AD). Mnogi pitagorejski rezultati: EEVII, EEVIII, EEIX.
Pitagorejci su uveli razne klasifikacije brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: parni brojevi su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a neparnima pri dijeljenju popola preostaje jedinica.

[2] Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek L. Euler u 18. st.

Pitagorejska aritmetika

O pitagorejskoj aritmetici saznajemo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. AD). Mnogi pitagorejski rezultati: EEVII, EEVIII, EEIX.
Pitagorejci su uveli razne klasifikacije brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: parni brojevi su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a neparnima pri dijeljenju popola preostaje jedinica. Razlikovali su i proste i složene brojeve: EEVII, Def. 11: Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom.

[2] Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek L. Euler u 18. st.

Pitagorejska aritmetika

O pitagorejskoj aritmetici saznajemo od Prokla, nego i od Aristotela (4. st. pr. Kr.) i Nikomaha iz Geraze (1. st. AD). Mnogi pitagorejski rezultati: EEVII, EEVIII, EEIX.
Pitagorejci su uveli razne klasifikacije brojeva. Osnovna je podjela na parne i neparne brojeve: parni brojevi su oni koji se mogu podijeliti na dva jednaka broja, a neparnima pri dijeljenju popola preostaje jedinica. Razlikovali su i proste i složene brojeve: EEVII, Def. 11: Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo jedinicom. Razmatrali su i savršene brojeve, te kvadratne i kubne brojeve. Kasnije, vjerojatno tek neopitagorejci u postklasično helenističko razdoblje, se uvode i figurativni brojevi te prijateljski brojevi.
Vjerojatno je pitagorejski rezultat EEIX36: Ako je $p = 2^m - 1$ prost, onda je $n = 2^{m-1}p$ savršen.[2]

[2] Obrat (da ne postoje drugi parni savršeni brojevi osim onih gornjeg oblika) je dokazao tek L. Euler u 18. st.

Pitagorejske trojke

Pitagorejskih trojki ima beskonačno mnogo: Za svaki $n \in \mathbf{N}$ brojevi $2n$, $n^2 - 1$ i $n^2 + 1$ čine pitagorejsku trojku.

Pitagorejske trojke

Pitagorejskih trojki ima beskonačno mnogo: Za svaki $n \in \mathbf{N}$ brojevi $2n$, $n^2 - 1$ i $n^2 + 1$ čine pitagorejsku trojku.

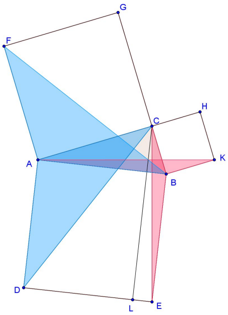
Teorem (EEX29 ,lema)

Za svaka dva relativno prosta prirodna broja $m > n$, koji nisu oba neparni, je $(2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$ primitivna pitagorejska trojka i obrnuto, za svaku primitivnu pitagorejsku trojku (a, b, c) postoje dva relativno prosta prirodna broja m i n, koji nisu oba neparni, takvi da je $(a, b, c) = (2mn, m^2 - n^2, m^2 + n^2)$.

Pitagorejska geometrija

Teorem ($\boxed{\text{EEI47}}$, $\boxed{\text{EEI48}}$)

Trokut je pravokutan ako i samo ako je kvadrat nad njegovom najduljom stranicom jednak zbroju kvadrata nad njegovim kraćim stranicama.



Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem

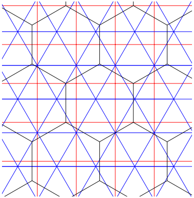
Postoje samo tri pravilna popločenja ravnine.

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem

Postoje samo tri pravilna popločenja ravnine.



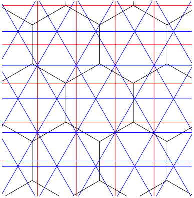
Zbroj kutova u svakom n-terokutu $2n-4$ prava kuta $\Rightarrow$ kut u pravilnom n-terokutu je $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva;

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem

Postoje samo tri pravilna popločenja ravnine.



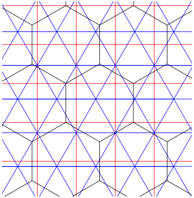
Zbroj kutova u svakom n-terokutu $2n-4$ prava kuta $\Rightarrow$ kut u pravilnom n-terokutu je $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva; U svakom vrhu isti broj m pravilnih n-terokuta $\Rightarrow$ $m\alpha$ jednak četiri prava kuta;

Teorem (EEI41)

Ako paralelogram ima istu osnovicu kao trokut i ako se nalaze između istih paralela, onda je paralelogram dvostruki trokut.

Teorem

Postoje samo tri pravilna popločenja ravnine.



Zbroj kutova u svakom n-terokutu $2n - 4$ prava kuta $\Rightarrow$ kut u pravilnom n-terokutu je $\alpha = \frac{2n-4}{n}$ pravih kuteva; U svakom vrhu isti broj m pravilnih n-terokuta $\Rightarrow$ $m\alpha$ jednak četiri prava kuta;

$$m = 4\frac{n}{2n-4} = 2 + \frac{4}{n-2}$$

Iracionalnost

Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima i njihovim odnosima (omjerima). Posebno je to značilo da im je osnovno uvjerenje bilo:
Svake dvije *istovrsne* veličine su sumjerljive, tj. za svake dvije istovrsne veličine postoji njima istovrsna veličina kojom se mogu obje izmjeriti.

Iracionalnost

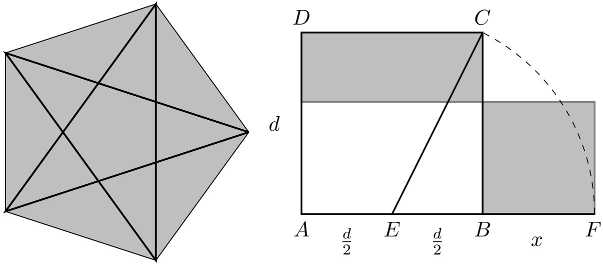
Pitagorejci su smatrali da se cijeli svijet može opisati prirodnim brojevima i njihovim odnosima (omjerima). Posebno je to značilo da im je osnovno uvjerenje bilo:
Svake dvije *istovrsne* veličine su sumjerljive, tj. za svake dvije istovrsne veličine postoji njima istovrsna veličina kojom se mogu obje izmjeriti.
Neki pitagorejac (navodno: Hipasus iz Metaponta oko 450. g. pr. Kr.) je dokazao:

Teorem

Dijagonala kvadrata nije sumjerljiva njegovoj stranici.

Omjer zlatnog reza

Moguće je i da je otkriće nesumjerljivih veličina vezano za $\boxed{\text{omjer „zlatnog reza”}}$.

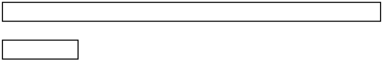


Omjer dviju duljina u kojem se njihov zbroj prema duljoj odnosi kao dulja prema kraćoj:

$$d : a = a : (d - a).$$

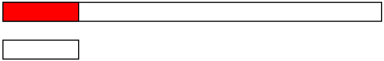
Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, . . .) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.



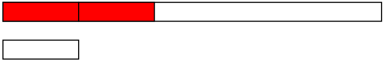
Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.



Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.



Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, . . .) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

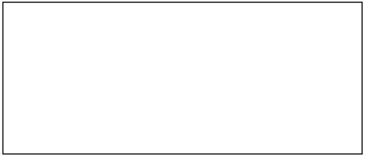
Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, . . .) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom":

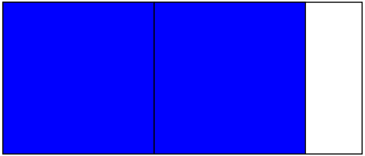


Mali žuti kvadratić je zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.

Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom":

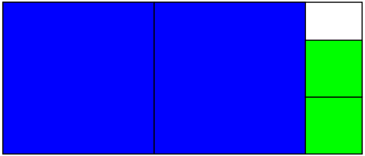


Mali žuti kvadratić je zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.

Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom":

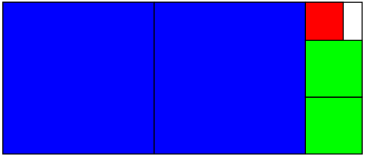


Mali žuti kvadratić je zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.

Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, . . .) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom”:

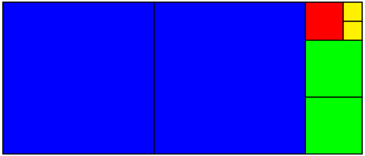


Mali žuti kvadratić je zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.

Euklidov algoritam i iracionalnost

Najkasnije od egipatskog i mezopotamskog doba bilo je lako usporediti istovrsne veličine (broja, mase, ...) ako je iznos jedne prirodni višekratnik iznosa druge.

Pitagorejci (a možda čak i Egipćani ili Babilonci) su otkrili kako se snaći s „ostatkom":



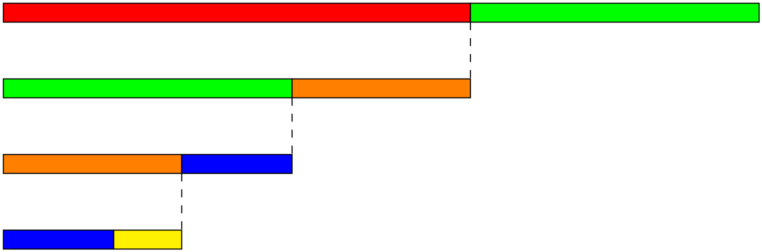
Mali žuti kvadratić je zajednička mjera za čitav pravokutnik i za plavi kvadrat, odnosno duljina njegove stranice je zajednička mjera za stranice polaznog pravokutnika.

Iracionalnost omjera zlatnog reza

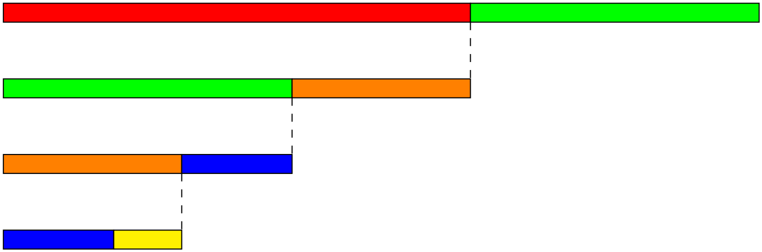
Iracionalnost omjera zlatnog reza

Iracionalnost omjera zlatnog reza

Iracionalnost omjera zlatnog reza



Iracionalnost omjera zlatnog reza



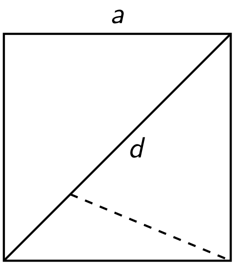
Budući da je u svakom koraku omjer dulje prema kraćoj duljini isti:

$$d : a = a : (d - a),$$

postupak se nastavlja u beskonačnost — ne postoji zajednička mjera crvene i zelene dužine, kojima su duljine u omjeru zlatnog reza. Dakle, postoje nesumjerljive veličine.

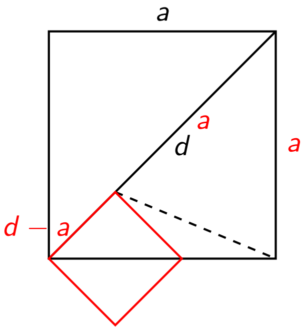
Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata

Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata



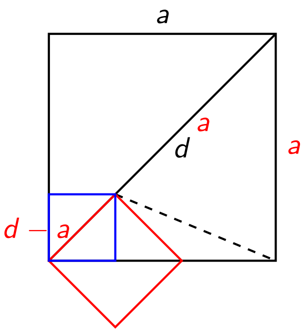
Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d - a$, a njegova dijagonala je $a - (d - a) = 2a - d$, dakle je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Ako bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom m, onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m).

Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata



Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d - a$, a njegova dijagonala je $a - (d - a) = 2a - d$, dakle je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1} = d_n - a_n$ i $d_{n+1} = 2a_n - d_n$. Ako bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom m, onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m).

Nesumjerljivost dijagonale i stranice kvadrata



Stranica crvenog kvadrata ima duljinu $d-a$, a njegova dijagonala je $a-(d-a)=2a-d$, dakle je u svakom sljedećem koraku $a_{n+1}=d_n-a_n$ i $d_{n+1}=2a_n-d_n$. Ako bi a i d bile sumjerljive sa zajedničkom mjerom m, onda bi u svakom koraku a_n i d_n bile sumjerljive, istovremeno postajući proizvoljno male (dakle, u nekom trenu i manje od m).

Pretpovijest analize

Zenon iz Eleje (ca. 490–430 v. Chr.) – Aristotel mu pripisuje četiri paradoksa kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena dobiva paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja.

- *Dihotomija*: Kretanje je nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja.
- *Ahil i kornjača*: Dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla. Dok dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t.d. Dakle, Ahil neće nikad stići kornjaču.

Koja je priroda kontinuuma? Problem limesa?

Pretpovijest analize

Zenon iz Eleje (ca. 490–430 v. Chr.) – Aristotel mu pripisuje četiri paradoksa kretanja, u kojima iz beskonačne djeljivosti prostora odnosno vremena dobiva paradoksalni rezultat nemogućnosti kretanja.

- *Dihotomija*: Kretanje je nemoguće jer se svaku udaljenost prvo treba prijeći do pola, a nakon toga pola ostatka i t.d. Ma koliko prijeđemo, uvijek će ostati razlika do cilja.
- *Ahil i kornjača*: Dok Ahil dođe do prvotne pozicije kornjače, ona se pomakla. Dok dođe do te pozicije, ona je opet malo odmakla, i t.d. Dakle, Ahil neće nikad stići kornjaču.

Koja je priroda kontinuuma? Problem limesa?

Atomistički filozof Demokrit iz Abdere (ca. 460–370 v. Chr.) – ideja podjele stošca na beskonačno tanke diskove paralelne bazi – dilema: Ako gledamo jedan takav disk, jesu li njegovi krugovi jednaki ili ne? Ako jesu, stožac je valjak, ako nisu, stožac je grbav.

Miletski (alfabetski) brojevni sustav

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	Α′ α′	Β′ β′	Γ′ γ′	Δ′ δ′	Ε′ ε′	Ϛ′ ϛ′	Ζ′ ζ′	Η′ η′	Θ′ ϑ′
10	Ι′ ι′	Κ′ ϰ′	Λ′ λ′	Μ′ μ′	Ν′ ν′	Ξ′ ξ′	Ο′ ο′	Π′ π′	Ϙ′ ϙ′
10^2	Ρ′ ρ′	Σ′ σ′	Τ′ τ′	Υ′ υ′	Φ′ φ′	Χ′ χ′	Ψ′ ψ′	Ω′ ω′	Ϡ′ ϡ′
10^3	͵Α ͵α	͵Β ͵β	͵Γ ͵γ	͵Δ ͵δ	͵Ε ͵ε	͵Ϛ ͵ϛ	͵Ζ ͵ζ	͵Η ͵η	͵Θ ͵ϑ
10^4	$\overset{\alpha}{\mathrm{M}}$	$\overset{\beta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\gamma}{\mathrm{M}}$	$\overset{\delta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\varepsilon}{\mathrm{M}}$	$\overset{\digamma}{\mathrm{M}}$	$\overset{\zeta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\eta}{\mathrm{M}}$	$\overset{\vartheta}{\mathrm{M}}$

3 arhaična slova *vau* (*digama*) za 6, *kopa* za 90 i *san* (*sampi*) za 900

- slično: Feničani, Židovi, u srednjem vijeku Arapi (*abdžad*), Hrvati ($\boxed{\text{glagoljske brojke}}$), ...
- kraj brojke: apostrof (ili cijela brojka natcrtana)
- 10^3 (od 5. st. pr. Kr.): kao jedinice, ali s crticom dolje lijevo; npr. 2022 $= {,}\beta\kappa\beta'$
- 10^4 (od 3. st. pr. Kr.) M (od *MYPIOI*, mirijada), kasnije dvije točke iznad znamenke: $\overset{\alpha}{M}$ ili $\ddot{\alpha}$ je 10.000)

- slično: Feničani, Židovi, u srednjem vijeku Arapi (*abdžad*), Hrvati ($\boxed{\text{glagoljske brojke}}$), ...
- kraj brojke: apostrof (ili cijela brojka natcrtana)
- 10^3 (od 5. st. pr. Kr.): kao jedinice, ali s crticom dolje lijevo; npr. 2022 $=,\beta\kappa\beta'$
- 10^4 (od 3. st. pr. Kr.) M (od *MYPIOI*, mirijada), kasnije dvije točke iznad znamenke: $\overset{\alpha}{M}$ ili $\ddot{\alpha}$ je 10.000)

U atenskom razdoblju starogrčka matematika u potpunosti poprima formu geometrijske algebre, a pojavljuju se i temelji infinitezimalnog načina razmišljanja te matematičke logike.

Geometrijska algebra

U atensko je doba matematika poprimila formu koju danas nazivamo geometrijska algebra.

- kvadrat – nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i njegova mjera (površina);
- dvije figure su jednake ako su jednake po mjeri;

Geometrijska algebra

U atensko je doba matematika poprimila formu koju danas nazivamo geometrijska algebra.

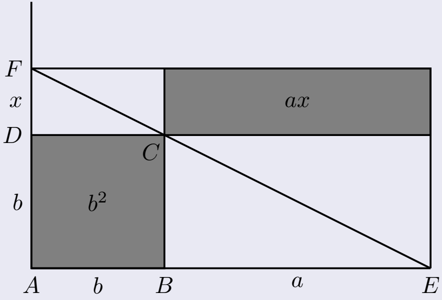
- kvadrat – nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i njegova mjera (površina);
- dvije figure su jednake ako su jednake po mjeri;
- danas se mnoge od takvih konstrukcija mogu shvatiti kao algebarske formule odnosno rješavanje algebarskih jednadžbi;
- Nije ispravno reći da su stari Grci jednadžbe rješavali geometrijski!!!!

Geometrijska algebra

U atensko je doba matematika poprimila formu koju danas nazivamo geometrijska algebra.

- kvadrat – nije broj odnosno potencija, nego geometrijski lik i njegova mjera (površina);
- dvije figure su jednake ako su jednake po mjeri;
- danas se mnoge od takvih konstrukcija mogu shvatiti kao algebarske formule odnosno rješavanje algebarskih jednadžbi;
- Nije ispravno reći da su stari Grci jednadžbe rješavali geometrijski!!!!
- 5. st. pr. Kr.: sve geometrijske konstrukcije se smiju provoditi isključivo ravnalom i šestarom — za jednakost (brojeva, duljina, površina, volumena) se dakle tražilo i više od puke jednakosti mjere: morala se moći dokazati u konačno mnogo konstrukcijskih koraka ravnalom i šestarom. Zašto baš ravnalo i šestar?

Primjer



Tri klasična problema

Ravnalom i šestarom možemo: prepoloviti kut, podijeliti dužinu na proizvoljan broj jednakih dijelova, udvostručiti kvadrat, ...

Početkom atenskog razdoblja grčke matematike, dakle u 5. st. pr. Kr., pojavila su se tri klasična problema:

1. Problem udvostručenja kocke: Za danu kocku treba ravnalom i šestarom konstruirati brid kocke dvostrukog volumena.
2. Problem trisekcije kuta: Dani kut treba ravnalom i šestarom podijeliti na trećine.
3. Problem kvadrature kruga: Ravnalom i šestarom treba konstruirati stranicu kvadrata iste površine kao dani krug.

Problem udvostručenja kocke

Moderna formulacija: Iz $a > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je

$$x^3 = 2a^3.$$

Dvije poznate legende o njegovoj pojavi:

- Teon iz Smirne citira Eratostena: Delijski problem Apolonova oltara
- Eutocius u komentaru Arhimedova teksta *O kugli i valjku*: kretski kralj Minos htio je udvostručiti grob pjesnika Glaukusa

Problem trisekcije kuta

Nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o nastanku ovog problema. Bio je manje popularan, vjerojatno jer je za neke kutove rješiv. Očito ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove.

Problem trisekcije kuta

Nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o nastanku ovog problema. Bio je manje popularan, vjerojatno jer je za neke kutove rješiv. Očito ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove. Kut se može konstruirati ako mu se može konstruirati kosinus.

Problem trisekcije kuta

Nema nikakvih, čak niti legendarnih, podataka o nastanku ovog problema. Bio je manje popularan, vjerojatno jer je za neke kutove rješiv. Očito ga je dovoljno razmatrati samo za šiljaste kutove. Kut se može konstruirati ako mu se može konstruirati kosinus. Ako je zadan α, iz $\cos(3\phi) = 4\cos^3\phi - 3\cos\phi$ uz supstitucije $3\phi = \alpha$ i $x = \cos\phi$ tražimo konstrukciju rješenja kubne jednadžbe

$$4x^3 - 3x = \cos\alpha.$$

Problem kvadrature kruga

Moderna formulacija: Iz $r > 0$ treba ravnalom i šestarom konstruirati x takav da je $x^2 = r^2\pi$.

- Anaksagora iz Klazomene (ca. 499.–428. pr. Kr.) – prvi poznati matematičar koji se bavio ovim problemom; Periklov prijatelj,završio je u zatvoru zbog tvrdnje da Sunce nije bog te se navodno u zatvoru počeo baviti ovim problemom
- Antifont (sredina 5. st. pr. Kr.) – vjerojatno prvi predložio upisivanje pravilnih mnogokuta u krug, počevši od kvadrata, preko osmerokuta redom uz udvostručavanje broja stranica; smatrao je da će se ostatak do površine iscrpsti kad dođemo do dovoljno velikog broja stranica; greška: iz toga što se svaki član niza može konstruirati ravnalom i šestarom ne slijedi da se i limes može konstruirati
- Aristofan spominje ovaj problem u komediji *Ptice* (414. pr. Kr.)

Hipokrat s Hiosa (a. 470. — 410. pr. Kr.)

- navodno: trgovac brodovima iz Jonije, izgubio imovinu (gusari? nepošteni carinici?) te je čekajući odštetu, otprilike 450.–430. pr. Kr. boravio u Ateni i učio filozofiju i matematiku
- najznačajniji matematičar u 5. st. pr. Kr.
- dao je prve značajne doprinose rješavanju sva tri klasična problema
- napisao je danas izgubljeno djelo *Elementi geometrije* – vjerojatno osnova za prve četiri knjige *Euklidovih Elemenata*
- znao, vjerojatno i dokazao: površine krugova odnose se kao kvadrati njihovih polumjera (najstariji sačuvani dokaz: EEXII2 pomoću metode ekshaustije)
- smatra se da je uveo slova kao oznake u dijagramima
- prva osoba koja je točno odredila kvadraturu nekog lika obrubljenog krivuljama

Hipokrat i kvadratura kruga: Hipokratovi mjeseci

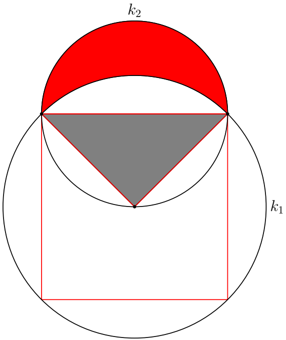
Pri pokušaju rješavanja problema kvadrature kruga otkrio je da se određeni mjesecoliki likovi omeđeni dvjema kružnicama mogu kvadrirati ravnalom i šestarom. Ti se likovi danas nazivaju Hipokratovi mjeseci.

Otkrio je, do na sličnost, tri tipa takvih mjeseca. Danas je poznato da ih ima pet. Preostala dva su otkrivena u 18. st. (Martin Johann Wallenius), a u 20. st. je dokazano da nema drugih (N. G. Čebotarev, A. V. Dorodnov).

Opisat ćemo samo prvi tip, a za preostale i dokaz upućujemo na ovaj link.

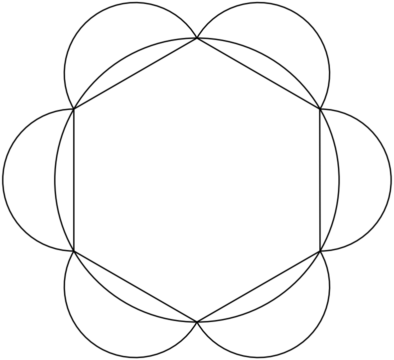
Prvi Hipokratov mjesec

Mjesec je omeđen kružnicom k_1 kojoj je polumjer kateta pravokutnog jednakokračnog trokuta, a središte u vrhu s pravim kutom i kružnicom k_2 čiji promjer je hipotenuza tog trokuta:

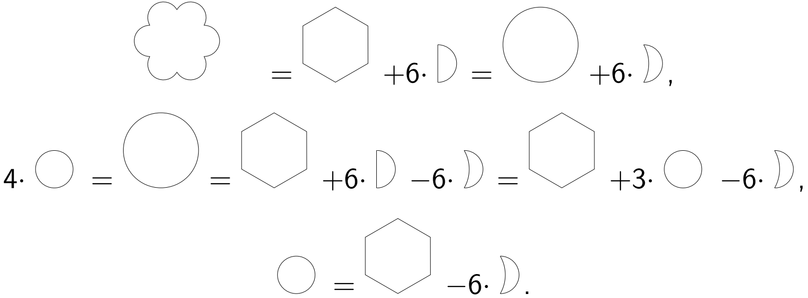


Kvadrat nad hipotenuzom (tj. promjerom od k_2) je prema Pitagorinom poučku dvostruki kvadrat nad polumjerom od k_1, dakle je kvadrat nad promjerom od k_1 dvostruki kvadrat nad promjerom od k_2. Budući da se površine krugova odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima, polukrug nad hipotenuzom ima površinu kao $1/4$ kruga opisanog trokutu.
Površina mjeseca je zbroj površina trokuta i polukruga nad hipotenuzom umanjen za četvrtinu površine trokutu opisanog kruga, dakle prvi Hipokratov mjesec ima istu površinu kao trokut kojim je određen.

Prema mnogim izvorima, Hipokrat je bio svijestan da ovime nije riješio kvadraturu kruga. Drugi navode sljedeće krivo zaključivanje:



Polumjer kružnice jednako je dug kao stranice pravilnog šesterokuta $\Rightarrow$ površine malih i velikih krugova se odnose $4 : 1$.

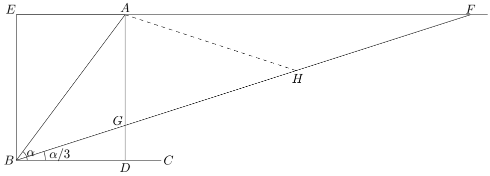


Kad bi se ovi mjeseci mogli kvadrirati, mogao bi se kvadrirati i (mali) krug!

Hipokrat s Hiosa i trisekcija kuta

„Mehanička” trisekcija kuta:

Zadan: $\alpha = \angle ABC$.



1. Okomica iz A na $BC \rightsquigarrow D$;
2. E – četvrti vrh pravokutnika $ADBE$
3. na produljenju AE nađi F t.d. $|FG| = 2|AB|$ gdje je $G = BF \cap AD$ (ovaj korak nije izvediv RŠ!!!)
4. $\Rightarrow 3\angle FBC = \alpha$

Hipokrat s Hiosa i duplikacija kocke

Srednje geometrijske proporcionale

Srednje geometrijske proporcionale između istovrsnih veličina a i b su njima istovrsne veličine x i y takve da je

$$a : x = x : y = y : b.$$

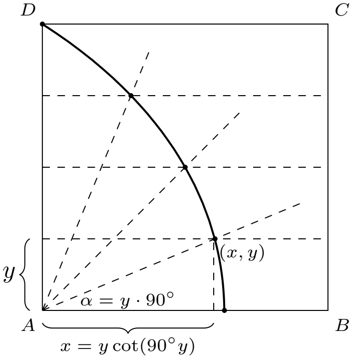
Hipokrat je uočio da se kocka brida a može udvostručiti ako se mogu konstruirati srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$:

$$a : x = x : y = y : (2a) \Rightarrow x^3 = 2a^3$$

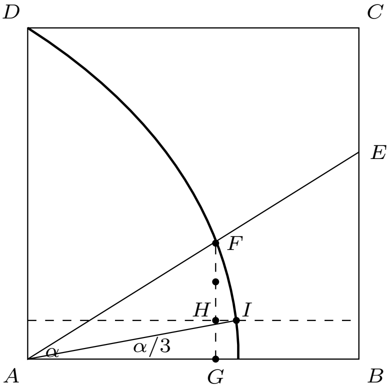
Nakon Hipokrata svi pokušaji rješenja ovog problema usmjereni su na određivanje srednjih geometrijskih proporcionala između a i $2a$.

Hipija iz Elide (ca. 460.–400. pr. Kr.)

Hipija je bio političar i filozof sofist, zarađivao je putujući i držeći predavanja iz poezije, gramatike, povijesti, politike, arheologije, matematike i astronomije. Platon ga kasnije opisuje kao umišljenog i arogantnog čovjeka širokog, ali površnog znanja. Pripisuje mu se otkriće krivulje kvadratise, koja se može iskoristiti za kvadraturu kruga i trisekciju kuta.



Trisekcija kuta pomoću kvadratise



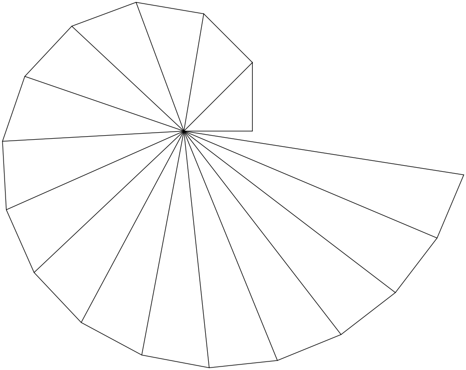
Zadan: $\alpha = \angle BAE$
Neka je F presjek kvadratise i AE.
Ako iz F povućemo okomicu na AB, dobijemo G.
$\overline{FG}$ podijelimo na tri jednaka dijela: $|FH| : |HG| = 2 : 1$.
Kroz H povućemo paralelu s AB i odredimo njeno sjecište I s kvadratisom.
Onda je $\angle IAB = \alpha/3$.

Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.

Teodor iz Kirene (ca. 465.–398. pr. Kr.)

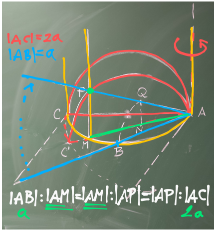
Platonov dijalog *Teetet*: dokazao je nesumjerljivost stranice jediničnog kvadrata i stranice kvadrata površina 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 17.

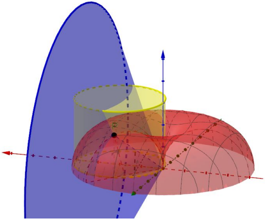


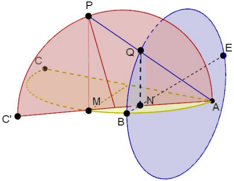
Arhita iz Tarenta (ca. 428.–350. pr. Kr.)

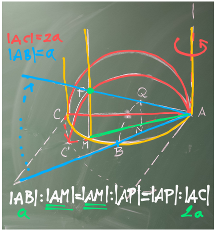
$\boxed{\text{Arhita}}$ je bio pitagorejac, utjecao je na Platona. Najpoznatiji je po doprinosu duplikaciji kocke na temelju Hipokratove ideje: našao je srednje geometrijske proporcionale između a i $2a$ korištenjem presjeka cilindra polumjera, konusa i torusa.

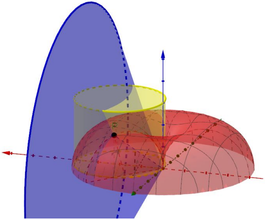
Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{AC}$ dužine između kojih želimo naći srednje geometrijske proporcionale (dakle, duljine su im a i $2a$). Prva ploha je polucilindar promjera $\overline{AC}$. Nad $\overline{AC}$ (u ravnini okomitoj na osnovicu cilindra) konstruirao je polukružnicu, a njenom rotacijom oko izvodnice cilindra koja prolazi kroz A dobio je polutorus.

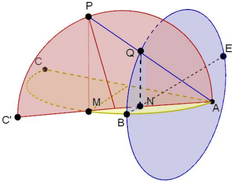

|AC|=2a
|AB|=a
P
Q
C
A
N
C'
M
B
|AB|:|AM|=|AM|:|AP|=|AP|:|AC|
a
2a



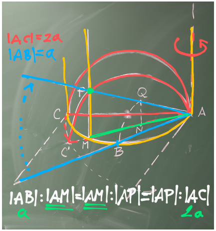

P
Q
E
C
M
N
C'
B
A

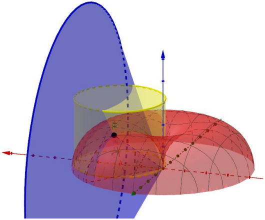


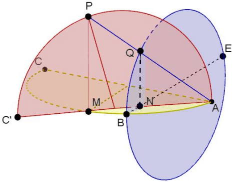




Tražimo srednje geometrijske proporcionale od $|AB|$ i $|AC|$.
Ako je B odabrana na kružnici koja je osnovica cilindra i D presjek tangente na nju povučene u C s pravcem AB, konus je dobio rotacijom trokuta $\triangle ACD$ oko pravca AC.







Tražimo srednje geometrijske proporcionale od $|AB|$ i $|AC|$.
Ako je B odabrana na kružnici koja je osnovica cilindra i D presjek tangente na nju povučene u C s pravcem AB, konus je dobio rotacijom trokuta $\triangle ACD$ oko pravca AC.
Razmatranjem geometrijskih odnosa:

$$|AB| : |AM| = |AM| : |AP| = |AP| : |AC|.$$