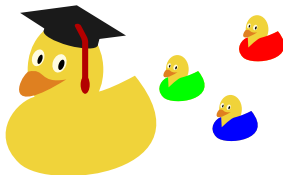


3. tjedan nastave: Euklidovi *Elementi*

Franka Miriam Brückler



Klasični elenizam

- Aleksandar Makedonski (356.–323. pr. Kr., vladao i osvajao 336.–323.)
- 331 pr. Kr.: **Aleksandrija**
- **museion**
- Prvi značajni matematičar koji je djelovao u *museionu* bio je **Euklid**.

Euklid Aleksandrijski (ca. 330. - 275.)

- *Data* (određivanje elemenata geometrijskih likova iz zadanih), *O dijeljenju figura* (u zadanom omjeru), *Optika* (perspektiva), *Phaenomena* (uvod u matematičku astronomiju), ...
- No, *Elementi* ($\Sigma\tau\omicron\iota\chi\epsilon\iota\alpha$, u nastavku EE) su djelo koje je zauvijek promijenilo matematiku ...
- Cilj: sinteza tad poznate matematike u 13 knjiga veličine poglavlja.

Elementi

- EE su značajni zbog stila pisanja: teoremi (propozicije) su logički poredani tako da svaki slijedi isključivo iz već dokazanih, ili pak iz osnovnih tvrdnji danih na početku, a zaključci se izvode strogo deduktivno
- ideja je izvesti svu matematiku (geometriju) iz malog broja početnih pretpostavki: aksioma i postulata (aksiomi su više općematematičke, a postulati geometrijske pretpostavke)
- do 20. st. EE su bili apsolutni uzor matematičkog djela
- većina knjiga započinju definicijama, a tako i prva ...

Definicije u EEI

Prva definicija glasi:

Točka je ono što nema dijela.

Dalje se u te prve 23 definicije definiraju dužine, pravci, razne vrste likova, kutovi, krugovi, te naposljetku

Definicija (Paralelni pravci)

Paralelni pravci su pravci u istoj ravnini koji, koji se, ako ih u oba smjera produljimo u beskonačnost, nikad ne susreću.

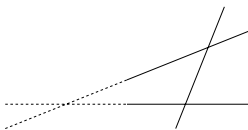
Pet Euklidovih aksioma

- 1 Dvije stvari koje su jednake¹ trećoj su i međusobno jednake.
- 2 Ako jednakom dodamo jednako, dobit ćemo jednako.
- 3 Ako jednakom oduzmemo jednako, dobit ćemo jednako.
- 4 Ono što se podudara je jednako.
- 5 Cjelina je veća od dijela.

¹Podsjetnik: Misli se na jednakost po mjeri, a ne na sukladnost!

Pet Euklidovih postulata

- 1 Od jedne točke k drugoj povući dužinu.
- 2 Proizvoljno produljiti dužinu.
- 3 Oko proizvoljne točke nacrtati kružnicu proizvoljnog polumjera.
- 4 Svi pravi kutovi² su jednaki.
- 5 Ako pravac siječe dva pravca tako da je zbroj unutrašnjih kuteva s iste strane manji od dva prava kuta, onda se ta dva pravca (ako se dovoljno produže) na toj strani sijeku.



²Euklid pravi kut definira ovako: Ako pravac upada na drugi pravac čineći susjedne kutove jednaki, svaki od ta dva kuta je pravi.

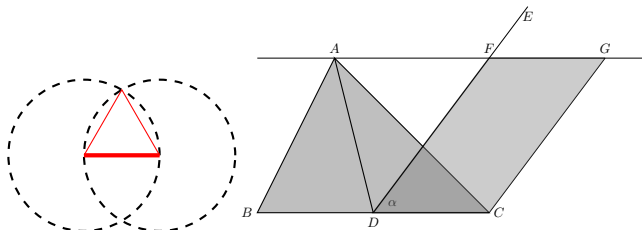
Sadržaj EE

- 1 EEI: elementarna planimetrija (23+48);
- 2 EEII: geometrijska algebra (2+14);
- 3 EEIII: planimetrija kružnice i kruga (11+37);
- 4 EEIV: pravilni mnogokuti (7+16);
- 5 EEV: teorija omjera i razmjera (18+23);
- 6 EEVI: sličnost i geometrijski omjeri (4+33);
- 7 EEVII: djeljivost u \mathbb{N} (22+39);
- 8 EEVIII: proporcije s prirodnim brojevima (0+27),
- 9 EEIX: parni i neparni, prosti i složeni brojevi (0+36);
- 10 EEX: kvadratne iracionalnosti (16+115);
- 11 EEXI: elementarna stereometrija (28+39)
- 12 EEXII: primjena ekshauzije u geometriji (0+18)
- 13 EEXIII: pravilni poliedri (0+18)

Odabrane propozicije iz EE

Propozicija (EEI1)

Konstrukcija jednakokraničnog trokuta zadane duljine stranice.

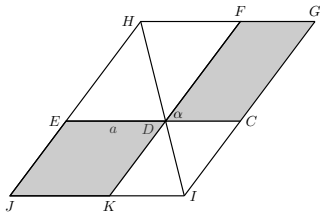


Propozicija (EEI42)

Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu.

Propozicija (EEI44)

Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom trokutu i zadane duljine stranice.

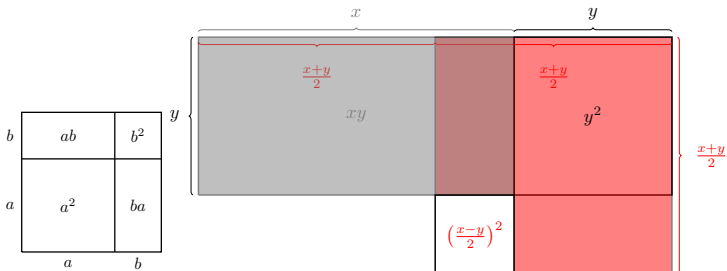


Propozicija (EEI45)

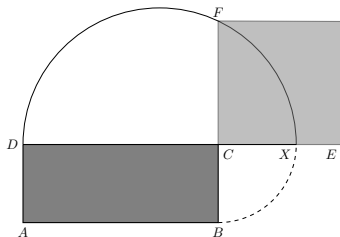
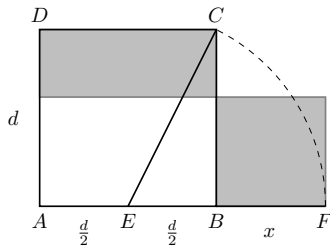
Konstrukcija paralelograma zadanog kuta jednakog zadanom mnogokutu.

Propozicija (EII4, EII5)

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2, \quad xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$



EEII11: konstrukcija dijeljenja dužine u omjeru zlatnog reza;
 EEII14: kvadratura proizvoljnog mnogokuta

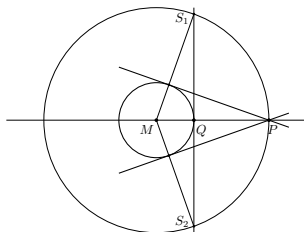
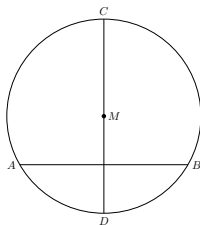


Propozicija (EIII1)

Određivanje središta zadane kružnice.

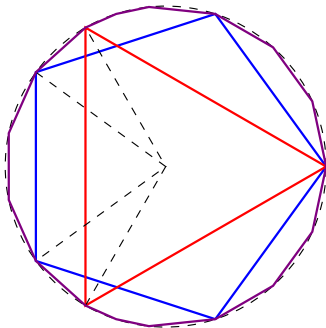
Propozicija (EIII17)

Konstrukcija tangente na kružnicu iz točke izvan kružnice.



Propozicija (EEIV16)

Konstrukcija pravilnog 15-erokuta upisanog kružnici.



EEVI, def. 1

Dva uglata lika zovemo sličnima ako su im odgovarajući unutrašnji kutovi jednaki i odgovarajuće stranice razmjerne.

Propozicija (EEVI2)

Ako se povuče paralela s jednom stranicom trokuta, onda ona stranice trokuta siječe proporcionalno; i, ako su dvije stranice trokuta podijeljene proporcionalno, spojnica točaka podjele je paralelna trećoj stranici trokuta.

Propozicija (EEVI9)

Kako podijeliti dužinu na određeni broj jednakih dijelova?

Propozicija (EEVI12, EEVI13)

Kako za zadane duljine a , b i c konstruirati x sa svojstvom $a : b = c : x$ odnosno $a : x = x : b$.

EEVII (def. 11, 12 i 13)

Prost broj je broj koji se može izmjeriti samo *jedinicom*.

Dva broja su relativno prosta ako je jedinica jedina njihova zajednička mjera.

Složen broj je broj koji se može izmjeriti drugim brojem.

- EEVII2: Euklidov algoritam za određivanje najveće zajedničke mjere dva broja. Kao korolar Euklid iskazuje: Ako neki broj mjeri dva broja, onda mjeri i njihov zajednički djelitelj.
- EEVII34: Određivanje najmanjeg zajedničkog višekratnika dva broja.

Propozicija (EEIX14)

Ako je neki broj najmanji takav da ga mjere neki prosti brojevi, onda ga ne mjeri nikoji drugi prost broj osim njih.

Propozicija (Euklidov teorem, EEIX20)

Prostih brojeva ima više nego u bilo kojem zadanom skupu (nabrojanih) prostih brojeva.

Ako imamo neke proste brojeve, uzmemo njihov najmanji zajednički višekratnik, dodamo mu 1. Tako smo dobili prost ili složen broj. Ako je prost, očito je veći od svih prostih brojeva od kojih smo krenuli, dakle imamo novi. Ako je složen, onda ima neki djelitelj, ali taj ne može biti nikoji od polaznih prostih brojeva jer bi onda taj morao mjeriti i jedinicu, dakle smo opet našli novi prosti broj.

Definicija (EEX, prve 4 definicije)

Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive. Dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi. Ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

EEX2: Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).

Definicija (EEX, prve 4 definicije)

Dvije su veličine sumjerljive ako posjeduju zajedničku mjeru, inače su nesumjerljive. Dvije duljine su kvadratno sumjerljive ako su kvadrati nad njima sumjerljivi. Ako je zadana duljina, sve duljine koje su s njom sumjerljive ili kvadratno sumjerljive zovu se racionalne, a ostale iracionalne. Ako je zadan kvadrat, sve njemu sumjerljive površine zovu se racionalne, a ostale iracionalne.

EEX2: Ako dvije veličine nisu sumjerljive, onda u Euklidovom algoritmu nijedan dobiveni ostatak ne dijeli manju (tj. onu s kojom se u dotičnom koraku dijeli).

EEX21 i EEX36: Ako su dvije duljine samo kvadratno sumjerljive, one određuju iracionalni pravokutnik, a stranica njemu jednakog kvadrata je iracionalna dužina koja se zove medijalnom u odnosu na polazne dvije. Njihov zbroj je također iracionalan i zove se binomijal. Moderno iskazano: Ako za $a, b \in \mathbb{Q}$ \sqrt{a} i \sqrt{b} nisu racionalni, onda je $\sqrt{\sqrt{ab}} = \sqrt[4]{ab}$ medijalna, a $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ binomijal.

Zanimljiva je definicija sfere (EEXI, def. 14) kao rotacione plohe koja nastaje rotacijom polukružnice oko promjera.

- **EEXI3**: Presjek dvije ravnine je pravac.
- **EEXI6**: Dva pravca okomita na istu ravninu su paralelna.
- **EEXI14**: Ravnine okomite na isti pravac su paralelne.
- **EEXI21**: Prostorni kut se može dobiti samo iz ravninskih kutova čiji zbroj je manji od četiri prava kuta.
- **EEXI32**: Volumeni paralelepipeda iste visine odnose se kao njihove osnovice.

- **EEXII2**: Krugovi se odnose kao kvadrati nad njihovim promjerima.

$$P_1 : P_2 = d_1^2 : d_2^2$$

- **EEXII6**: Piramide istih visina se odnose kao njihove baze.
- **EEXII7**: Trostranu prizmu možemo podijeliti na tri trokutaste piramide istih volumena.
- **EEXII10**: Stožac je trećina valjka iste baze i visine.
- **EEXII11**: Valjci, odnosno stošci, istih visina odnose se kao **EEXII18**: Kugle se međusobno odnose kao trostruki omjeri njihovih dijametara.

$$V_1 : V_2 = d_1^3 : d_2^3$$

EEXIII

