Povijest matematike

Franka Miriam Brückler

PMF-MO, Zagreb

Svibanj 2024.

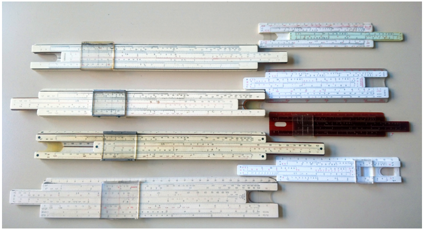
Matematika u 17. stoljeću prije Newtona i Leibniza

Logaritmar

1623. je engleski matematičar Edmund Gunter razvio pomagalo za množenje temeljeno na svojstvima logaritama (Gunterov štap),

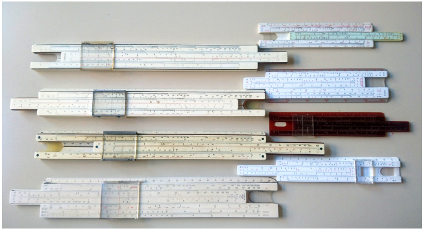
Logaritmar

1623. je engleski matematičar Edmund Gunter razvio pomagalo za množenje temeljeno na svojstvima logaritama (Gunterov štap), a prvi logaritmar konstruirao je William Oughtred (1574.–1660.), prvo 1630. kružni, a onda 1632. kombinacijom dva Gunterova štapa pravi.



Logaritmar

1623. je engleski matematičar Edmund Gunter razvio pomagalo za množenje temeljeno na svojstvima logaritama (Gunterov štap), a prvi logaritmar konstruirao je William Oughtred (1574.–1660.), prvo 1630. kružni, a onda 1632. kombinacijom dva Gunterova štapa pravi.



U *Clavis mathematicae* (1631.), Outhgred je uveo simbol $\times$ za množenje.

Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1587.–1638.)

- zabavna matematika, otkrio jednu metodu konstrukcije magičnih kvadrata neparnog reda
- napisao je djelo o diofantskim jednadžbama — rješavanje pomoću verižnih razlomaka
- izdao je novo izdanje latinskog prijevoda Diofantove *Aritmetike* s komentarima (1621.)

Claude Gaspard Bachet de Méziriac (1587.–1638.)

- zabavna matematika, otkrio jednu metodu konstrukcije magičnih kvadrata neparnog reda
- napisao je djelo o diofantskim jednadžbama — rješavanje pomoću verižnih razlomaka
- izdao je novo izdanje latinskog prijevoda Diofantove *Aritmetike* s komentarima (1621.)

  Nije moguće kub rastaviti na dva kuba ili bikvadrat na dva bikvadrata niti općenitije neku potenciju veću od druge na dvije potencije s istim eksponentom. Za to imam stvarno čudesan dokaz, no rub je ovdje preuzak, da ga zapišem.

Marin Mersenne (1588.–1648.)

Posebno je značajan zbog korespondencije sa svim važnim matematičarima svoga doba.

Marin Mersenne (1588.–1648.)

Posebno je značajan zbog korespondencije sa svim važnim matematičarima svoga doba.
Bavio se prostim i savršenim brojevima, a želio je otkriti opću formulu za proste brojeve pa je počeo razmatrati brojeve $M_n = 2^n - 1$.

Marin Mersenne (1588.–1648.)

Posebno je značajan zbog korespondencije sa svim važnim matematičarima svoga doba.

Bavio se prostim i savršenim brojevima, a želio je otkriti opću formulu za proste brojeve pa je počeo razmatrati brojeve $M_n = 2^n - 1$.

Za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19$ već su i prije Mersennea bili poznati prosti brojevi oblika M_n, a znalo se i da M_{11} nije prost. Mersenne je smatrao se za $n = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 67, 127, 257$ dobiju prosti brojevi. Bio je u krivu za $n = 67$ i $n = 257$, a nedostaju mu $n = 61, 89, 107$. Danas se prosti brojevi oblika M_n zovu Mersenneovi brojevi. Do danas ih je otkriveno 51, dosad najveći je $M_{82589933}$ (2020.), a ne zna se ima li ih beskonačno mnogo.

Pierre de Fermat (1601.–1665.)

- Veliki teorem: Danas se smatra da je Fermat imao dokaz samo za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$.

Pierre de Fermat (1601.–1665.)

- Veliki teorem: Danas se smatra da je Fermat imao dokaz samo za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$.
- Mali teorem je iskazao u jednom pismu 1640. godine. Eulerova formulacija: Ako p označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s p, osim ako je sam a djeljiv s p.

Pierre de Fermat (1601.–1665.)

- Veliki teorem: Danas se smatra da je Fermat imao dokaz samo za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$.
- Mali teorem je iskazao u jednom pismu 1640. godine. Eulerova formulacija: Ako p označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s p, osim ako je sam a djeljiv s p.
- Svaki neparan prost broj jednoznačno se može zapisati kao razlika dva kvadratna broja.
- Zbroj dva kvadratna broja ne može imati ostatak 3 pri dijeljenju s 4.

Pierre de Fermat (1601.–1665.)

- Veliki teorem: Danas se smatra da je Fermat imao dokaz samo za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$.
- Mali teorem je iskazao u jednom pismu 1640. godine. Eulerova formulacija: Ako p označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s p, osim ako je sam a djeljiv s p.
- Svaki neparan prost broj jednoznačno se može zapisati kao razlika dva kvadratna broja.
- Zbroj dva kvadratna broja ne može imati ostatak 3 pri dijeljenju s 4.
- Hipozeza da se prosti brojevi oblika $4n + 1$ jednoznačno mogu zapisati kao zbrojevi dva kvadratna broja (dokaz: Euler);

Pierre de Fermat (1601.–1665.)

- Veliki teorem: Danas se smatra da je Fermat imao dokaz samo za slučajeve $n = 3$ i $n = 4$.
- Mali teorem je iskazao u jednom pismu 1640. godine. Eulerova formulacija: Ako p označava neparan prost broj, onda je formula $a^{p-1} - 1$ uvijek djeljiva s p, osim ako je sam a djeljiv s p.
- Svaki neparan prost broj jednoznačno se može zapisati kao razlika dva kvadratna broja.
- Zbroj dva kvadratna broja ne može imati ostatak 3 pri dijeljenju s 4.
- Hipozeza da se prosti brojevi oblika $4n + 1$ jednoznačno mogu zapisati kao zbrojevi dva kvadratna broja (dokaz: Euler);
- Par prijateljskih brojeva $(17296, 18416)$.
- Hipoteza da su brojevi oblika $2^{2^n} + 1$ prosti (Euler 1732.: Ne!)

- 1636. Fermatova spirala

- 1636. $\boxed{\text{Fermatova spirala}}$
- razvio je osnove analitičke geometrije ;

- 1636. $\boxed{\text{Fermatova spirala}}$
- razvio je osnove analitičke geometrije ;
- Fermatova metoda određivanja tangente — kasnije;

- 1636. Fermatova spirala
- razvio je osnove analitičke geometrije ;
- Fermatova metoda određivanja tangente — kasnije;
- skupa s Pascalom: teorija vjerojatnosti — dopisivanje 1654. vezano za dvs kockarska problema (Antoine Gombaud, Chevalier de Méré)

Problem kocaka

Isplati li se uz koeficijent 1 : 1 kladiti da će u 24 bacanja para kocaka bar jednom pasti par šestica?

Problem bodova

Dva igrača igraju pravednu igru u krugovima. Onaj koji prvi ostvari 6 pobjeda dobiva sve uloge. Kako podijeliti ulog ako je igra prekinuta pri stanju 5 : 3?

Problem kocaka je lako rješiv, što su ubrzo shvatili i Pascal i Fermat.

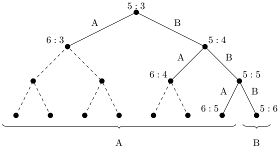
Problem kocaka je lako rješiv, što su ubrzo shvatili i Pascal i Fermat. Problem bodova: Pascal i de Fermat su se kroz pisma suglasili oko njegova rješenja i generalizirali ga te tako u biti otkrili binomnu raspodjelu.

Problem kocaka je lako rješiv, što su ubrzo shvatili i Pascal i Fermat. Problem bodova: Pascal i de Fermat su se kroz pisma suglasili oko njegova rješenja i generalizirali ga te tako u biti otkrili binomnu raspodjelu.

Prvom igraču treba još a (1), a drugom još b (3) bodova do pobjede. Stoga je igra gotova najkasnije za $a + b - 1$ (3) krugova.

Problem kocaka je lako rješiv, što su ubrzo shvatili i Pascal i Fermat. Problem bodova: Pascal i de Fermat su se kroz pisma suglasili oko njegova rješenja i generalizirali ga te tako u biti otkrili binomnu raspodjelu.

Prvom igraču treba još a (1), a drugom još b (3) bodova do pobjede. Stoga je igra gotova najkasnije za $a+b-1$ (3) krugova. U tih $a+b-1$ krugova može nastupiti 2^{a+b-1} (8) jednako vjerojatnih nizova pobjeda. Ako je k od njih u korist prvog igrača, a preostalih l u korist drugog, pravedna podjela uloga je u omjeru $k : l$ (7 : 1).



Kako izbjeći ispisivanje svih 2^{a+b-1} mogućnosti?

Pascal je prvo uočio da nisu bitni redoslijedi, nego samo brojevi pobjeda.

Pascal je prvo uočio da nisu bitni redoslijedi, nego samo brojevi pobjeda. *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.): Pascalov trokut

Indija i Kina (binomni teorem za eksponente 2 i 3);

Pascal je prvo uočio da nisu bitni redoslijedi, nego samo brojevi pobjeda. *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.): Pascalov trokut

Indija i Kina (binomni teorem za eksponente 2 i 3); Omar Khayyam, Jia Xian 11. st.;

Pascal je prvo uočio da nisu bitni redoslijedi, nego samo brojevi pobjeda. *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.): Pascalov trokut

Indija i Kina (binomni teorem za eksponente 2 i 3); Omar Khayyam, Jia Xian 11. st.; Naṣīr Al-Ṭūsī 1265., Yang Hui 1261.

Pascal je prvo uočio da nisu bitni redoslijedi, nego samo brojevi pobjeda. *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.): Pascalov trokut

Indija i Kina (binomni teorem za eksponente 2 i 3); Omar Khayyam, Jia Xian 11. st.; Naṣīr Al-Ṭūsī 1265., Yang Hui 1261. Petrus Apianusa *Kaufmanns Rechnung* (1527.); Michael Stifel *Arithmetica integra* (1544.)

Pascal je prvo uočio da nisu bitni redoslijedi, nego samo brojevi pobjeda. *Le Traité du triangle arithmétique* (1654.): Pascalov trokut

Indija i Kina (binomni teorem za eksponente 2 i 3); Omar Khayyam, Jia Xian 11. st.; Naṣīr Al-Ṭūsī 1265., Yang Hui 1261. Petrus Apianusa *Kaufmanns Rechnung* (1527.); Michael Stifel *Arithmetica integra* (1544.)

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	7	8
3	1	3	6	10	15	21	28	36
4	1	4	10	20	35	56	84	
5	1	5	15	35	70	126		
6	1	6	21	56	126			
7	1	7	28	84				
8	1	8	36					

Christiaan Huygens (1629.–1695.)

De ratiociniis in ludo aleae (1656.)

Christiaan Huygens (1629.–1695.)

De ratiociniis in ludo aleae (1656.)
Ako imamo jednaku šansu osvojiti 3 ili 7 novčića, igra „vrijedi" 5 novčića, dakle je to prikladan ulog.

Christiaan Huygens (1629.–1695.)

De ratiociniis in ludo aleae (1656.)
Ako imamo jednaku šansu osvojiti 3 ili 7 novčića, igra „vrijedi" 5 novčića, dakle je to prikladan ulog.
Izraz *očekivanje* potječe od jednog drugog nizozemskog matematičara, Fransa van Schootena (1615–1660), koji je Huygensovu knjigu preveo na latinski jezik.

Christiaan Huygens (1629.–1695.)

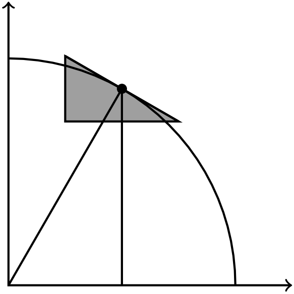
De ratiociniis in ludo aleae (1656.)
Ako imamo jednaku šansu osvojiti 3 ili 7 novčića, igra „vrijedi" 5 novčića, dakle je to prikladan ulog.
Izraz *očekivanje* potječe od jednog drugog nizozemskog matematičara, Fransa van Schootena (1615–1660), koji je Huygensovu knjigu preveo na latinski jezik.
konike, Alhazenov problem

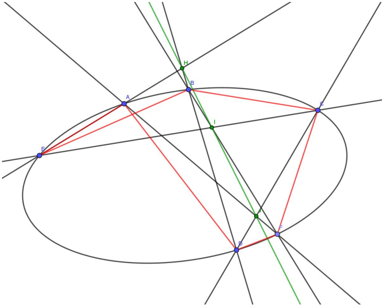
Blaise Pascal (1623.–1662.)

Pascaline,

Blaise Pascal (1623.–1662.)

Pascaline, Pascalov karakteristični trokut i Pascalov teorem o mističnom heksagramu



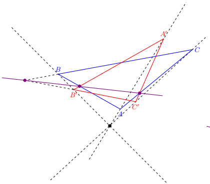


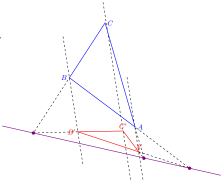
Nastanak projektivne geometrije

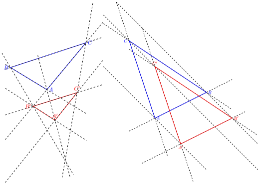
Girard Desargues (1591.–1661.) *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (1639.): svi međusobno paralelni pravci se sijeku u beskonačno dalekoj točki, a sve takve beskonačno daleke točke čine beskonačno dalek pravac

Nastanak projektivne geometrije

Girard Desargues (1591.–1661.) *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan* (1639.): svi međusobno paralelni pravci se sijeku u beskonačno dalekoj točki, a sve takve beskonačno daleke točke čine beskonačno dalek pravac

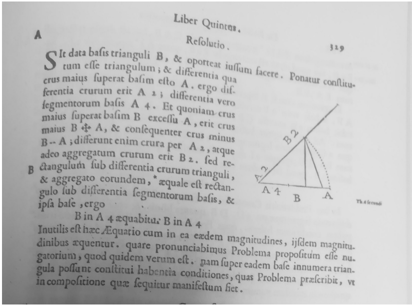






Marin Getaldić (1568. – 1626.)

Neposredni prethodnik utemeljenja analitičke geometrije.
Variorum problematum collectio (1607.), *De resolutione et de compositione mathematica, libri quinque* (objavljeno posthumno, Rim, 1630.)


Liber Quintus.

A Reſolutio. 329

SIt data baſis trianguli B, & oporteat iuſſum facere. Ponatur conſtitutum eſſe triangulum; & differentia qua crus maius ſuperat baſim eſto A. ergo differentia crurum erit A 2; differentia vero ſegmentorum baſis A 4. Et quoniam crus maius ſuperat baſim B exceſſu A, erit crus maius B + A, & conſequenter crus minus B -- A; differunt enim crura per A 2, atque adeo aggregatum crurum erit B 2. ſed re-
B ctangulum ſub differentia crurum trianguli, & aggregato eorundem, * æquale eſt rectangulo ſub differentia ſegmentorum baſis, & ipſa baſe, ergo

B in A 4 æquabitur B in A 4

Inutilis eſt hæc Æquatio cum in ea eædem magnitudines, iiſdem magnitudinibus æquentur. quare pronunciabimus Problema propoſitum eſſe nugatorium, quod quidem verum eſt. nam ſuper eadem baſe innumera triangula poſſunt conſtitui habentia conditiones, quas Problema præſcribit, vt in compoſitione quæ ſequitur manifeſtum fiet.

Nastanak analitičke geometrije

- u antičkoj Grčkoj su se zadaci koje danas smatramo algebarskima razmatrali geometrijski
- neki grčki matematičari su koristili pojmove poput duljina, širina i visina da opišu pozicije (Apolonije, Arhimed)
- neki arapski matematičari (Al-Māhānī) su pokušali neke geometrijske probleme formulirati algebarski
- d'Oresme je dao prikaze ovisnosti *latitude* o *longitudi*
- no, koordinate su još daleko ...
- početkom 17. st. postalo je očito da su za opis fizikalne prirode bitne i druge krivulje osim kružnica i pravaca
- jedan od problema: princip homogenosti u jednadžbama

René Descartes (Cartesius, 1596.–1650.)

Prema vlastitim riječima, svoje prve ideje nove filozofije i analitičke geometrije dobio je u tri sna u noći 10. studenoga 1619., u doba ratovanja na Dunavu.

René Descartes (Cartesius, 1596.–1650.)

Prema vlastitim riječima, svoje prve ideje nove filozofije i analitičke geometrije dobio je u tri sna u noći 10. studenoga 1619., u doba ratovanja na Dunavu.

Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la verité dans les sciences (1637.) — prilog *La Géométrie*

Uvodi uobičajene oznake za konstante i varijable!

La Géométrie, 1637.

Descartesova je ideja: Svaka točka u ravnini može se jednoznačno opisati parom realnih brojeva x i y koji opisuju udaljenosti te točke od dva fiksna, međusobno okomita pravca (koordinatne osi).

La Géométrie, 1637.

Descartesova je ideja: Svaka točka u ravnini može se jednoznačno opisati parom realnih brojeva x i y koji opisuju udaljenosti te točke od dva fiksna, međusobno okomita pravca (koordinatne osi). Uočio je da jednadžbe $f(x, y) = 0$ mogu biti neodređene, ali se njihova rješenja mogu opisati kao koordinate točaka koje čine neku krivulju. Posebno, linearne jednadžbe $ax + by + c = 0$ predstavljaju pravce, a kvadratne $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ konike.

La Géométrie, 1637.

Descartesova je ideja: Svaka točka u ravnini može se jednoznačno opisati parom realnih brojeva x i y koji opisuju udaljenosti te točke od dva fiksna, međusobno okomita pravca (koordinatne osi). Uočio je da jednadžbe $f(x,y)=0$ mogu biti neodređene, ali se njihova rješenja mogu opisati kao koordinate točaka koje čine neku krivulju. Posebno, linearne jednadžbe $ax+by+c=0$ predstavljaju pravce, a kvadratne $ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ konike. Descartes je komentirao i da bi se iste ideje mogle primijeniti u prostoru korištenjem tri koordinate, no tu ideju nije dalje razradio.

Prvi dio *La Géométrie*

Sadrži osnovne crte analitičke geometrije, opisane kroz diskusiju Papusovog zadatka:

Papusov problem

Neka je zadano po n pravaca i kutov u ravnini, te duljina a. Udaljenost točke T do pravca p_i definirajmo kao duljinu odsječka pravca koji prolazi kroz T i s p_i tvori kut ϕ_i.
Zadatak je pronaći geometrijsko mjesto točaka T u ravnini za koje je

1. umnožak udaljenosti do prvih $n/2$ pravaca u konstantnom omjeru prema umnošku udaljenosti prema ostalim pravcima, ako je n paran, odnosno
2. umnožak udaljenosti do prvih $(n+1)/2$ pravaca u konstantnom omjeru prema umnošku udaljenosti prema ostalim pravcima i a, ako je n neparan.

Drugi dio *La Géométrie*

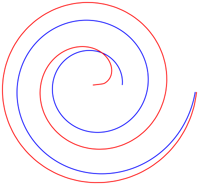
U ovom se dijelu bavi krivuljama, koje dijeli na geometrijske i mehaničke. To odgovara današnjoj podjeli na algebarske i transcendentne krivulje koju je uveo Leibniz.

Drugi dio *La Géométrie*

U ovom se dijelu bavi krivuljama, koje dijeli na geometrijske i mehaničke. To odgovara današnjoj podjeli na algebarske i transcendentne krivulje koju je uveo Leibniz.
Tu je opisao i kubičnu krivulju koja danas nosi ime po njemu: $\boxed{\text{Kartezijev list}}$ $x^3 + y^3 = 3axy$.

Drugi dio *La Géométrie*

U ovom se dijelu bavi krivuljama, koje dijeli na geometrijske i mehaničke. To odgovara današnjoj podjeli na algebarske i transcendentne krivulje koju je uveo Leibniz.
Tu je opisao i kubičnu krivulju koja danas nosi ime po njemu: Kartezijev list $x^3 + y^3 = 3axy$.
Descartes i Fermat su ujedno i prvi koji su se bavili spiralama različitim od Arhimedove.



Treći dio *La Géométrie*

Descartesovo pravilo: Broj pozitivnih rješenja jednadžbe jednak je ili za paran broj manji od broja promjena predznaka koeficijenata (u standardnom redoslijedu).

Treći dio *La Géométrie*

Descartesovo pravilo: Broj pozitivnih rješenja jednadžbe jednak je ili za paran broj manji od broja promjena predznaka koeficijenata (u standardnom redoslijedu).

Ako je zadana jedinična duljina 1, ravnalom i šestarom se mogu konstuirati one i samo one duljine koje se iz 1 mogu izračunati s konačno mnogo operacija $+$, $-$, $\cdot$, $:$ i $\sqrt{\cdot}$.

Treći dio *La Géométrie*

Descartesovo pravilo: Broj pozitivnih rješenja jednadžbe jednak je ili za paran broj manji od broja promjena predznaka koeficijenata (u standardnom redoslijedu).

Ako je zadana jedinična duljina 1, ravnalom i šestarom se mogu konstuirati one i samo one duljine koje se iz 1 mogu izračunati s konačno mnogo operacija $+$, $-$, $\cdot$, : i $\sqrt{\cdot}$.

„Iz gornjega je očigledno da je suma jednadžbe koja ima više korijena uvijek dijeljiva binomom koji se sastoji od nepoznanice umanjene za vrijednost jednog od istinitih korijena, ili plus vrijednost jednog od lažnih korijena."

Može se zamisliti da svaka jednadžba n-tog stupnja ima n rješenja, ali da ta „zamišljena rješenja" ne odgovaraju nikakvoj realnoj vrijednosti.

Teorem (Osnovni teorem algebre)

Svaki polinom stupnja n (s kompleksnim ili realnim koeficijentima) ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva.

Teorem (Osnovni teorem algebre)

Svaki polinom stupnja n (s kompleksnim ili realnim koeficijentima) ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva.

Viète: Prv primjer polinomijalnih jednadžbi stupnja n s n rješenja
Harriot: ako su a, b i c rješenja kubne jednadžbe, ona se može zapisati u obliku $(x-a)(x-b)(x-c)=0$.

Teorem (Osnovni teorem algebre)

Svaki polinom stupnja n (s kompleksnim ili realnim koeficijentima) ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva.

Viète: Prv primjer polinomijalnih jednadžbi stupnja n s n rješenja
Harriot: ako su a, b i c rješenja kubne jednadžbe, ona se može zapisati u obliku $(x-a)(x-b)(x-c)=0$.
1629. Albert Girard (1595.–1632.): Svaka jednadžba stupnja n ima n rješenja, s tim da dozvoljava da se ta rješenja nalaze u nekom još većem skupu nego je to skup kompleksnih brojeva.

Teorem (Osnovni teorem algebre)

Svaki polinom stupnja n (s kompleksnim ili realnim koeficijentima) ima točno n nultočaka u skupu kompleksnih brojeva.

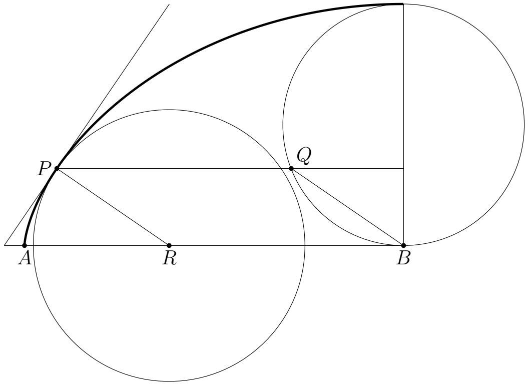
Viète: Prv primjer polinomijalnih jednadžbi stupnja n s n rješenja
Harriot: ako su a, b i c rješenja kubne jednadžbe, ona se može zapisati u obliku $(x-a)(x-b)(x-c)=0$.
1629. Albert Girard (1595.–1632.): Svaka jednadžba stupnja n ima n rješenja, s tim da dozvoljava da se ta rješenja nalaze u nekom još većem skupu nego je to skup kompleksnih brojeva.
skoro 200 godina se nije pokušavalo dokazati da *postoji n rješenja*, nego da *su rješenja kompleksni brojevi*

Descartesovo određivanje tangente na cikloidu

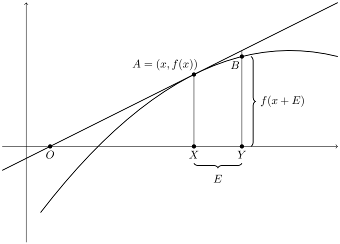
Jedna među matematičarima 17. st. posebno popularna krivulja bila je cikloida. Ime joj je dao Galileo.

Descartesovo određivanje tangente na cikloidu

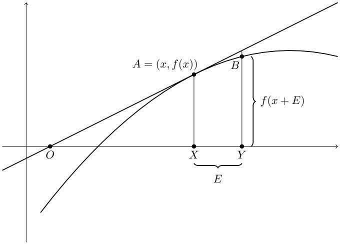
Jedna među matematičarima 17. st. posebno popularna krivulja bila je cikloida. Ime joj je dao Galileo.



Fermatova metoda određivanja tangente

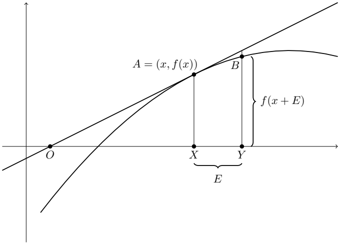


Fermatova metoda određivanja tangente



$$|OX| : (|OX| + E) \approx f(x) : f(x+E) \Rightarrow |OX| \approx \frac{f(x)}{\frac{f(x+E)-f(x)}{E}}.$$

Fermatova metoda određivanja tangente



$$|OX| : (|OX| + E) \approx f(x) : f(x+E) \Rightarrow |OX| \approx \frac{f(x)}{\frac{f(x+E)-f(x)}{E}}.$$

Fermatovo određivanje ekstrema

Potrebno je zadanu dužinu duljine a podijeliti na dva dijela maksimalnog umnoška duljina.

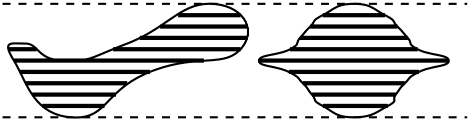
Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (1635.): metoda nedjeljivih veličina

Bonaventura Francesco Cavalieri (1598–1647)

Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota (1635.): metoda nedjeljivih veličina

Ravninske figure smatra sastavljenim od paralelnih dužina, a prostorne od paralelnih likova: Cavalierijeve nedjeljive veličine su beskonačno tanke. Ravninske/prostorne figure, tj. njihove površine/volumeni, stoje u istom omjeru kao ukupnost njihovih nedjeljivih veličina.



Evangelista Torricelli (1608–1647)

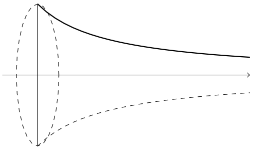
Kombinirao je izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina.

Evangelista Torricelli (1608–1647)

Kombinirao je izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina.

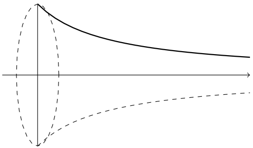
Torricellijeva truba: neograničeno tijelo ograničenog volumena.

Thomas Hobbes: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.*



Evangelista Torricelli (1608–1647)

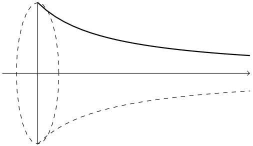
Kombinirao je izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina.
Torricellijeva truba: neograničeno tijelo ograničenog volumena.
Thomas Hobbes: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.*



$$\int_1^\infty \frac{\pi \mathrm{d}x}{x^2} = \pi$$

Evangelista Torricelli (1608–1647)

Kombinirao je izvornu metodu ekshaustije s Cavalijerijevom metodom nedjeljivih veličina.
Torricellijeva truba: neograničeno tijelo ograničenog volumena.
Thomas Hobbes: *Da bi se to smatralo razumnim, ne treba biti geometar ni logičar, nego lud.*



$$\int_1^\infty \frac{\pi \mathrm{d}x}{x^2} = \pi$$

Torricelli je također pokazao da je površina ispod jednog luka cikloide točno tri put veća od površine kruga koji ju generira.

Gilles Personne de Roberval (1602–1675)

Kao i Torricelli, odredio je površinu ispod jednog luka cikloide, no bitnije je da je precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene).

Gilles Personne de Roberval (1602–1675)

Kao i Torricelli, odredio je površinu ispod jednog luka cikloide, no bitnije je da je precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene).
Tom popravljenom metodom, dijeljenjem na tanke pravokutnike, odredio je površine ispod $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).

Gilles Personne de Roberval (1602–1675)

Kao i Torricelli, odredio je površinu ispod jednog luka cikloide, no bitnije je da je precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene).
Tom popravljenom metodom, dijeljenjem na tanke pravokutnike, odredio je površine ispod $y = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$).
Nisu ovo jedini takvi rezultati, ali što vidimo ovdje u usporedbi s modernim pristupom?

Gilles Personne de Roberval (1602–1675)

Kao i Torricelli, odredio je površinu ispod jednog luka cikloide, no bitnije je da je precizirao Cavalierijevu metodu: Prema Robervalu, površina mora biti sastavljena od površina, a ne duljina (i analogno za volumene).
Tom popravljenom metodom, dijeljenjem na tanke pravokutnike, odredio je površine ispod $y = x^n$ $(n \in \mathbb{N})$.
Nisu ovo jedini takvi rezultati, ali što vidimo ovdje u usporedbi s modernim pristupom?
Nedostaje veza između određivanja tangente i površine, te nedostaju efikasne računske metode. Pod utjecajem Cavalierijevih i Torricellijevih rezultata prvi korak u tom smjeru učinio je:

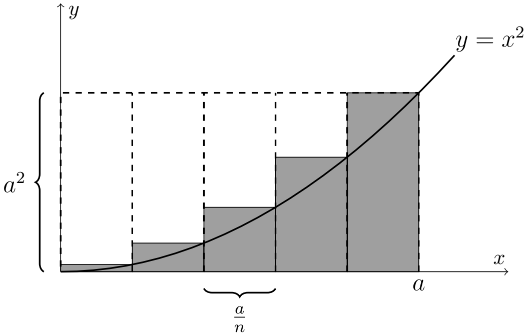
John Wallis (1616.–1703.)

Uveo je simbol ∞ (1655.).

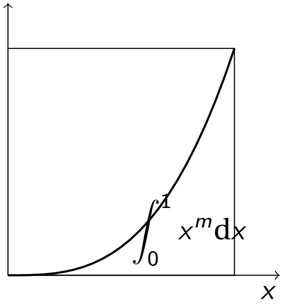
John Wallis (1616.–1703.)

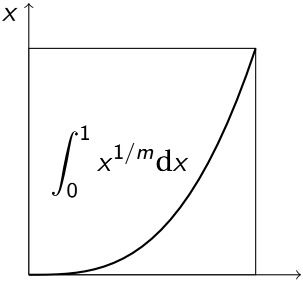
Uveo je simbol ∞ (1655.).

Najznačajnije djelo: *Arithmetica infinitorum* (1656.). Već naslov sugerira glavni Wallisov doprinos: preciznije i efikasnije računske metode za površine i volumene.



Veća novost je da je iz tako dobivenih površina ispod $y = x^n$ dobio površine ispod $y = x^{1/n}$:





Isaac Barrow (1630–1677)

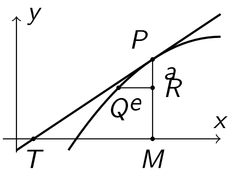
Barrow je tangentu smatrao graničnim slučajem sekante.

Isaac Barrow (1630–1677)

Barrow je tangentu smatrao graničnim slučajem sekante.
Brzina se može odrediti iz puta, kao i obrnuto. Također, put se može dobiti kao površina ispod grafa brzine u ovisnosti o vremenu, a brzina kao koeficijent smjera tangente na graf ovisnosti puta o vremenu.

Isaac Barrow (1630–1677)

Barrow je tangentu smatrao graničnim slučajem sekante.
Brzina se može odrediti iz puta, kao i obrnuto. Također, put se može dobiti kao površina ispod grafa brzine u ovisnosti o vremenu, a brzina kao koeficijent smjera tangente na graf ovisnosti puta o vremenu.
Barrowljeva metoda određivanja tangente: Barrowljev diferencijalni trokut



$$|TM| : y \approx |QR| : |PR| = e : a; \quad f(x, y) = f(x - e, y - a) = 0$$

Primjerice za Kartezijev list $x^3 + y^3 = kxy$:

$$(x-e)^3 + (y-a)^3 = k(x-e)(y-a) \Rightarrow$$

$$3xe^2 + 3ya^2 - 3x^2e - 3y^2a - e^3 - a^3 = kea - kax - key.$$

Primjerice za Kartezijev list $x^3 + y^3 = kxy$:

$$(x-e)^3 + (y-a)^3 = k(x-e)(y-a) \Rightarrow$$

$$3xe^2 + 3ya^2 - 3x^2e - 3y^2a - e^3 - a^3 = kea - kax - key.$$

Članovi s potencijama od e i a većim od 1 i njihovim međusobnim umnošcima se zanemare:

$$3x^2e + 3y^2a = kax + key,$$

Primjerice za Kartezijev list $x^3 + y^3 = kxy$:

$$(x-e)^3 + (y-a)^3 = k(x-e)(y-a) \Rightarrow$$

$$3xe^2 + 3ya^2 - 3x^2e - 3y^2a - e^3 - a^3 = kea - kax - key.$$

Članovi s potencijama od e i a većim od 1 i njihovim međusobnim umnošcima se zanemare:

$$3x^2e + 3y^2a = kax + key,$$

$$e : a = (kx - 3y^2) : (3x^2 - ky).$$

Primjerice za Kartezijev list $x^3 + y^3 = kxy$:

$$(x - e)^3 + (y - a)^3 = k(x - e)(y - a) \Rightarrow$$

$$3xe^2 + 3ya^2 - 3x^2e - 3y^2a - e^3 - a^3 = kea - kax - key.$$

Članovi s potencijama od e i a većim od 1 i njihovim međusobnim umnošcima se zanemare:

$$3x^2e + 3y^2a = kax + key,$$

$$e : a = (kx - 3y^2) : (3x^2 - ky).$$

$$|TM| = y\frac{e}{a} = \frac{kxy - 3y^3}{3x^2 - ky},$$