Povijest matematike

Franka Miriam Brückler

PMF-MO, Zagreb

Svibanj 2022.

Od Newtona i Leibniza do Eulera

Isaac Newton (1642.–1727.)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1687.)

Isaac Newton (1642.–1727.)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1687.)
Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)

Isaac Newton (1642.–1727.)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1687.)
Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)
Newtonova metoda fluksija: fluensi x, y, ... ovisni o t i njihove brzine — fluksije: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ...

Isaac Newton (1642.–1727.)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1687.)
Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)
Newtonova metoda fluksija: fluensi x, y, ... ovisni o t i njihove brzine — fluksije: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ...
koeficijent smjera tangente na krivulju je onda $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

Isaac Newton (1642.–1727.)

Philosophiae naturalis principia mathematica (1687.)

Prvi Newtonovi tekstovi o infinitezimalnom računu: *De Analysi per Aequationes Numero Terminorum Infinitas* (1669./1711.), *De Methodis Serierum et Fluxionum* (1671./1736.), *Tractatus De Quadratura Curvarum* (1691.–1693./1704.)

Newtonova metoda fluksija: fluensi x, y, ... ovisni o t i njihove brzine — fluksije: $\dot{x}$, $\dot{y}$, ...

koeficijent smjera tangente na krivulju je onda $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

U *De Methodis Serierum et Fluxionum* Newton iskazuje temeljni zadatak infinitezimalnog računa: Iz odnosa fluenata odrediti odnos njihovih fluksija i obrnuto.

Deriviranje na Newtonov način

Zadana je jednadžba krivulje: $x^3 - ax^2 + axy - y^3 = 0$.

- Supstituiramo $x + o\dot{x}$ za x i analogno za y: $x^3 + 3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - ax^2 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + axy + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - y^3 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0$.
- Budući da (x, y) mora zadovoljavati polaznu jednadžbu, preostaje: $3\dot{x}ox^2 + 3\dot{x}^2o^2x + \dot{x}^3o^3 - 2a\dot{x}ox - a\dot{x}^2o^2 + a\dot{x}oy + a\dot{y}ox + a\dot{x}\dot{y}o^2 - 3\dot{y}oy^2 - 3\dot{y}^2o^2y - \dot{y}^3o^3 = 0$.
- Podijelimo s o jer on nije 0: $3x^2\dot{x} - 2ax\dot{x} + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3y^2\dot{y} + 3xo\dot{x}^2 + o^2\dot{x}^3 - ao\dot{x}^2 + ao\dot{x}\dot{y} - 3yo\dot{y}^2 - o^2\dot{y}^3 = 0$.
- Zanemarimo o jer je on blizu 0 i dobijemo $3\dot{x}x^2 - 2a\dot{x}x + a\dot{y}x + a\dot{x}y - 3\dot{y}y^2 = 0$.

Integriranje na Newtonov način

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Ovdje koristi $\boxed{\text{binomni red}}$

$\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$

Integriranje na Newtonov način

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Ovdje koristi $\boxed{\text{binomni red}}$ $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots$,što daje

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$$

Integriranje na Newtonov način

$$\dot{y}^2 = \dot{x}\dot{y} + \dot{x}^2 y^2 \Rightarrow \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + x^2}.$$

Tipična karakteristika Newtonovog računa fluksija je korištenje redova, posebno za integriranje. Ovdje koristi binomni red $\sqrt{\frac{1}{4} + x^2} = \frac{1}{2} + x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots$,što daje

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = x^2 - x^4 + 2x^6 - 5x^8 + 14x^{10} + \ldots,$$

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = (x+)\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{2}{7}x^7 - \frac{5}{9}x^9 + \frac{14}{11}x^{11} + \ldots$$

Newton i redovi

Računanje s brojevima i varijablama je slično, pa je stoga prirodno, prikaz brojeva kao decimalnih razlomaka analogno primijeniti na varijable.

Newton i redovi

Računanje s brojevima i varijablama je slično, pa je stoga prirodno, prikaz brojeva kao decimalnih razlomaka analogno primijeniti na varijable.

Iskazuje i čudjenje, da to još nikome osim njemačkom matematičaru Nicolausu Mercatoru (Niklaus Kauffman, 1620.–1687.) nije palo na pamet: *Logarithmotechnia* (1668.)

Mercatorov red

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

(prirodni logaritam)

Newton je otkrio više razvoja u redove potencija, od kojih je najpoznatiji binomni red, a razvio je i metodu za invertiranje redova potencija (određivanje reda potencija koji predstavlja inverznu funkciju od danog reda potencija).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.)

1672.: Huygens ga je podučio matematici fizici; 1673. član *Royal Society*

temelji računarstva i matematičke logike: osmislio poboljšanje *Pascaline*; opisao račun u binarnom brojevnom sustavu; ideja umjetnog, simboličkog jezika logike i uočio analogiju logičkog zaključivanja i računice

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646.–1716.)

1672.: Huygens ga je podučio matematici fizici; 1673. član *Royal Society*

temelji računarstva i matematičke logike: osmislio poboljšanje *Pascaline*; opisao račun u binarnom brojevnom sustavu; ideja umjetnog, simboličkog jezika logike i uočio analogiju logičkog zaključivanja i računice

veliku pozornost pridavao simbolici: $\int \ldots \mathrm{d}x$, $\mathrm{d}x$, $\cdot$, $:$, ...

do 1676. razvio svoje prve ideje infinitezimalnog računa, od kojih je prve objavio 1680-ih godina

pokušaj opovrgavanja tvrdnje iz osnovnog teorema algebre: tvrdio je da se $x^4 + a^4$ ne može faktorizirati na dva kvadratna polinoma jer je mislio da $\sqrt{i}$ nije kompleksan broj

Determinante

- uvedene su kao pomoć za rješavanje sustava linearnih jednadžbi
- Cardano, 16. st.: Cremerovo pravilo za 2×2-sustave
- 1683. Gottfried Wilhelm Leibniz i neovisno o njemu japanski matematičar Takakazu Shinsuke Seki (1642–1708) uvode brojeve, koji se danas zovu determinantama
- Leibniz opisuje L'Hôpitalu uvjet da sustav ima netrivijalno rješenje, a dokazao je i razne rezultate o sustavima koji se danas formuliraju pomoću determinanti (Cramerovo pravilo, Laplaceov razvoj), no to se uglavnom nalazi u njegovim neobjavljenim radovima
- Seki pak opisuje starije kineske metode i kao pomoć računa determinante do veličine 5×5

Leibniz i redovi

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize.

Leibniz i redovi

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize.

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \ldots =?$$

Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2 - \frac{1}{n+1}$

Leibniz i redovi

Dok su Newtonovi rezultati u izvornom obliku danas teško čitljivi, Leibnizov stil postao je temelj moderne analize.

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\ldots=?$$

Leibniz je uočio da su svi sumandi oblika $\frac{2}{n(n+1)}=\frac{2}{n}-\frac{2}{n+1}$ pa su parcijalne sume tog reda jednake $2-\frac{1}{n+1}$

Ako je svaki pribrojnik d_n razlika dva uzastopna člana nekog niza (a_n), onda je $\sum_{i=1}^{n} d_i = a_1 - a_{n+1}$: diferenciranje je inverzno sumiranju!

1673. je otkrio i Leibnizov red

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Taj red je skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682.

1673. je otkrio i Leibnizov red

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Taj red je skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682.

Leibnizov je red bio već 1671. poznat škotskom matematičaru James Gregory-ju (1638–1675)

1673. je otkrio i Leibnizov red

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

Taj red je skupa s po njemu nazvanom kriteriju konvergencije reda objavio 1682.

Leibnizov je red bio već 1671. poznat škotskom matematičaru James Gregory-ju (1638–1675)

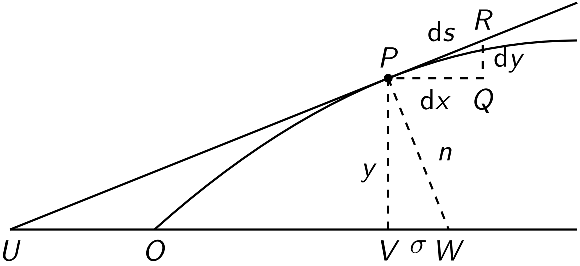
Gregory-Mādhavin red

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots$$

(još ranije ga je otkrio i za račun π na 11 decimala koristio indijski matematičar Mādhava (1350–1425))

Leibnizov infinitezimalni račun

Temelji se na analitičkoj geometriji i generalizaciji Pascalovog karakterističnog trokuta. Neka je zadana krivulja $y = f(x)$ i točka P na njoj. Tada je karakteristični trokut oko te točke ($\triangle PQR$ s katetama $\mathrm{d}x$ i $\mathrm{d}y$ kojem je hipotenuza dio tangente na krivulju u točki P) sličan $\triangle PVW$ kojeg tvore normala, os apscisa i okomica iz P na nju te slijedi $\sigma \mathrm{d}x = y \mathrm{d}y$. „Sumacija" daje $\int \sigma \mathrm{d}x = \int y \mathrm{d}y$.



Iz poznavanja veze σ i y dobiva se veza x i y, tj. rješava se problem integriranja.

Primjer

Neka je $\sigma = \frac{a^2}{y}$. *Tada je* $a^2 \mathrm{d}x = y^2 \mathrm{d}y$. *Dobije se* $\frac{y^3}{3} = a^2 x$ *kao jednadžbu krivulje zadanog svojstva.*

Leibniz je isprva kao oznaku integriranja koristio *omn.* – utjecaj Cavalierija koji je kvadrature nazivao *omnes lineae figurae*. U to doba je za diferenciju dviju susjednih ordinata (kasniji dy) koristio l. Tako primjerice 1675. piše $\mathrm{omn.}\, xl = x\, \mathrm{omn.}\, l - \mathrm{omn.}\overline{\mathrm{omn.}\, l}$. No, upravo te godine se odlučio za simbol $\int$ kao prikladniji za integriranje, jer je ono za njega bilo oblik sumacije. Primijetio je i da aku su l-ovi i x-evi duljine, onda je $\int l$ površina, a $\int xl$ volumen. Ubrzo je uveo i simbol diferencijala, d, isprva u nazivniku ($\frac{y}{\mathrm{d}}$), onda u modernom obliku dy. Koristeći tu simboliku je 1677. dokazao formule za diferenciranje produkata i kvocijenata.

Iako su oba koncepta sadržajno vrlo slična, vidljive su bitne razlike Newtona i Leibniza. Možda najbitnija je poimanje koeficijenta smjera tangente: kod Newtona on je kvocijent dviju konačnih veličina $\dot{y}$ i $\dot{x}$, a kod Leibniza infinitezimalnih $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}x$.

Iako su oba koncepta sadržajno vrlo slična, vidljive su bitne razlike Newtona i Leibniza. Možda najbitnija je poimanje koeficijenta smjera tangente: kod Newtona on je kvocijent dviju konačnih veličina $\dot{y}$ i $\dot{x}$, a kod Leibniza infinitezimalnih $\mathrm{d}y$ i $\mathrm{d}x$.
Najpoznatiji kritičar bio je irski biskup i filozof George Berkeley (1684–1753), koji je 1734. postavio pitanje: *Što su fluksije? Brzine nestajućih prirasta? A što su ti nestajući prirasti? Niti su konačne veličine nit beskonačno male, a nisu niti ništa. Bismo li ih smjeli nazvati duhovima umrlih veličina?*

O sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva

- *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x. – Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*

O sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva

- *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x. – Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*
- 1684. Leibniz prvi put objavljuje svoje rezultate, Newtonova prva objava dio je njegove *Principia*-e (1687.)

O sukobu Newtona i Leibniza oko prvenstva

- *6a 2c d ae 13e 2f 7i 3l 9n 4o 4q 2r 4s 9t 12v x. – Data Aequatione quotcumque, fluentes quantitates involuvente fluxiones invenire, et vice versa*
- 1684. Leibniz prvi put objavljuje svoje rezultate, Newtonova prva objava dio je njegove *Principia*-e (1687.)
- svađa se intenzivira 1710., kad je John Keill u *Transactions of the Royal Society of London* optužio Leibniza za plagijat
- 1711. Leibniz traži ispriku od *Royal Society* te je imenovana komisija za utvrđivanje prvenstva

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Definicija (Funkcija, Johann Bernoulli, 1694.)

Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti.

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Definicija (Funkcija, Johann Bernoulli, 1694.)

Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti.

Johann i Jacob: diferencijalne jednadžbe, širenje infinitezimalnog računa

Johann Bernoulli (1667–1748)

Leibnizov prijatelj, zaslužan za izraz integriranje (*calculus integralis*; Leibniz je predlagao *calculus summatoris*).

Definicija (Funkcija, Johann Bernoulli, 1694.)

Ovdje funkcijom nazivamo varijablu neke veličine, koja je na bilo kakav način sastavljena od te veličine i konstanti.

Johann i Jacob: diferencijalne jednadžbe, širenje infinitezimalnog računa

Johann je tijekom boravka u Parizu podučio markiza Marquis de L'Hôpital (Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital, 1661–1704) tehnikama infinitezimalnog računa. L'Hopital je 1696. objavio prvi udžbenik *diferencijalnog* računa, no veći dio sadržaja pripisuje se Johannu, uključivo poznatog L'Hôpitalovog pravila.

Problem brahistohrone (1696.)

Potrebno je među svim krivuljama koje prolaze kroz dvije točke koje nisu na istoj visini niti jedna točno iznad druge odrediti onu krivulju po kojoj će se materijalna točka koja klizi bez trenja, samo pod utjecajem sile teže, najbrže spustiti od više do niže točke.

Problem su riješili Johann, Jacob, Newton, Leibniz i L'Hôpital. Johannovo rješenje je elegantnije: Uočio je analogiju s lomom svjetlosti.

Problem brahistohrone (1696.)

Potrebno je među svim krivuljama koje prolaze kroz dvije točke koje nisu na istoj visini niti jedna točno iznad druge odrediti onu krivulju po kojoj će se materijalna točka koja klizi bez trenja, samo pod utjecajem sile teže, najbrže spustiti od više do niže točke.

Problem su riješili Johann, Jacob, Newton, Leibniz i L'Hôpital. Johannovo rješenje je elegantnije: Uočio je analogiju s lomom svjetlosti.Jacobovo rješenje je kompliciranije, ali je utemeljilo varijacijski račun.

Jacoba Bernoulli (1654.–1705.): *Ars Conjectandi* (1713.)

1. Detaljna diskusija Huygensove *De ratiociniis in aleae ludo*
2. Kombinatorika
3. Zadaci vezani za igre na sreću
4. Primjene vjerojatnosti na „civilna, moralna i ekonomska" pitanja — vjerojatnost *a priori* vs. vjerojatnost *a posteriori*

Jacoba Bernoulli (1654.–1705.): *Ars Conjectandi* (1713.)

1. Detaljna diskusija Huygensove *De ratiociniis in aleae ludo*
2. Kombinatorika
3. Zadaci vezani za igre na sreću
4. Primjene vjerojatnosti na „civilna, moralna i ekonomska" pitanja — vjerojatnost *a priori* vs. vjerojatnost *a posteriori*

Teorem (Zlatni teorem)

Neka se broj povoljnih slučajeva prema broju nepovoljnih slučajeva odnosi točno ili približno kao $\frac{r}{s}$, *dakle prema broju svih mogućih slučajeva kao* $\frac{r}{r+s} = \frac{r}{t}$ *(ako se stavi* $r+s=t$*), gdje je posljednji omjer između granica* $\frac{r+1}{t}$ *i* $\frac{r-1}{t}$. *Sad se mogu, kako je dokazano, izvesti toliko opažanja da proizvoljno mnogo (npr.* c*) puta bude vjerojatnije da je omjer povoljnih prema svim provedenom opažanjima unutar tih granica, nego da je izvan njih, dakle da niti je veći od* $\frac{r+1}{t}$, *niti je manji od* $\frac{r-1}{t}$.

Primjer

Stvarni sastav urne je 3000 bijelih i 2000 crnih pokusa, ali to nije poznato osobi koja će iz urne izvlačiti kuglice jednu po jednu, s vraćanjem. Pitanje je, može li ta osoba to učiniti neki broj puta tako da 10, 100, 1000, . . . puta bude vjerojatnije (i naposlijetku 'moralno sigurno') da omjer frekvencija izvučenih bijelih i crnih kuglica bude jednak stvarnom $(3:2)$*, nego da taj omjer bude neki drugi.*

Primjer

Stvarni sastav urne je 3000 bijelih i 2000 crnih pokusa, ali to nije poznato osobi koja će iz urne izvlačiti kuglice jednu po jednu, s vraćanjem. Pitanje je, može li ta osoba to učiniti neki broj puta tako da 10, 100, 1000, ... puta bude vjerojatnije (i naposlijetku 'moralno sigurno') da omjer frekvencija izvučenih bijelih i crnih kuglica bude jednak stvarnom ($3:2$)*, nego da taj omjer bude neki drugi.*

Koristeći svoj „zlatni teorem", Bernoulli je na kraju četvrtog dijela Ars Conjectandi pokazao da ako želimo 1000 puta veću vjerojatnost da omjer apsolutnih frekvencija bijelih i crnih kuglica bude $3:2$ nego neki drugi, minimalni broj izvlačenja je 25500.

Brook Taylor i Colin Maclaurin

B. Taylor (1685.–1731.): *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) — opći oblik Taylorovog reda izveo iz Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule kad „prirast nestaje"

Brook Taylor i Colin Maclaurin

B. Taylor (1685.–1731.): *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) — opći oblik Taylorovog reda izveo iz Newton-Gregoryjeve interpolacijske formule kad „prirast nestaje"
C. Maclaurin (1698.–1746.): *Treatise of fluxions* (1742.) — prvi sustavni prikaz Newtonovog računa fluksija i pokušaj odgovora na Berkeleyevu kritiku.