Geometrija baždarnih teorija

Filip Požar

27. siječnja 2022.

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Motivacija

Baždarne teorije

Baždarne teorije su teorije invarijantne na baždarne (lokalne) transformacije.
Primjeri :

- Klasična elektrodinamika kao $U(1)$ baždarna teorija
- Kvantna kromodinamika kao $SU(3)$ baždarna teorija
- Standardni model kao $U(1) \times SU(2) \times SU(3)$ baždarna teorija

Klasična elektrodinamika kao U(1) baždarna teorija

Maxwellove jednadžbe

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} &= \frac{-1}{c}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \vec{J} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \tag{0}$$

se uvođenjem elektromagnetskog potencijala $A^\mu = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right)$ mogu zapisati kao

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu (\partial_\alpha A^\alpha) = J^\mu \tag{1}$$

(ekvivalentna jednadžba je $\partial_\alpha F^{\alpha\mu} = J^\mu$).

Klasična elektrodinamika kao U(1) baždarna teorija

Jednadžba

$$\partial_\alpha \partial^\alpha A^\mu - \partial^\mu \left(\partial_\alpha A^\alpha\right) = J^\mu \tag{2}$$

ima svojstvo da ako je A^μ rješenje, da je onda njeno rješenje i

$$A^\mu \to A^\mu + \frac{1}{q}\partial^\mu \chi \ . \tag{3}$$

Dakle, teorija klasične elektrodinamike je invarijantna na posebnu familiju lokalnih transformacija elektromagnetskog potencijala.

Uvod u topologiju i diferencijalnu geometriju

Topologija

Skup X nazivamo topološki prostor ako nad njim postoji definirana *topologija* $\tau_X \subseteq \mathcal{P}(X)$ koja zadovoljava :

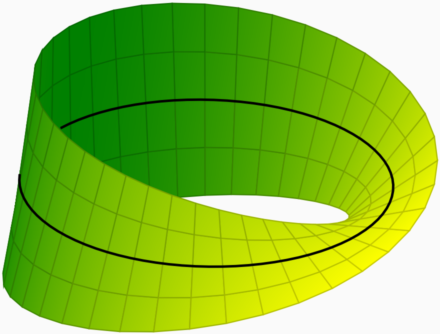
- $\emptyset, X \in \tau_X$
- Proizvoljna unija elemenata iz τ_X je sadržana u τ_X
- Konačni presjek elemenata iz τ_X je sadržan u τ_X

Otvoreni skupovi u prostoru X se definiraju kao elementi topologije τ_X.
Primjer topološkog prostora : $(\mathbb{R}, \tau_\mathbb{R})$ gdje je $\tau_\mathbb{R}$ skup svih otvorenih intervala na brojevnom pravcu.

- Topologija je najmanje strukture nad skupom što moramo definirati da bismo mogli definirati neprekidne funkcije.

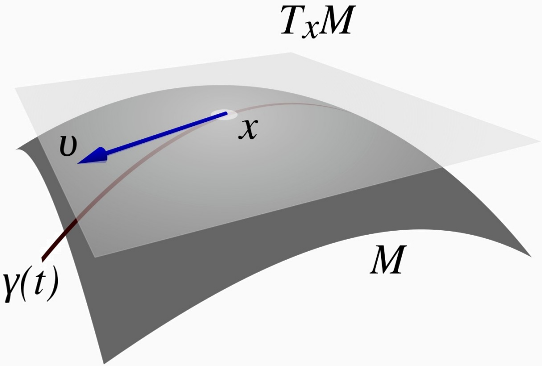
Glatke topološke mnogostrukosti

- Topološki prostori koji su generalizacije glatkih ploha i krivulja
- Imaju dovoljno definirane strukture da nad njima možemo definirati glatke funkcije
- Lokalno su ravni prostori



Diferencijalna geometrija

- Na općenitoj glatkoj mnogostrukosti M je teško definirati vektorska polja
- Oko svake točke prostor izgleda lokalno euklidski pa svakoj točki pridružujemo vektore iz njezinog lokalnog prostora (tangentnog prostora)



Tangentni vektori

U svakoj točki $x \in M$ možemo definirati prostor $T_x M$ razapet vektorima $(\partial_\mu)_x$

- Proizvoljni $V_x \in T_x M$ se razvija u bazi $\{x^\mu\}$ kao

$$V_x = V^\mu (\partial_\mu)_x \tag{4}$$

- Prijelaz iz baze generirane koordinatama $\{x^\mu\}$ u bazu generiranu koordinatama $\{y^{\mu\prime}\}$ je dan kao

$$V_x^{\mu\prime} = \frac{\partial y^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} V_x^\alpha \tag{5}$$

1-forme

- 1-forma u točki $p \in M$ je dual tangentnog vektora u točki p.
- Skup svih 1-formi u točki nazivamo kotangentni prostor
- Konvencija je dual vektora ∂_μ definiranog koordinatama $\{x^\mu\}$ označavati dx^μ

Ako se 1-forma u točki p, ω_p, razvija u bazi koordinata $\{x^\mu\}$ i $\{y^{\mu\prime}\}$ kao

$$\omega_p = (\omega_p)_\mu \, dx^\mu = (\omega_p)_{\mu\prime} \, dy^{\mu\prime} \tag{6}$$

Onda je veza komponenti

$$(\omega_p)_{\mu\prime} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\mu\prime}} (\omega_p)_\alpha \tag{7}$$

Usporedbe radi, za vektore smo iskazali

$$V_x^{\mu\prime} = \frac{\partial y^{\mu\prime}}{\partial x^\alpha} V_x^\alpha \tag{8}$$

Vektorska polja i diferencijalne 1-forme

- Vektorsko polje X je funkcija $p \mapsto X_p$.
- Diferencijalna 1-forma ω je $p \mapsto \omega_p$.
- Tenzorsko polje tipa (k, l) je tenzorski produkt k vektorskih polja i l diferencijalnih 1-formi

Pitanje : Kako definirati *neprekidno* vektorsko polje ako na skupu $\{X_p : p \in M\}$ nemamo definiranu topologiju?

Odgovor : Definiramo mnogostrukost koju zovemo *tangentni svežanj* TM

$$TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M \, . \tag{9}$$

Svežnjevi

Definicija svežnja

Svežanj (E, π, M) (ili $E \xrightarrow{\pi} M$) je uređena trojka glatkih mnogostrukosti E i M te surjektivog preslikavanja $\pi : E \to M$.

- Mnogostrukost E zovemo *totalni prostor*
- Mnogostrukost M zovemo *bazni prostor*
- Funkciju π zovemo *projekcija*

U svakoj točki $p \in M$ definiramo *vlakno* točke p, E_p, kao prasliku projekcije

$$E_p := \pi^{-1}(p) \; . \tag{10}$$

Vlaknasti svežanj

Vlaknasti svežanj je uređena četvorka (E, π, M, F) s *lokalnom trivijalizacijom*, t.j., za svaku točku p postoji homeomorfizam ψ_p za kojeg sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd}
\pi^{-1}(O_p) \arrow[r, "\psi_p"] \arrow[d, "\pi"'] & O_p \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\
O_p &
\end{tikzcd}$$

gdje prostor F zovemo *standardno vlakno*, a π_1 je kanonska projekcija na 1. varijablu

$$\pi_1(m, f) = m \,. \tag{11}$$

Tangentni svežanj kao vektorski svežanj

Svežanj (TM, π, M), gdje $\pi : X_p \in TM \mapsto p \in M$, je vektorski svežanj zbog teorema koji nalaže da za svaki $p \in M$, prostor T_pM je realni vektorski prostor dimenzije $\dim M$

$$\forall p, q \in M : \quad T_pM \simeq T_qM \simeq \mathbb{R}^{\dim M} . \tag{12}$$

Ako definiramo *prerez svežnja* kao funkciju $\sigma : M \to E$ ($E = TM$ u ovom primjeru), dobivamo da su (npr. glatka) vektorska polja ništa drugo nego (glatki) prerezi tangentnog svežnja.

Glavni G-svežanj

- Neka je G Liejeva grupa i $\triangleleft\colon M \times G \to M$ njeno (slobodno!) desno djelovanje na mnogostrukosti M
- Glavni G-svežanj je svežanj (P, π, M) koji za standardno vlakno ima Liejevu grupu G

Glavni G-svežanj je dovoljno strukture da nad mnogostrukosti M definiramo geometrijski pojam *koneksije* i *zakrivljenosti koneksije*. Kroz seminar smo prepoznali nekoliko objekata iz fizike baš kao koneksiju i zakrivljenost.

Pridruženi svežanj

- Neka je G Liejeva grupa i F glatka mnogostrukost opremljena s lijevim G-djelovanjem $\triangleright \colon G \times M \to M$
- Pridruženi svežanj (glavnom G svežnju (P, π, M) s obzirom na vlakno F) je vlaknasti svežanj (P_F, π_F, M, F)

Pridruženi svežanj se jednom kada imamo glavni G-svežanj i lijevo djelovanje na vlaknu F "algoritamski" generira. Pridruženi svežnjevi su tako definirani da su u stanju reproducirati nama poznata transformacijska svojstva (pod djelovanjem grupe G) raznih objekata koje smo susretali u fizici.

- Pridruženi svežanj se koristi za definiciju *kovarijantne derivacije*

Rezultati

OTR - GL(d,$\mathbb{R}$) baždarna teorija

U seminaru smo uspjeli konstruirati:

- Svežanj tetrada kao glavni $GL(d, \mathbb{R})$ svežanj
- Tangentni svežanj i tenzorske svežnjeve bilo kojeg tipa kao pridružene svežnjeve
- Christoffelov simbol Γ kao Yang-Mills polje
- Riemannov tenzor kao jakost Yang-Mills polja

KED - U(1) baždarna teorija

Seminar smo završili diskusijom gdje smo za jedan glavni $U(1)$-svežanj izračunali :

- Yang-Mills polje i prepoznali slaganje (do na faktor) s elektromangnetskim potencijalom A_μ
- Jakost Yang-Mills polja i prepoznali slaganje (do na faktor) s Faradayevim tenzorom $F_{\mu\nu}$
- Baždarnu kovarijantnu derivaciju

Literatura

Literatura

- S.B. Sontz : Principal Bundles - The Classical Case
- J.C Baez, J.P. Munian : Gauge Fields, Knots And Gravity (Volume 4)
- Ivica Smolić - Diferencijalna Geometrija u Fizici (skripta)
- M. Fecko - Differential Geometry and Lie Groups for Physicists (1st Edition)
- E. de Faria, W. de Melo - Mathematical Aspects of Quantum Field Theory (1st Edition)