Utjecaj kozmološkog širenja na lokalnu fiziku

Matej Vugrinec

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Sadržaj

- Uvod
- Newtonove jednadžbe u širećem svemiru
- Harmonički oscilator u širećem svemiru
- Utjecaj širenja svemira na gravitacijski čvrsto vezane sustave
- „Lensing" pod utjecajem kozmološkog širenja
- Kozmološko širenje u budućnosti svemira
- Zaključak

Uvod

- Einsteinove jednadžbe:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

- FLRW metrika:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\Omega^2\right]$$

- k – zakrivljenost prostora
- $a(t)$ – faktor skale

Newtonove jednadžbe u širećem svemiru

- analiza klasičnog atoma
- kozmološko širenje - $a(t)$
- koordinatni sustavi: $\{R, \phi, \theta\}$ i $\{r, \phi, \theta\}$

$$R = a(t)r$$

- diferenciranje i uvrštavanje – „kozmološki član”:

$$\ddot{R} = \frac{\ddot{a}}{a}R$$

- kozmološki član + angularni moment elektrona + Coulombova sila
- jednadžba gibanja:

$$\ddot{R} = -\frac{C}{R^2} + \frac{L^2}{R^3} + \frac{\ddot{a}}{a}R$$

Newtonove jednadžbe u širećem svemiru

- efektivni potencijal

$$V(R,t) = -\frac{\ddot{a}}{2a}R^2 - \frac{C}{R} + \frac{L^2}{2R^2}$$

- de Sitter prostorvrijeme - $a(t) = a_0 e^{t/T_{exp}}$

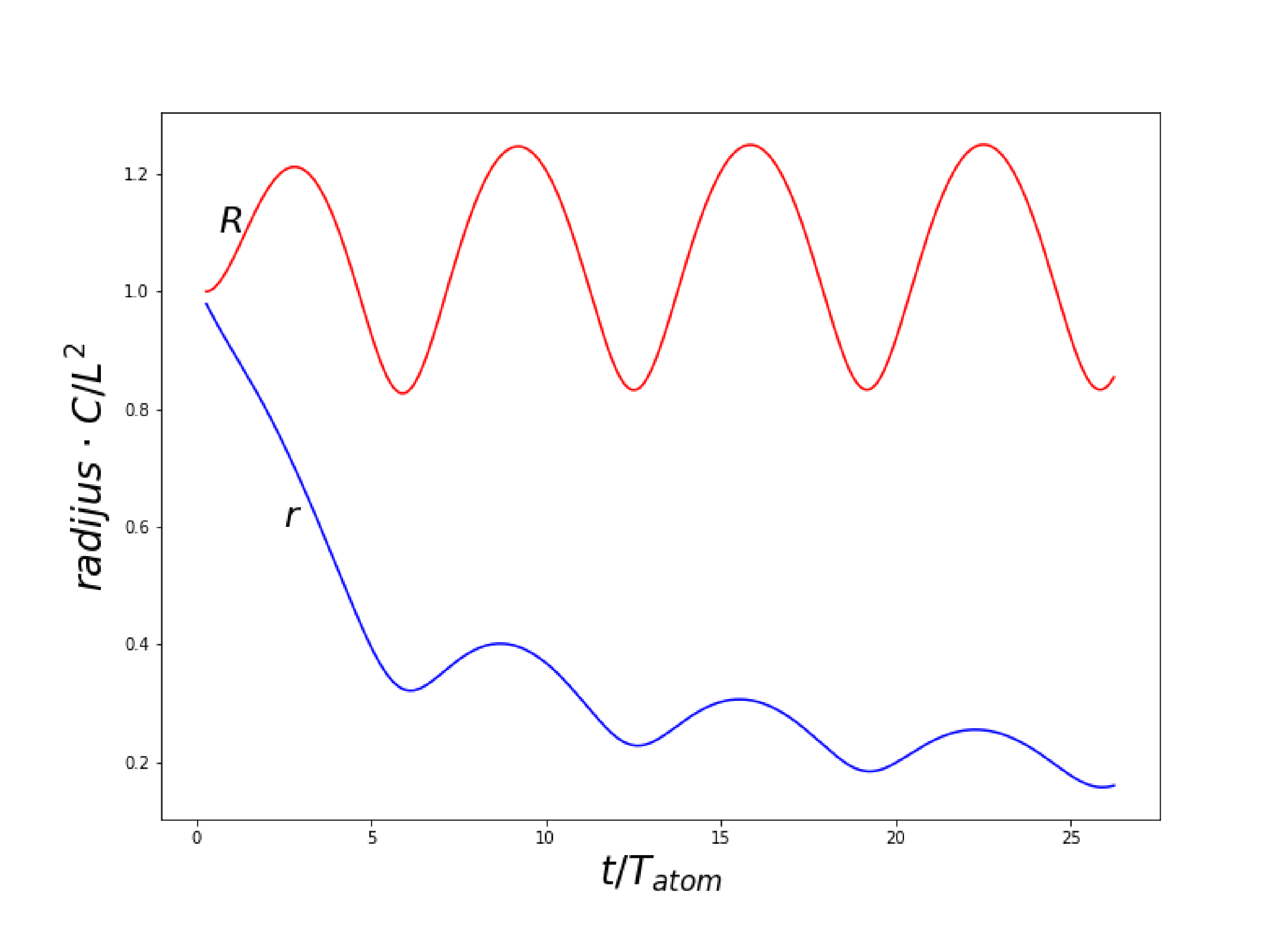
$$V(R) = -\frac{R^2}{2T_{exp}^2} - \frac{C}{R} + \frac{L^2}{2R^2}$$

- $T_{atom} \equiv \frac{L^3}{C^2}$ $(t_{rev} = 2\pi T_{atom})$, ponašanje sustava određeno omjerom $\frac{T_{atom}}{T_{exp}}$
- postojanje kritične vrijednosti
- Za de Sitter metriku atom se ili širi zajedno sa svemirom ili se uopće ne širi tj. nema djelomičnog širenja!

Newtonove jednadžbe u širećem svemiru

- nerelativistički opis u skladu s relativističkim
- za faktor skale $a(t) \propto t^{2/3}$ atom se djelomično širi (teorija, efekt reda 10^{-67})
- numerički ispitana situacija za takav faktor skale:
  1. nema kozmološkog širenja
  2. elektron u dnu potencijalne jame
  3. $R(0) = \frac{L^2}{C}, \frac{dR}{dt}(t=0) = 0$
  4. uključivanje kozmološkog širenja
- nemogućnost pronalaska kritične vrijednosti

Newtonove jednadžbe u širećem svemiru



Harmonički oscilator u širećem svemiru

- potencijal izotropnog harmoničkog oscilatora + efektivni potencijal kozmološkog širenja:

$$L = \frac{m}{2}\dot{R}^2 - \frac{m}{2}\omega^2(t)R^2$$

$$\omega^2(t) \equiv \omega_0^2 - \frac{\ddot{a}(t)}{a(t)}$$

- bez smanjenja općenitosti -1D Schrödingerova jednadžba:

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{m\omega^2(t)}{2}x^2\Psi$$

- rješenja poznata i dana s:

$$\psi_n(x,t) = \left(\frac{1}{2^n n!}\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\right)^{\frac{1}{2}} exp\left[-i\left(n+\frac{1}{2}\right) + \frac{im}{2\hbar}\left(i\dot{\gamma} + \frac{\dot{s}}{s}\right)x^2\right]H_n(\beta x)$$

Harmonički oscilator u širećem svemiru

- *s(t)* rješenje jednadžbe:

$$\ddot{s} - s^{-3} + \omega^2(t)s = 0$$

- $\dot{\gamma}$ i β zadani pomoću:

$$\dot{\gamma}s^2 = 1, \qquad \beta = \left(\frac{m\dot{\gamma}}{\hbar}\right)^{1/2}$$

- de Sitter metrika: $a(t) = a_0 e^{t/T_{exp}}$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - T_{exp}^{-2}$$

- Frekvencija je promijenjena, ali ostaje vremenski neovisna.
- $s = \omega^{-1/2}$ rješava gornju jednadžbu

Harmonički oscilator u širećem svemiru

- veličina harmoničkog oscilatora: $\langle X^2 \rangle_n = \langle \psi_n | x^2 | \psi_n \rangle$
- gustoća vjerojatnosti $|\psi_n\,(x,t)|^2$ istog oblika kao za vremenski neovisan HO

$$\langle X^2 \rangle_n = \frac{n + 1/2}{\beta^2} = \frac{(n + 1/2)\hbar}{m}\omega$$

- Harmonički oscilator se ne širi zajedno sa svemirom, već mu se promijeni frekvencija.
- ako vrijedi $\omega_0^2 \leq T_{exp}^{-2}$ - ova analiza nije valjana jer $\omega^2 \leq 0$

McVittie metrika

- Pretpostavke:

1. Materija u svemiru raspoređena je sfernosimetrično oko ishodišta gdje se nalazi masivna čestica.
2. Ne postoji ukupni tok materije od ishodišta ili prema ishodištu koji se razlikuje od 0.
3. Tlak u cijelom svemiru je izotropan, što i proizlazi iz 2. pretpostavke jer bi inače postojao preferirani smjer brzine čestica.

$$ds^2 = -\frac{\left(1 - \frac{m(t)}{2\bar{r}}\right)^2}{\left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}}\right)^2} \mathrm{d}t^2 + a^2(t)\left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2)$$

$$r \equiv \bar{r}\left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^2$$

- 2. pretpostavka zadovoljena s: $\frac{\dot{m}}{m} = -\frac{\dot{a}}{a} \longrightarrow m(t) = \frac{m_H}{a(t)}$

McVittie metrika

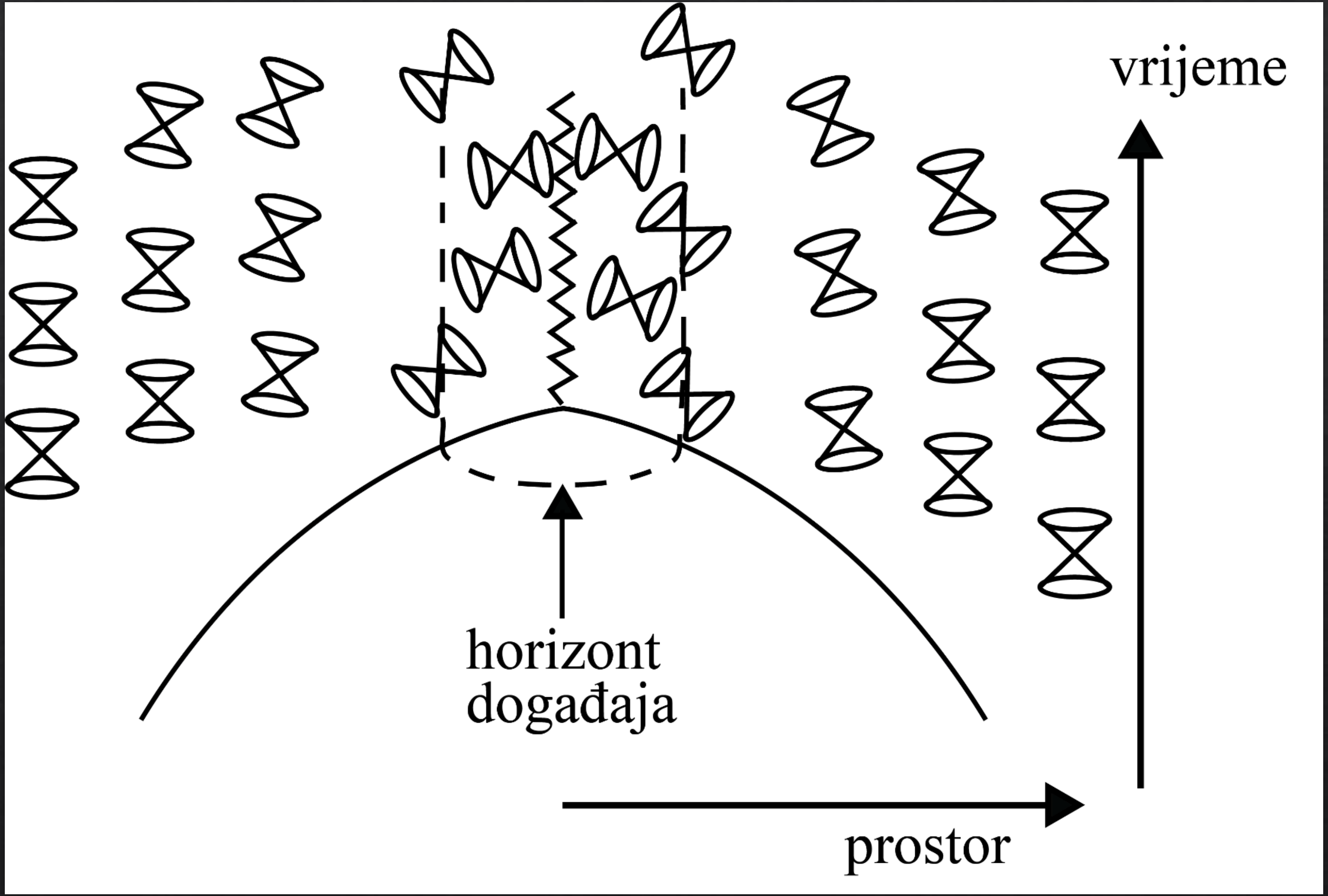
- za *m=0* reproducirana FLRW metrika
- za *a=1* reproducirana Schwarzschildova metrika (Schwarzschildovo rješenje)
- relativistička zvijezda uniformne gustoće dana Nolanovim rješenjem, na površini zvijezde vrijedi McVittie metrika($\bar{r} = \bar{r}_0$)

$$A_{\Sigma_0} = \iint_{\Sigma_0} d\theta d\phi \sqrt{g_{\Sigma_0}}$$

$$A_{\Sigma_0}(t) = 4\pi a^2(t)\bar{r}_0{}^2 \left(1 + \frac{m(t)}{2\bar{r}_0}\right)^4 = 4\pi a^2(t) r_0{}^2$$

- Površina takve zvijezde se povećava pod utjecajem kozmološkog širenja.

Horizont događaja



Utjecaj kozmološkog širenja na crnu rupu

- Schwarzschild-de Sitter metrika (statičke koordinate, $m \neq m(t)$):

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{R} - \frac{\Lambda R^2}{3}\right)^{-1} dR^2 + R^2 d\Omega^2$$

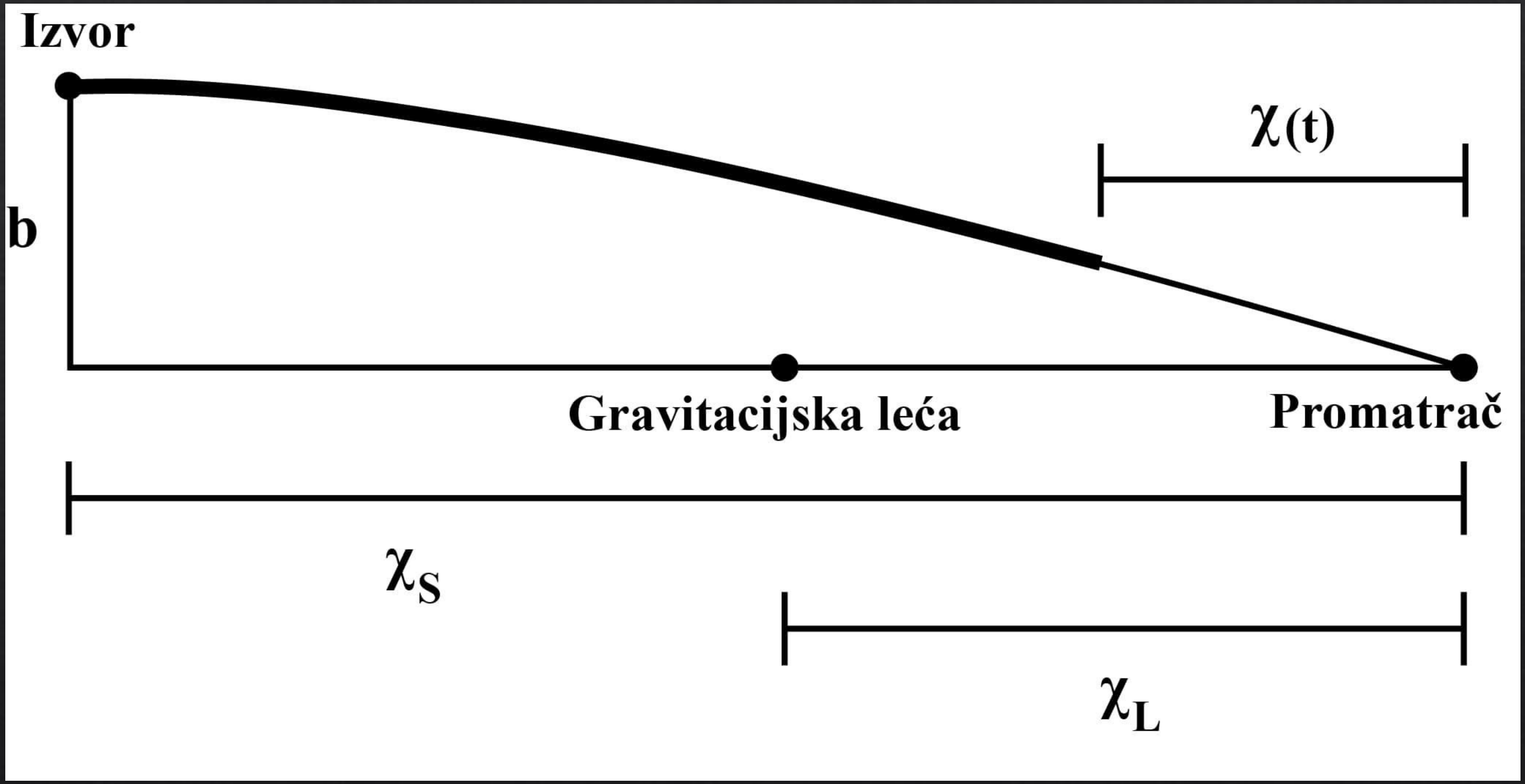
- McVittie metrika može se napisati na taj način. (m $= m_H -$ masa centralnog objekta)
- singularitet u $\bar{r} = m/2$ (tlak), problemi s interpretacijom, nestaje u slučaju da vrijedi $\dot{H} \equiv \frac{d}{dt}\left(\frac{\dot{a}}{a}\right) = 0$ (SdS metrika)
- intepretacija: horizont događaja SdS crne rupe

$$A_{\Sigma_1} = \iint_{\Sigma_1} d\theta d\phi \sqrt{g_{\Sigma_1}}$$

$$A_{\Sigma_1} = 16\pi a^2 m^2 = 16\pi m_H^2$$

- Površina SdS crne rupe se ne povećava pod utjecajem kozmološkog širenja.
- Sultana-Dyer rješenje, $a(t) \propto t^{2/3}$, povećanje crne rupe, problemi

„Lensing" u McVittie prostorvremenu



„Lensing" u McVittie prostorvremenu

- masa centralnog objekta m, koordinata r
- pokrata: $\mu \equiv \frac{m}{2a(t)r}$

$$ds^2 = -\left(\frac{1-\mu}{1+\mu}\right)^2 \mathrm{d}t^2 + a^2(t)(1+\mu)^4(dr^2 + r^2 d\Omega^2)$$

- sferna simetrija – dovoljno promatrati transverzalne pomake u jednom smjeru
- pretpostavke:

1. $\mu \ll 1$
2. transverzalni pomaci $l \ll \chi$ longitudinalni pomaci

„Lensing” u McVittie prostorvremenu

- rješavanjem jednadžbe geodezika svjetlosnog tipa:

$$\frac{d^2 l}{d\chi^2} = 4\partial_l \mu$$

- vrijedi $r = \sqrt{(\chi - \chi_L)^2 + l^2}$

$$\frac{d^2 l}{d\chi^2} = -\frac{2ml}{a(\chi)[(\chi - \chi_L)^2 + l^2]^{3/2}}$$

- pokrate: $x \equiv \frac{\chi}{\chi_L}$, $\alpha \equiv \frac{2m}{\chi_L}$, $y \equiv \frac{l}{\chi_L}$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\alpha \frac{y}{a(x)[(x-1)^2 + y]^{3/2}}$$

- perturbativno traženje rješenja: $y = y^{(0)} + \alpha y^{(1)} + \alpha^2 y^{(2)} + \cdots$

„Lensing" u McVittie prostorvremenu

- uvjeti zadovoljenja trajektorije: $y(x_s) = y_s, \quad y(0) = 0$ – zraka svjetlosti kreće s $b \equiv y_S \chi_L$ i mora doći do promatrača da bi je detektirao
- nulti red – pravac, tj. nema zakrivljenja trajektorije pod utjecajem gravitacije
- sljedeći red:

$$\frac{d^2 y^{(1)}}{dx^2} = -\frac{y_S}{a(x)\left[(x-1)^2 + {y_S}^2\right]^{3/2}}$$

- konstantan Hubbleov faktor - $H = H_0$
- u limesu $b \ll \chi_L$, kut između izvora i slike δ:

$$\delta \equiv \frac{dy}{dx}(x=0) - \frac{dy}{dx}(x = x_S)$$

$$\delta = \frac{4m(1 + \chi_L H_0)}{b} + \sigma(b/\chi_L)$$

- u najnižem redu računa smetnje nema razlike između standardne jednadžbe leće(bez širenja) i ovog rješenja (Hubbleov faktor upijen)

Kozmološko širenje u budućnosti svemira

- ubrzano širenje, kozmološka konstanta Λ pripisana energiji vakuuma
- model: svemir ispunjen fluidom
- za savršen fluid vrijedi: $T_{\mu\upsilon} = (p + \rho)U_\mu U_\nu + p g_{\mu\nu}$
- parametar $w \equiv \frac{p}{\rho}$
- za vakuum se može dobiti: $T_{\mu\nu}^{vac} = -\rho_{vac} g_{\mu\nu} \longrightarrow p_{vac} = -\rho_{vac}$

$$\rho_{vac} = \rho_\Lambda \equiv \frac{\Lambda}{8\pi}$$

Kozmološko širenje u budućnosti svemira

- rješavanjem Einsteinovih jednadžbi – Friedmannove jednadžbe:

$$\left(\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\right)^2 \equiv H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho - \frac{k}{a^2(t)}$$

$$\frac{\ddot{a}(t)}{a(t)} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p)$$

- ravan svemir: $\rho_{crit} \equiv \frac{3H^2}{8\pi}$
- parametar gustoće: $\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_{crit}} = \rho\left(\frac{8\pi}{3H^2}\right)$
- ubrzano širenje svemira za $w < -\frac{1}{3}$

Kozmološko širenje u budućnosti svemira

- za veliki *t*, 1. Friedmannova jednadžba:

$$H^2 = H_0^2\left[\frac{\Omega_m}{a^3} + (1-\Omega_m)a^{-3(1+w)}\right]$$

- Ω_m – relativna gustoća materije
- H_0 – trenutni Hubbleov parametar
- prvi član zanemariv (veliki *a*)
- za $w < -1$:

$$t_{rip} - t_0 \approx \frac{2}{3}|1+w|^{-1}H_0^{-1}(1-\Omega_m)^{-1/2}$$

- „big rip”
- $a \longrightarrow \infty$

Generalizirani Chaplygin plin

- jednadžba stanja: $p = -\frac{A}{\rho^\alpha}$
- dio svemira ispunjen fluidom ima energiju: $U = \rho V$

$$dU = \rho dV + V d\rho$$

- ako nema prijenosa topline: $dU = -pdV$

$$\frac{d\rho}{dt} = -(p+\rho)\frac{1}{V}\frac{dV}{dt}$$

$$V \propto a^3$$

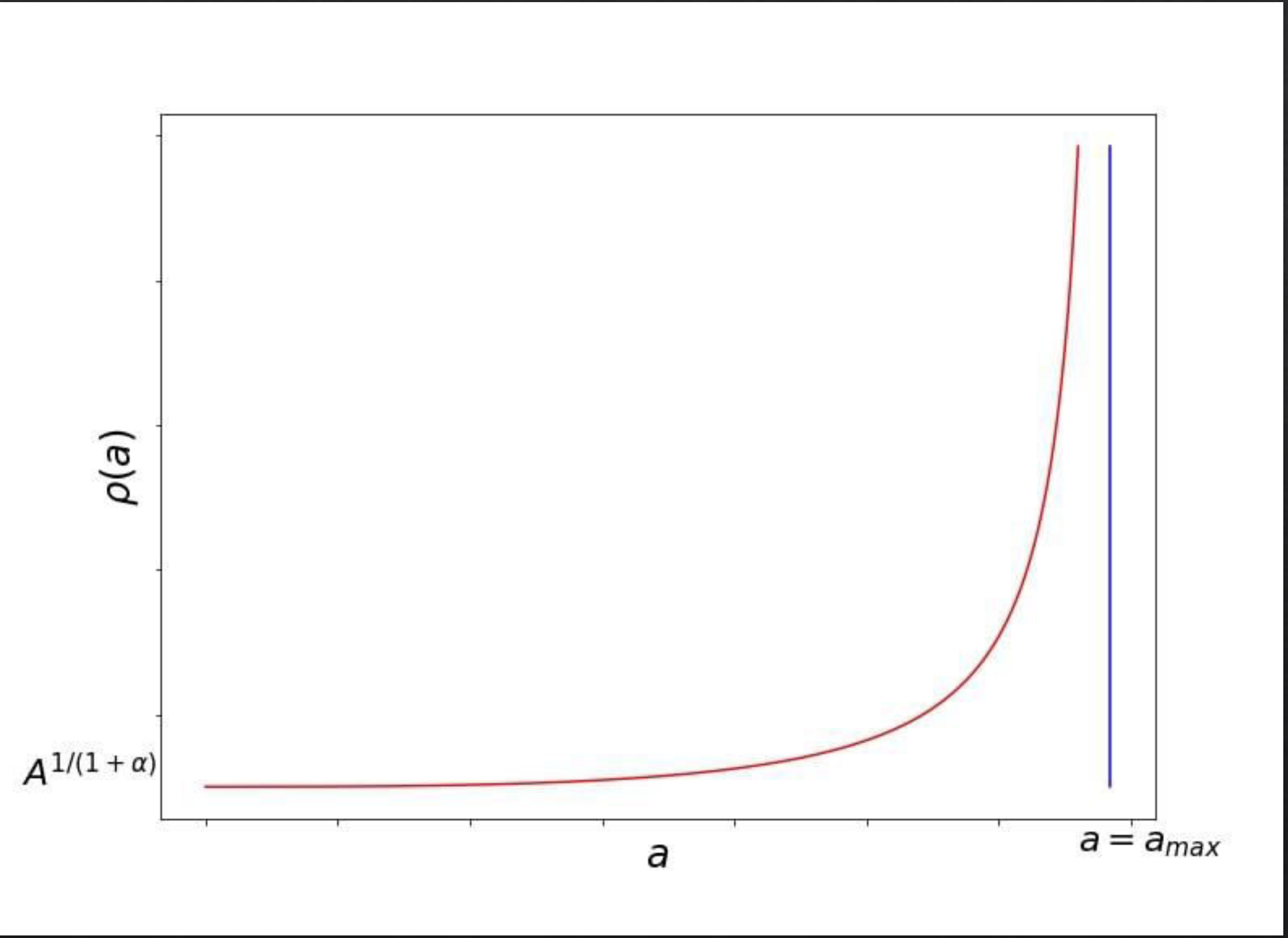
$$\dot{\rho} = -3(p+\rho)\frac{\dot{a}}{a}$$

$$\rho = \left(A + \frac{B}{a^{3(1+\alpha)}}\right)^{\frac{1}{1+\alpha}}$$

- ako $B < 0, \alpha < -1$

$$a_{max} = \left|\frac{B}{A}\right|^{\frac{1}{3(1+\alpha)}}$$

„Big freeze”



Zaključak

- metrika prostorvremena određuje ponašanje atoma
- kvantni HO se ne širi s vremenom u de Sitter prostorvremenu
- razna ponašanja za gravitacijski čvrsto vezane objekte
- u najnižem redu nema utjecaja kozmološkog širenja na „lensing" u McVittie metrici
- budućnost svemira pod utjecajem kozmološkog širenja ovisi o jednadžbi stanja pozadinskog fluida