MATEMATIČKI TEMELJI KVANTNE MEHANIKE

Nino Kovačić

Mentor: dr. sc. Tajron Jurić

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

$$[X, P] = iI$$

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

$$[X, P] = iI \qquad\qquad P\psi_p = p\psi_p, \quad p\in\mathbb{R}$$

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

$$[X, P] = iI \qquad\qquad P\psi_p = p\psi_p, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\left\langle \psi_p, [X, P]\, \psi_p \right\rangle = i \left\langle \psi_p, \psi_p \right\rangle \neq 0$$

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

$$[X,P]=iI \qquad\qquad P\psi_p = p\psi_p, \quad p\in\mathbb{R}$$

$$\left\langle\psi_p,[X,P]\,\psi_p\right\rangle = i\left\langle\psi_p,\psi_p\right\rangle \neq 0$$

$$\left\langle\psi_p,[X,P]\,\psi_p\right\rangle = \left\langle\psi_p,XP\psi_p\right\rangle - \left\langle\psi_p,PX\psi_p\right\rangle$$

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

$$[X,P]=iI \qquad\qquad P\psi_p=p\psi_p,\quad p\in\mathbb{R}$$

$$\left\langle \psi_p,[X,P]\,\psi_p\right\rangle = i\left\langle \psi_p,\psi_p\right\rangle \neq 0$$

$$\begin{aligned}\left\langle \psi_p,[X,P]\,\psi_p\right\rangle &= \left\langle \psi_p,XP\psi_p\right\rangle - \left\langle \psi_p,PX\psi_p\right\rangle \\ &= \left\langle \psi_p,XP\psi_p\right\rangle - \left\langle P\psi_p,X\psi_p\right\rangle \\ &= p\left\langle \psi_p,X\psi_p\right\rangle - p\left\langle \psi_p,X\psi_p\right\rangle = 0\end{aligned}$$

Prvi paradoks – kanonska komutacijska relacija

$$[X,P]=iI \qquad\qquad P\psi_p = p\psi_p, \quad p\in\mathbb{R}$$

$$\langle \psi_p, [X,P]\,\psi_p\rangle = i\,\langle \psi_p, \psi_p\rangle \neq 0$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_p, [X,P]\,\psi_p\rangle &= \langle \psi_p, XP\psi_p\rangle - \langle \psi_p, PX\psi_p\rangle \\ &= \langle \psi_p, XP\psi_p\rangle - \langle P\psi_p, X\psi_p\rangle \\ &= p\,\langle \psi_p, X\psi_p\rangle - p\,\langle \psi_p, X\psi_p\rangle = 0\end{aligned}$$

Gdje smo pogriješili ili hoće li kanonska komutacijska relacija biti “u opasnosti”?

Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_{\Omega} \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x$$

Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_\Omega \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x = \underbrace{-i\left(\phi^*\psi\right)\Big|_{\partial\Omega}}_{\text{površinski član}} + \langle P\phi, \psi \rangle$$

Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_\Omega \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x = \underbrace{-i\left(\phi^*\psi\right)\Big|_{\partial\Omega}}_{\text{površinski član}} + \langle P\phi, \psi \rangle$$

Što ako je $\Omega = \mathbb{R}$?

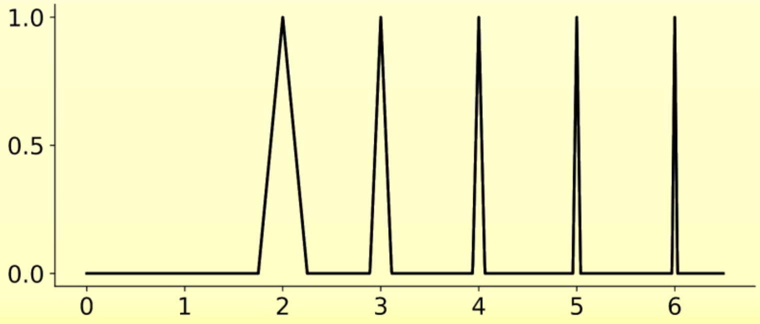
Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_\Omega \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x = \underbrace{-i\left(\phi^*\psi\right)\Big|_{\partial\Omega}}_{\text{površinski član}} + \langle P\phi, \psi \rangle$$

Što ako je $\Omega = \mathbb{R}$?

Povr. član ne iščezava uvijek, protuprimjer:



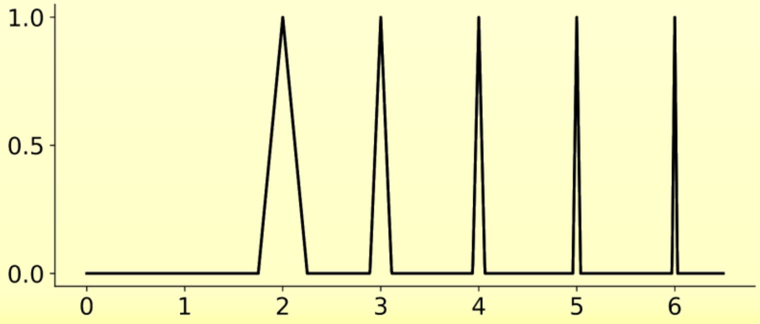
Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_\Omega \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x = \underbrace{-i\left(\phi^*\psi\right)\Big|_{\partial\Omega}}_{\text{površinski član}} + \langle P\phi, \psi \rangle$$

Što ako je $\Omega = \mathbb{R}$?

Povr. član ne iščezava uvijek, protuprimjer:



Što ako je čestica "u kutiji"?

$$\Omega = [a, b]\,,\;\; \psi(a) = \psi(b) = 0$$

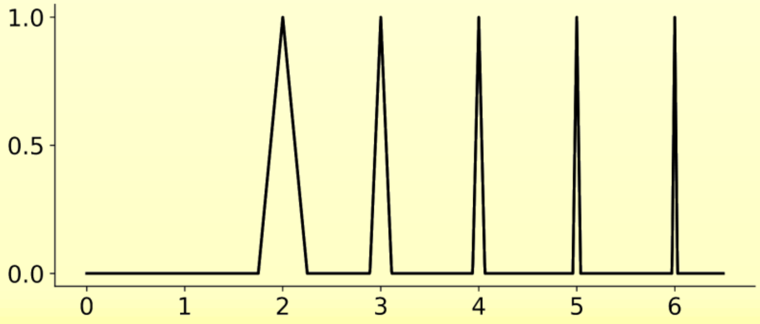
Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_\Omega \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x = \underbrace{-i\left(\phi^*\psi\right)\Big|_{\partial\Omega}}_{\text{površinski član}} + \langle P\phi, \psi \rangle$$

Što ako je $\Omega = \mathbb{R}$?

Povr. član ne iščezava uvijek, protuprimjer:



Što ako je čestica "u kutiji"?

$$\Omega = [a, b]\,, \;\; \psi(a) = \psi(b) = 0$$

Uz ovakav r.u. imamo hermitičnost, no imamo i problem - nerješivost eigenjedn:

$$P\psi_p = p\psi_p$$

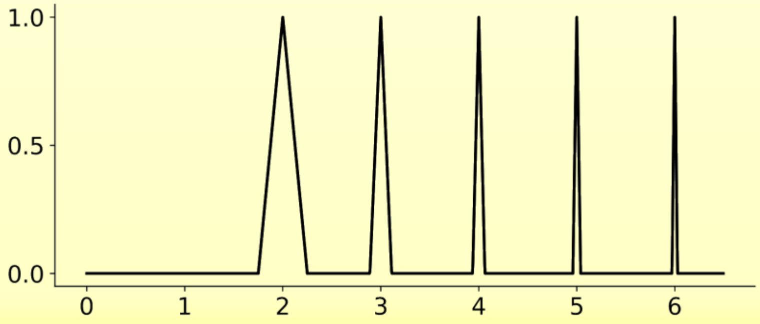
Drugi paradoks – operator impulsa

Provjerimo sada hermitičnost koju koristimo u prethodnom primjeru za $\Omega \subseteq \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = \int_\Omega \phi^* \left(-i\psi'\right) \mathrm{d}x = \underbrace{-i\left(\phi^*\psi\right)\Big|_{\partial\Omega}}_{\text{površinski član}} + \langle P\phi, \psi \rangle$$

Što ako je $\Omega = \mathbb{R}$?

Povr. član ne iščezava uvijek, protuprimjer:



Što ako je čestica "u kutiji"?

$$\Omega = [a, b]\,,\ \ \psi(a) = \psi(b) = 0$$

Uz ovakav r.u. imamo hermitičnost, no imamo i problem - nerješivost eigenjedn:

$$P\psi_p = p\psi_p$$

Kako možemo imati opservablu koja ne posjeduje svojstvene vektore i vrijednosti?

Domena operatora

Domena operatora

Svi seprabilni beskonačno-dimenzionalni Hilbertovi prostori izomorfni su prostoru L^2.

Domena operatora

Svi seprabilni beskonačno-dimenzionalni Hilbertovi prostori izomorfni su prostoru L^2.

Operator je linearno preslikavanje $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Domena operatora

Svi seprabilni beskonačno-dimenzionalni Hilbertovi prostori izomorfni su prostoru L^2.

Operator je linearno preslikavanje $A\colon \mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

Osnovni primjer su maksimalne domene koje se prirodno javljaju kao:

$$\mathcal{D}_{max}(A) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \,\middle|\, A\psi \in \mathcal{H} \right\}$$

Povratak na paradokse

Povratak na paradokse

Što je domena?

$$[X, P] = iI$$

Povratak na paradokse

Što je domena?

$$[X, P] = iI$$

Postoji li rješenje?

$$P\psi_p = p\psi_p, \quad p \in \mathbb{R}$$

Povratak na paradokse

Što je domena?

$$[X, P] = iI$$

Postoji li rješenje?

$$P\psi_p = p\psi_p, \quad p\in\mathbb{R}$$

$$\boxed{\langle \psi_p, [X, P]\, \psi_p \rangle} = i \langle \psi_p, \psi_p \rangle$$

Ako postoji leži li ono u domeni?

Povratak na paradokse

Što je domena?

$$[X, P] = iI$$

Postoji li rješenje?

$$P\psi_p = p\psi_p, \quad p \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{\langle \psi_p, [X, P]\, \psi_p \rangle} = i \langle \psi_p, \psi_p \rangle$$

Ako postoji leži li ono u domeni?

U drugom paradoksu za $\Omega = \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = -i\,(\phi^* \psi)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \langle P\phi, \psi \rangle = \langle P\phi, \psi \rangle$$

Iščezava površinski član za impuls definiran na svojoj max domeni: $\mathcal{D}_{max}(P) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$

Povratak na paradokse

Što je domena? $[X, P] = iI$

Postoji li rješenje? $P\psi_p = p\psi_p, \quad p \in \mathbb{R}$

$\boxed{\langle \psi_p, [X, P]\, \psi_p \rangle} = i \langle \psi_p, \psi_p \rangle$

Ako postoji leži li ono u domeni?

U drugom paradoksu za $\Omega = \mathbb{R}$:

$$\langle \phi, P\psi \rangle = -i\,(\phi^* \psi)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \langle P\phi, \psi \rangle = \langle P\phi, \psi \rangle$$

Iščezava površinski član za impuls definiran na svojoj max domeni: $\mathcal{D}_{max}(P) = \left\{ \psi \in L^2(\mathbb{R}) \,\middle|\, \int_{\mathbb{R}} |\psi'(x)|^2 \, \mathrm{d}x < \infty \right\}$

Ipak, još moramo razriješiti pitanje o svojstvenim vektorima i vrijednostima...

Operatori i matrice

Postoje li operatori na L^2 koji se ponašaju “kao matrice”?

Operatori i matrice

Postoje li operatori na L^2 koji se ponašaju "kao matrice"?

Odgovor je potvrdan – to su ograničeni operatori:

$$\forall\psi\in\mathcal{D}(A),\, \exists c\in\mathbb{R}^+ \text{ t.d. } \|A\psi\| \leqslant c\,\|\psi\|$$

Operatori i matrice

Postoje li operatori na L^2 koji se ponašaju “kao matrice”?

Odgovor je potvrdan – to su ograničeni operatori:

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(A), \exists c \in \mathbb{R}^+ \text{ t.d. } \|A\psi\| \leqslant c\,\|\psi\|$$

BLT teorem: domena ograničenih operatora se može proširiti na cijeli Hilbertov pr.

Operatori i matrice

Postoje li operatori na L^2 koji se ponašaju “kao matrice”?

Odgovor je potvrdan – to su ograničeni operatori:

$$\forall\psi\in\mathcal{D}(A), \exists c\in\mathbb{R}^+ \text{ t.d. } \|A\psi\| \leqslant c\,\|\psi\|$$

BLT teorem: domena ograničenih operatora se može proširiti na cijeli Hilbertov pr.

Svi operatori u konačno-dimenzionalnom H Pr. su ograničeni

Operatori i matrice

Postoje li operatori na L^2 koji se ponašaju “kao matrice”?

Odgovor je potvrdan – to su ograničeni operatori:

$$\forall\psi\in\mathcal{D}(A),\, \exists c\in\mathbb{R}^+ \text{ t.d. } \|A\psi\| \leqslant c\,\|\psi\|$$

BLT teorem: domena ograničenih operatora se može proširiti na cijeli Hilbertov pr.

Svi operatori u konačno-dimenzionalnom H Pr. su ograničeni

Ako vrijedi: $[X, P] = iI$ tada je barem jedan od njih neogr.

Operatori i matrice

Postoje li operatori na L^2 koji se ponašaju "kao matrice"?

Odgovor je potvrdan – to su ograničeni operatori:

$$\forall\psi\in\mathcal{D}(A),\ \exists c\in\mathbb{R}^+ \text{ t.d. } \ \|A\psi\| \leqslant c\,\|\psi\|$$

BLT teorem: domena ograničenih operatora se može proširiti na cijeli Hilbertov pr.

Svi operatori u konačno-dimenzionalnom H Pr. su ograničeni

Ako vrijedi: $[X, P] = iI$ tada je barem jedan od njih neogr.

$\Rightarrow$ QM **moramo** raditi na beskonačno-dim Hilbertovom prostoru!

Hermitičnost i opservable

Hermitičnost i opservable

Prvo nam treba generalizacija hermitskog adjunkta:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \left\{\psi{\in}\mathcal{H}\,\middle|\,\exists\phi{\in}\mathcal{H}\ \ \forall\alpha{\in}\mathcal{D}(A)\colon\ \langle\psi, A\alpha\rangle = \langle\phi,\alpha\rangle\right\} \qquad A^\dagger\psi = \phi$$

Hermitičnost i opservable

Prvo nam treba generalizacija hermitskog adjunkta:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \left\{\psi\in\mathcal{H} \,\middle|\, \exists\phi\in\mathcal{H}\ \ \forall\alpha\in\mathcal{D}(A)\colon\ \langle\psi, A\alpha\rangle = \langle\phi,\alpha\rangle\right\} \qquad A^\dagger\psi = \phi$$

Hermitičnost nije nikako jednostavna:

Hermitičnost i opservable

Prvo nam treba generalizacija hermitskog adjunkta:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \left\{\psi\in\mathcal{H} \,\middle|\, \exists\phi\in\mathcal{H}\ \forall\alpha\in\mathcal{D}(A):\ \langle\psi, A\alpha\rangle = \langle\phi,\alpha\rangle\right\} \qquad A^\dagger\psi = \phi$$

Hermitičnost nije nikako jednostavna:

hermitski

$$\forall\psi,\phi\in\mathcal{D}(A):$$
$$\langle\psi, A\phi\rangle = \langle A\psi,\phi\rangle$$

Hermitičnost i opservable

Prvo nam treba generalizacija hermitskog adjunkta:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \left\{\psi\in\mathcal{H} \,\middle|\, \exists\phi\in\mathcal{H}\ \ \forall\alpha\in\mathcal{D}(A)\colon\ \langle\psi, A\alpha\rangle = \langle\phi, \alpha\rangle\right\} \qquad A^\dagger\psi = \phi$$

Hermitičnost nije nikako jednostavna:

simetrični
$\mathcal{D}(A)$ gusta u $\mathcal{H}$

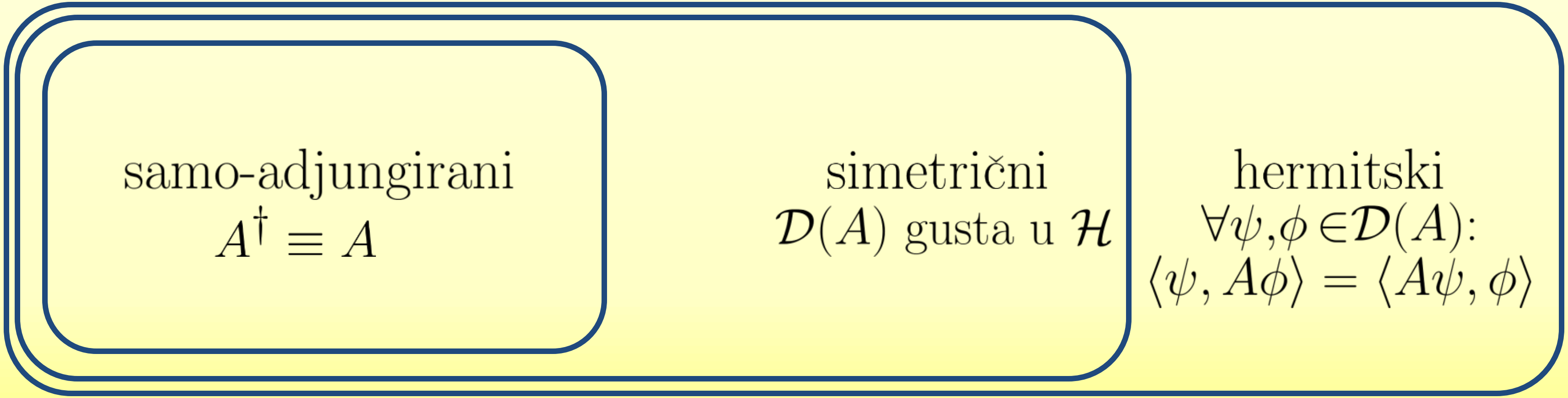
hermitski
$\forall\psi,\phi \in\mathcal{D}(A)$:
$\langle\psi, A\phi\rangle = \langle A\psi, \phi\rangle$

Hermitičnost i opservable

Prvo nam treba generalizacija hermitskog adjunkta:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \left\{ \psi \in \mathcal{H} \,\middle|\, \exists \phi \in \mathcal{H} \;\; \forall \alpha \in \mathcal{D}(A): \; \langle \psi, A\alpha \rangle = \langle \phi, \alpha \rangle \right\} \qquad A^\dagger \psi = \phi$$

Hermitičnost nije nikako jednostavna:

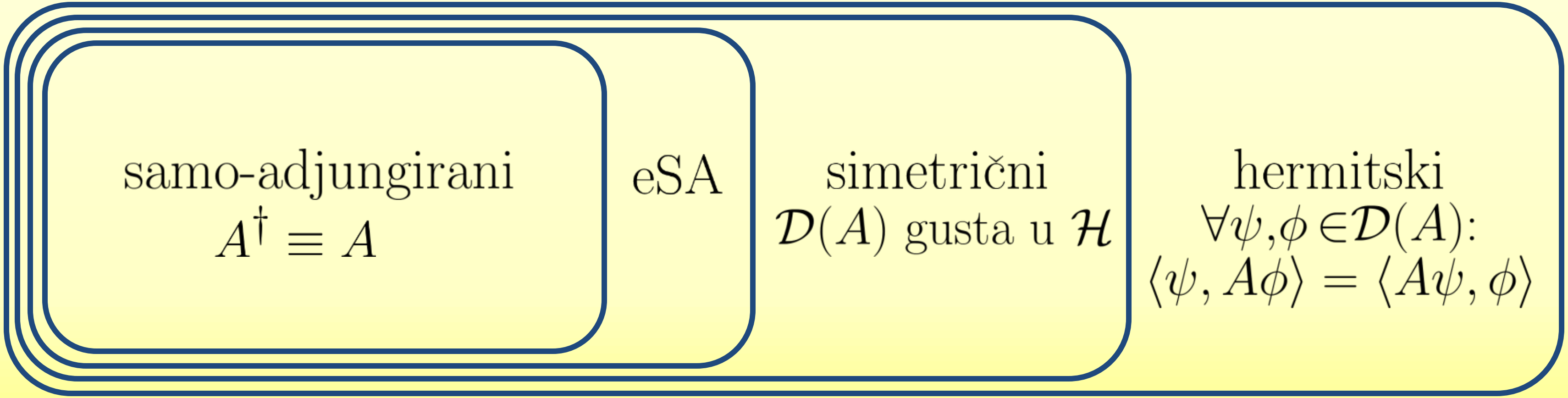


Hermitičnost i opservable

Prvo nam treba generalizacija hermitskog adjunkta:

$$\mathcal{D}(A^\dagger) = \{\psi \in \mathcal{H} \,|\, \exists \phi \in \mathcal{H} \;\; \forall \alpha \in \mathcal{D}(A): \; \langle \psi, A\alpha \rangle = \langle \phi, \alpha \rangle \} \qquad A^\dagger \psi = \phi$$

Hermitičnost nije nikako jednostavna:



Spektar operatora

Spektar operatora

Spektar je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ t.d. ne postoji ograničeni inverz operatora $A - \lambda I$

Spektar operatora

Spektar je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ t.d. ne postoji ograničeni inverz operatora $A - \lambda I$

Što ako nema inverza jer taj operator nije injektivan?

Spektar operatora

Spektar je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ t.d. ne postoji ograničeni inverz operatora $A - \lambda I$

Što ako nema inverza jer taj operator nije injektivan?

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \varnothing$$

Spektar operatora

Spektar je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ t.d. ne postoji ograničeni inverz operatora $A - \lambda I$

Što ako nema inverza jer taj operator nije injektivan?

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \varnothing \Rightarrow \exists \psi_\lambda \in \mathcal{D}(A) \text{ t.d. } (A - \lambda I)\psi_\lambda = 0 \quad \text{tj.} \quad \underbrace{A\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda}_{\text{Eigenproblem!}}$$

Spektar operatora

Spektar je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ t.d. ne postoji ograničeni inverz operatora $A - \lambda I$

Što ako nema inverza jer taj operator nije injektivan?

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \varnothing \Rightarrow \exists \psi_\lambda \in \mathcal{D}(A) \text{ t.d. } (A - \lambda I)\psi_\lambda = 0 \quad \text{tj.} \quad \underbrace{A\psi_\lambda = \lambda \psi_\lambda}_{\text{Eigenproblem!}}$$

Ovaj dio spektra nazivamo točkasti spektar,

a ako nam fali samo surijektivnost? – To nas vodi na kontinuirani spektar.

Spektar operatora

Spektar je skup svih $\lambda \in \mathbb{C}$ t.d. ne postoji ograničeni inverz operatora $A - \lambda I$

Što ako nema inverza jer taj operator nije injektivan?

$$\mathrm{Ker}(A - \lambda I) \neq \varnothing \Rightarrow \exists \psi_\lambda \in \mathcal{D}(A) \text{ t.d. } (A - \lambda I)\psi_\lambda = 0 \;\text{ tj. }\; \underbrace{A\psi_\lambda = \lambda\psi_\lambda}_{\text{Eigenproblem!}}$$

Ovaj dio spektra nazivamo točkasti spektar,
a ako nam fali samo surijektivnost? – To nas vodi na kontinuirani spektar.

Kokretni računi su teški, ali tu nas spašava NS Tm: svi SA operatori su unitarno ekivalentni s multiplikativnima.

Primjer - operator položaja na $\mathcal{D}_{max}$: $(X - \lambda I)^{-1} = \dfrac{1}{x - \lambda} \Rightarrow \sigma(X) = \sigma_c(X) = \mathbb{R}$

Distribucije

Distribucije

Schwartzov prostor “rapidno trnućih funkcija”:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^{\infty}(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x\in\Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Distribucije

Schwartzov prostor “rapidno trnućih funkcija”:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^{\infty}(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x\in\Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Kaljene distribucije $\mathcal{S}'$ su svi neprekidni linearni funkcionali $g \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

Distribucije

Schwartzov prostor “rapidno trnućih funkcija”:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^\infty(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \ \ \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x\in\Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Kaljene distribucije $\mathcal{S}'$ su svi neprekidni linearni funkcionali $g\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

Primjer konstrukcije Gelfandovog tripleta:

$$\mathcal{S} \subseteq L^2 \subseteq \mathcal{S}'$$

Distribucije

Schwartzov prostor “rapidno trnućih funkcija”:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^{\infty}(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x\in\Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Kaljene distribucije $\mathcal{S}'$ su svi neprekidni linearni funkcionali $g\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

Primjer konstrukcije Gelfandovog tripleta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd}$$

Distribucije

Schwartzov prostor “rapidno trnućih funkcija”:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^\infty(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \ \ \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x \in \Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Kaljene distribucije $\mathcal{S}'$ su svi neprekidni linearni funkcionali $g\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

Primjer konstrukcije Gelfandovog tripleta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd} \qquad (i^*(\overset{\in L^2}{\psi}))(\overset{\in \mathcal{S}}{\phi}) = \int \psi^* \phi \, \mathrm{d}x$$

Distribucije

Schwartzov prostor “rapidno trnućih funkcija”:

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^\infty(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x\in\Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Kaljene distribucije $\mathcal{S}'$ su svi neprekidni linearni funkcionali $g\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

Primjer konstrukcije Gelfandovog tripleta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd} \qquad (i^*(\underbrace{\psi}_{\in L^2}))(\underbrace{\phi}_{\in \mathcal{S}}) = \int \psi^* \phi \, \mathrm{d}x$$

Dualno proširenje operatora:

$$(A' \underbrace{g}_{\in \mathcal{S}'})(\underbrace{\phi}_{\in \mathcal{S}}) = g(A\phi)$$

Distribucije

Schwartzov prostor "rapidno trnućih funkcija":

$$\mathcal{S}(\Omega) = \left\{ \psi \in C^{\infty}(\Omega) \,\middle|\, \forall n, m \in \mathbb{N} \;\; \|\psi\|_{n,m} < \infty \right\} \qquad \|\psi\|_{n,m} = \sup_{x\in\Omega} \left| x^n \frac{\mathrm{d}^m \psi(x)}{\mathrm{d}x^m} \right|$$

Kaljene distribucije $\mathcal{S}'$ su svi neprekidni linearni funkcionali $g\colon \mathcal{S} \to \mathbb{C}$

Primjer konstrukcije Gelfandovog tripleta:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd} \qquad (i^*(\overset{\in L^2}{\psi}))(\overset{\in \mathcal{S}}{\phi}) = \int \psi^* \phi \, \mathrm{d}x$$

Dualno proširenje operatora:

$$(A'\underset{\in \mathcal{S}'}{g})(\underset{\in \mathcal{S}}{\phi}) = g(A\phi)$$

Generalizirani eigenproblem:

$$(A' g_a)(\phi) = a g_a(\phi)$$

Opremljeni Hilbertov prostor i Diracova notacija

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \subseteq \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \subseteq \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd}$$

$$(i^*(\overset{\in L^2}{\psi}))(\overset{\in \mathcal{S}}{\phi}) = \int \psi^* \phi \, \mathrm{d}x$$

Opremljeni Hilbertov prostor i Diracova notacija

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd}$$

$$(i^*(\overset{\in L^2}{\psi}))(\overset{\in \mathcal{S}}{\phi}) = \int \psi^* \phi \, \mathrm{d}x$$

Uvedimo li i prostor neprekidnih antilinearnih funkcionala $\mathcal{S}^\times$, tada imamo još jedan triplet:

$$\mathcal{S} \subseteq L^2 \subseteq \mathcal{S}^\times$$

Opremljeni Hilbertov prostor i Diracova notacija

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S} \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i"'] & L^2 \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[r, bend right, "i^*"'] & \mathcal{S}' \end{tikzcd} \qquad (i^*(\overset{\in L^2}{\psi}))(\overset{\in \mathcal{S}}{\phi}) = \int \psi^* \phi \, \mathrm{d}x$$

Uvedimo li i prostor neprekidnih antilinearnih funkcionala $\mathcal{S}^\times$, tada imamo još jedan triplet:

$$\mathcal{S} \subseteq L^2 \subseteq \mathcal{S}^\times$$

Tada će, strogo govoreći, Diracovi braovi biti elementi $\mathcal{S}'$, a ketovi $\mathcal{S}^\times$

Zaključak

- Domena operatora je nezaobilazna u QM
- Hermitičnost je zapravo jako suptilna
- Oprezno s Diracovom notacijom

HVALA NA PAŽNJI