Termodinamika crnih rupa u prisustvu elektromagnetskih polja

David Leko
mentor: dr. sc. Tajron Jurić

Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek
Bijenička cesta 32, 10000, Zagreb

Uvod

Četiri zaona mehanike crnih rupa ($G = \hbar = c = k = 1$):

(0) Nulti zakon: Površinska gravitacija κ je konstantna na horizontu. Za Maxwell-Einsteinvou teoriju: električni potencijal, Φ_H, također konstantan na horizontu [18].

(I) Prvi zakon: Za dva bliska rješenja za stacionarne crne rupe koja se razlikuju tek za male varijacije u parametrima M, J i Q, vrijedi:

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta J + \Phi_H \delta Q \ ,$$

(II) Drugi zakon: Površina horizonta crne rupe nikad se ne smanjuje:

$$\delta A \geq 0$$

(III) Treći zakon: Ne postoji proces kojim bi se površinska gravitacija κ svela na nulu u konačnom broju koraka.

Formalizam

Postojanje lagranžijana ili hamiltonijana nije tek stvar tehničke prirode u klasičnoj teoriji polja, već pruža i važnu pomoćnu strukturu te uvid u značajna svojstva. Započet ćemo s lagranžijanom invarijantnim na difeomorfizam, $\boldsymbol{L}$, oblika

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(g_{ab}; R_{abcd}, \nabla_a R_{abcd}, \dots; \phi, \nabla_a \phi, \dots)$$

To znači da je lagranžijan u cijelosti izgrađen od dinamičkih polja, ϕ, te da nema pozadinske strukture osim prostorvremena. Lagranžijan $\boldsymbol{L}$ je $n-$forma na $n-$dimenzionalnoj mnogostrukosti. Varijaciju lagranžijana možemo zapisati kao

$$\delta \boldsymbol{L} = \boldsymbol{E}(\phi)\delta\phi + d\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)$$

pri čemu je $\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)$ $(n-1)-$forma lokalno konstruirana od ϕ, $\delta\phi$ i njihovih derivacija, a jednadžbe gibanja su $\boldsymbol{E} = 0$.

$(n-1)-$forma simplektičke struje, ω, definirana je u odnosu na dvije varijacije

$$\boldsymbol{\omega}(\phi, \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \delta_1\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta_2\phi) - \delta_2\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta_1\phi)$$

U teorijama koje se izvode od lagranžijana invarijantnog na difeomorfizam, svako glatko vektorsko polje ξ^a na mnogostrukosti generira lokalnu simetriju. To nam omogućuje da svakom vektorskom polju ξ^a i konfiguraciji ϕ pridružimo $(n-1)-$formu, Noetherinu struju, $\boldsymbol{\mathcal{J}}$

$$\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) - \xi \cdot \boldsymbol{L}$$

te slijedi

$$d\boldsymbol{\mathcal{J}} = -\boldsymbol{E}(\phi)\mathcal{L}_\xi\phi$$

što pokazuje da je $\boldsymbol{\mathcal{J}}$ zatvorena forma (za svaki ξ^a kada su zadovoljene jednadžbe gibanja.

Noetherinu struju općenito je moguće zapisati kao

$$\mathcal{J}[\xi] = d\mathcal{Q}[\xi] + \xi^a \boldsymbol{C}_a$$

pri čemu je $\boldsymbol{C}_a$ $(n-1)-$forma lokalno konstruirana od dinamičkih polja tako da je $\boldsymbol{C}_a = 0$ kada su zadovoljene jednadžbe gibanja. $\mathcal{Q}[\xi]$ je $(n-2)-$forma lokalno izgrađena od dinamičkih polja ϕ, vektorskog polja ξ^a i konačno mnogo njihovih derivacija. $\mathcal{Q}[\xi]$ se naziva Noetherin naboj. S obzirom na proizvoljnu varijaciju dinamičkog polja $\delta\phi$ i fiksirano vektorsko polje ξ^a imamo

$$\delta\mathcal{J} = \delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi) - \xi \cdot \delta\boldsymbol{L}$$

korištenjem

$$\begin{aligned} \xi \cdot \delta\boldsymbol{L} &= \xi \cdot [\boldsymbol{E}\delta\phi + d\boldsymbol{\Theta}] \\ &= \mathcal{L}_\xi\boldsymbol{\Theta} - d(\xi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \end{aligned}$$

imamo

$$\delta\mathcal{J} = \delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi) - \mathcal{L}_\xi[\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)] + d(\xi \cdot \boldsymbol{\Theta})$$

pri čemu nikakva ograničenja nisu nametnuta na $\delta\phi$ i ξ^a.

Očekujemo da će ∇_a biti invarijantan s obzirom na difeomorfizam generiran ξ^a. U tom slučaju [23], prva dva člana na desnoj strani jednadžbe zajedno daju

$$\delta\boldsymbol{\Theta}(\phi, \mathcal{L}_\xi) - \mathcal{L}_\xi[\boldsymbol{\Theta}(\phi, \delta\phi)] = \boldsymbol{\omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi)$$

te jednadžba postaje

$$\delta\boldsymbol{\mathcal{J}} = \boldsymbol{\omega}(\phi, \delta\phi, \mathcal{L}_\xi\phi) + d(\xi \cdot \boldsymbol{\Theta})$$

Sada promatramo asimptotski ravno prostorvrijeme u kojem za svaku asimptotsku simetriju prostorvremena ξ^a postoji pravi hamiltonijan, očuvana veličina H_ξ. Ako $\delta\phi$ zadovoljava linearizirane jednadžbe gibanja, $\delta\boldsymbol{E}(\phi) = 0$, u blizini beskonačnosti, ali ne nužnu u čitavom prostorvremenu, varijacija očuvane veličine H_ξ povezane s ξ^a dana je sa

$$\delta H_\xi = \int_\infty (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi \cdot \boldsymbol{\Theta})$$

"$\bar{\delta}$" označava varijaciju koja ne utječe na ξ^a.

Promotramo slučaj za koji je $\omega = 0$, tada uz Stokesov teorem i nekoliko prethodno spomenutih izraza možemo izvesti

$$
\begin{aligned}
\delta H_\xi &= \int_\Sigma (\bar{\delta} d \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \delta \boldsymbol{\mathcal{J}}[\xi] + \int_{\partial\Sigma} (\bar{\delta} \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \\
&= -\int_\Sigma \xi^a \delta \boldsymbol{C}_a + \int_{\partial\Sigma} (\bar{\delta} \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi \cdot \boldsymbol{\Theta})
\end{aligned}
$$

Jednadžba iznad općeniti je oblik varijacije očuvane veličine, pri tome je Σ hiperploha koja se prostire u beskonačnost s unutarnjim rubom $\partial\Sigma$. Integracija se vrši po $(n-2)-$plohi u Σ kada ta $(n-2)-$ploha ide u beskonačnost uz Σ. Primjetimo, kada su zadovoljene jednadžbe givanja (kada se nalazimo na ljusci), $\boldsymbol{C}_a = 0$, te je varijacija od H_ξ čisto površinski član.

Ako teorija dopušta prikladnu definiciju kanonske energije, $\mathcal{E}$, i asimptotske vremenske translacije, $\xi^a = t^a$, tada imamo

$$\delta\mathcal{E} = \int_\infty (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[t] - t \cdot \boldsymbol{\Theta})$$

Analogno za kanonski angularni moment, $\mathcal{J}$, te asimptotsku rotaciju, $\xi^a = \varphi^a$, pišemo

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{J} &= -\int_\infty (\bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\varphi] - \varphi \cdot \boldsymbol{\Theta}) \\ &= -\int_\infty \bar{\delta}\boldsymbol{\mathcal{Q}}[\varphi]\end{aligned}$$

pri čemu je u zadnjem redu asimptotska rotacija, φ^a, tangentna na $(n-2)-$plohu integracije.

Einstein-Maxwellova teorija

Einstein-Maxwellov lagranžijan glasi

$$\boldsymbol{L} = \frac{1}{16\pi}(\boldsymbol{\epsilon} R - \boldsymbol{\epsilon} g^{ac} g^{bd} F_{ab} F_{cd})$$

gdje je $\boldsymbol{\epsilon}$ volumni element povezan s metrikom. Izračunom varijacije Einstein-Maxwellovog lagranžijana dobivamo

$$\delta \boldsymbol{L} = \frac{1}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}(-G^{ab} + 8\pi T^{ab}_{EM})\delta g_{ab} + \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\epsilon}(\nabla_a F^{ab})\delta A_b + d\boldsymbol{\Theta}$$

pri čemu je T^{ab}_{EM} tenzor energije-impulsa elektromagnetskog polja zadan sa

$$(T_{EM})_{ab} = \frac{1}{4\pi}(F_{ac} F_c{}^b - \frac{1}{4} g_{ab} F_{de} F^{de})$$

a forma simplektičkog potencijala $\boldsymbol{\Theta}$

$$\boldsymbol{\Theta}_{abc}(\phi, \delta\phi) = \frac{1}{16\pi}\epsilon_{dabc} v^d$$

pri čemu je

$$v_d = \nabla^b \delta g_{db} - g^{ce} \nabla_d \delta g_{ce} - 4 F_d{}^b \delta A_b$$

Možemo pročitati jednadžbe gibanja (u slučaju bez izvora):

$$G^{ab} - 8\pi T^{ab}_{EM} = 0$$

$$\nabla_a F^{ab} = 0$$

Na temelju forme simplektičkog potencijala, $\boldsymbol{\Theta}$, moguće je odrediti Noetherinu struju te, konačno, Noetherin naboj. U daljnjem računu ćemo koristiti formu $\boldsymbol{\Theta}$ i Noetherin naboj

$$\mathcal{Q}_{ab} = -\frac{1}{16\pi} \epsilon_{abcd} \nabla^c \xi^d - \frac{1}{8\pi} \epsilon_{abcd} F^{cd} A_e \xi^e$$

Prvi zakon termodinamike crnih rupa - ravnotežno stanje

Postoje dvije verzije prvog zakona termodinamike crnih rupa, verzija ravnotežnog stanja i verzija fizikalnog procesa. Verzija ravnotežnog stanja uspoređuje dva proizvoljno bliska stacionarna rješenja za crne rupe. Izabiremo ξ^a tako da

$$\xi^a = t^a + \Omega_H \varphi^a$$

pri čemu je ξ^a vektorsko polje Killingovog tipa. Nadalje, neka je Σ asimptotska hiperploha koja iščezava na dijelu horizonta $\mathcal{H}$ koji se nalazi u budućnosti u odnosu na bifurkacijsku plohu. Presjek horizonta označavat ćemo s $S_{\mathcal{H}}$. Pogodnim odabirom se pokazalo promatrati jednake hiperplohe, horizonte, kao i Killingove vektore t^a i φ^a za dva rješenja. Tada slijedi

$$\delta t^a = 0 = \delta \varphi^a$$
$$\delta \xi^a = \delta \Omega_H \varphi^a$$

Kako je pokazano u formalizmu, možemo pisati

$$\delta M = \Omega_H \delta \mathcal{J} + \int_{S_H} (\bar{\delta} \boldsymbol{\mathcal{Q}}[\xi] - \xi \cdot \boldsymbol{\Theta})$$

Promatrat ćemo odvojeno doprinose elektromagnetskim i gravitacijskih polja. Noetherin naboj i formu simplektičkog potencijala možemo zapisati kao

$$\mathcal{Q}_{ab} = \mathcal{Q}_{ab}^{GR} + \mathcal{Q}_{ab}^{EM}$$

Na sličan način

$$\Theta_{abc} = \Theta_{abc}^{GR} + \Theta_{abc}^{EM}$$

Integral je sada moguće zapisati kao zbroj dva člana

$$\int_{S_H} (\bar{\delta} \mathcal{Q}_{ab}^{GR}[\xi] - \xi \cdot \Theta_{ab}^{GR}) + \int_{S_H} (\bar{\delta} \mathcal{Q}_{ab}^{EM}[\xi] - \xi \cdot \Theta_{ab}^{EM})$$

Potrebno je izvrijedniti četiri integrala.

Gravitacijski doprinos

Na horizontu imamo relaciju

$$\nabla_c \xi_d = \kappa \epsilon_{cd}$$

pri čemu je ϵ_{cd} binormala na S_H. Promotrimo

$$\begin{aligned}\int_{S_H} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] &= \int_{S_H} -\frac{1}{16\pi}\epsilon_{abcd}\nabla^c \xi^d \\ &= -\frac{\kappa}{16\pi}\int_{S_H} \epsilon_{abcd}\epsilon_{cd} \\ &= \frac{\kappa}{8\pi} A\end{aligned}$$

pri čemu je A površina crne rupe. Pomoću identiteta za varijaciju imamo

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \int_{S_H} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] \frac{1}{8\pi}\delta(\kappa A) + \frac{\delta\Omega_H}{16\pi}\int_{S_H} \epsilon_{abcd}\nabla^c \varphi^d \\ = \frac{1}{8\pi}\delta(\kappa A) + \delta\Omega_H J_H\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_H} \xi \cdot \Theta^{GR}_{ab} = \\
&= \frac{1}{16\pi} \int_{S_H} \xi^a \epsilon_{dabc} (\nabla^b \delta g_{db} - g^{ce} \nabla_d \delta g_{ce}) \\
&= \frac{1}{8\pi} A \delta\kappa + \delta\Omega_H J_H
\end{aligned}
$$

Konačno, kombiniranjem izraza dobivamo

$$
\begin{aligned}
&\int_{S_H} (\bar{\delta} \mathcal{Q}^{GR}_{ab}[\xi] - \xi \cdot \Theta^{GR}_{ab}) = \\
&= \frac{1}{8\pi} \delta(\kappa A) + \delta\Omega_H J_H - \frac{1}{8\pi} A \delta\kappa - \delta\Omega_H J_H \\
&= \frac{\kappa}{8\pi} \delta A
\end{aligned}
$$

Elektromagnetski doprinos

U ovom izvodu koristimo prvi zakon termodinamike u prisustvu elektromagnetskih polja: Φ^{EM} je konstanta na horizontu.

$$\int_{S_H} \mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] = \Phi^{EM} Q$$

Kao i u gravitacijskom slučaju, koristimo identitet za varijaciju i jednadžbi gibanja

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \int_{S_H} \mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] &= \delta(\Phi^{EM} Q) + \frac{1}{8\pi} \int_{S_H} \epsilon_{abcd} F^{cd} A_e \delta\xi^e \\ &= \delta(\Phi^{EM} Q) + \frac{\delta\Omega_H}{8\pi} \int_{S_H} \epsilon_{abcd} F^{cd} A_e \varphi^e\end{aligned}$$

Preostaje izračunati posljednji integral

$$\int_{S_H} \xi \cdot \boldsymbol{\Theta}^{EM} = -\frac{1}{4\pi} \int_{S_H} \epsilon_{cdab} F^{ce} \xi^d \delta A_e$$

Volumni element ϵ_{cdab} izrazit ćemo kao formu

$$\epsilon_{cdab} = \xi_c \wedge N_d \wedge \epsilon_{ab}$$

pri čemu je ϵ_{ab} volumni element na presjeku $S_{\mathcal{H}}$, a N_a buduće orijentirana nul-normala na $S_{\mathcal{H}}$ normalizirana tako da $N^a \xi_a = -1$. Cijeli postupak je predug da bismo ga iznosili ovdje. Konačni rezultat iznosi

$$\int_{S_H} \xi \cdot \boldsymbol{\Theta}^{EM} = -Q\delta\Phi^{EM} + \frac{\delta\Omega_H}{8\pi} \int_{S_H} \epsilon_{abcd} F^{cd} A_e \varphi^e$$

sada imamo

$$\int_{S_H} (\bar{\delta}\mathcal{Q}^{EM}_{ab}[\xi] - \xi \cdot \Theta^{EM}_{ab}) = \Phi^{EM}\delta Q$$

te konačno

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta\mathcal{J} + \Phi^{EM}\delta Q$$

Prvi zakon termodinamike crnih rupa - fizikalni proces

Verzija fizikalnog procesa provog zakona termodinamike crnih rupa promatra neki infinitezimalni fizikalni proces koji mijenja crnu rupu. Pretpostavlja se da se crna rupa svodi na neko novo, konačno, stacionarno rješenje. Prvi zakon dobivamo usporedbom početnog i konačnog stanja. Potrebno je proširiti ranije razvijen formalizam za Einstein-Maxwellovu teoriju. Tamo smo se zadržali na izračunu Noetherinog naboja iz struje, ali možemo pročitati i $\boldsymbol{C}_a$

$$C_{bcda} = \frac{1}{8\pi}\epsilon_{dabc}(G^{ab} - 8\pi T^{ab}_{EM})\xi_e + \frac{1}{4\pi}\epsilon_{dabc}A_e\xi^e\nabla_f F^{df}$$

te jednadžbe gibanja u slučaju s izvorima

$$\begin{aligned} 8\pi T^{ab} &= G^{ab} - 8\pi T^{ab}_{EM} \\ 4\pi j^a &= \nabla_b F^{ab} \end{aligned}$$

Koristimo

$$\delta C_{bcda} = \epsilon_{dabc}(\delta T^{e}_{\ a} + \delta(j^{e})A_{a})$$

Izabiremo ξ^{a} tako da

$$\xi^{a} = t^{a} + \Omega_{H}\varphi^{a}$$

pri čemu je ξ^{a} vektorsko polje Killingovog tipa. Nadalje, neka je Σ asimptotska hiperploha koja iščezava na horizontu događaja crne rupe. Budući da perturbacije iščezavaju na unutarnjem rubu hiperplohe $\partial\Sigma$, za promatrani slučaj vrijedi

$$\delta M = \Omega_{H}\delta J - \int_{\Sigma} \epsilon_{dabc}(\xi^{a}\delta T^{e}_{\ a} + \xi^{a}A_{a}\delta j^{e})$$

udući da pretpostavljamo da u konačnici sva masa i naboj završe u crnoj rupi, integral po Σ možemo izvrijedniti po horizontu. Izraz pod integralom može se zapisati kao struja, α te uz N_{a}, definirano kao u prethodnome poglavlju

$$\delta M = \Omega_{H}\delta J - \int_{\mathcal{H}} \alpha^{d} k_{d}\tilde{\epsilon}_{abc}$$

pri čemu je k^{a} tangenta na afino-parametrizirane generatore nul-geodezika horizonta događaja, a $\tilde{\epsilon}_{abc} = N^{d}\epsilon_{dabc}$.

Dio struje proporcionalan s δj^a; koristimo nulti zakon u prisustvu elektromagnetskih polja $\Phi^{EM} = -\xi^a A_a|_{\mathcal{H}}$.

$$\begin{aligned} I &= -\int_{\mathcal{H}} \Phi^{EM} \delta j^e k_d \tilde{\epsilon}_{abc} \\ &= -\Phi^{EM} \int_{\mathcal{H}} \delta j^e k_d \tilde{\epsilon}_{abc} \end{aligned}$$

pri čemu integral prepoznajemo kao promjenu toka naboja u crnu rupu, δQ, te konačno $I = \Phi^{EM} \delta Q$.

Za izračun promjene površine koristimo Raychaudhurijevu jednadžbu

$$\frac{d\theta}{dV} = -\frac{1}{2}\theta^2 - \sigma_{ab}\sigma^{ab} - R_{ab}k^a k^b$$

Izbor: pozadinsko prostorvrijeme slagat će se s prostorvremenom perturbirane crne rupe te se stoga generatori nul-geodezika ne mijenjaju [7]. Posljedica takvog izbora je da perturbacija na horizontu nestaje, a $\delta k^a \propto k^a$.

$$\begin{aligned} \frac{d(\delta\theta)}{dV} &= -8\pi\delta([T_{total}]_{ab}k^a k^b)|_{\mathcal{H}} \\ &= -8\pi\delta([T_{EM}]_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}} - 8\pi(\delta T_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}} \end{aligned}$$

Prvi član propada te ostaje

$$\frac{d(\delta\theta)}{dV} = -8\pi(\delta T_{ab})k^a k^b|_{\mathcal{H}}$$

Tu ćemo relaciju integrirati po horizontu. Koristeći parcijalnu integraciju dobivamo

$$\kappa\delta A = 8\pi \int_{\mathcal{H}} (\delta T^{\ b}_{a})\xi^a k_b$$

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi}\delta A + \Omega_H \delta\mathcal{J} + \Phi^{EM}\delta Q$$

što je rezultat koji smo željeli pokazati.

Zaključak

(i) analogija između zakona termodinamike i zakona mehanike crnih rupa; proporcionalnost između entropije i površine crne rupe te temperature i površinske gravitacije κ

(ii) Formaliam kovarijantnog faznog prostora koji vrijedi za sve teorije izvodive od lagranžijana invarijantnog na izomorfizam

(iii) Dvije verzije prvog zakona mehanike crnih rupa: verzija ravnotežnog stanja i verzija fizikalnog procesa

(iv) generalizacija na Einstein-Young-Mills teoriju; generalizacija na nelinearnu elektrodinamiku

I. Smolić A. Bokulić and T. Jurić.
Black hole thermodynamics in the presence of nonlinear electromagnetic fields.
Phys.Rev., D103:124059, 2021.

J. M. Bardeen, B. Carter, and S.W. Hawking.
The Four Laws of Black Hole Mechanics.
Commun. math. Phys., 31:161–170, 1973.

J.D. Bekenstein.
Black Holes and Entropy.
Phys.Rev., D7:2333, 1973.

J.D. Bekenstein.
Generalized Second Law of Thermodynamics in Black-Hole Physics.
Phys.Rev., D9:3292, 1974.

S. Carlip.
Black Hole Thermodynamics.
gr-qc/1410.1486, 2014.

S. Gao.
First law of black hole mechanics in Einstein-Maxwell and Einstein-Yang-Mills theories.
Phys.Rev., D68:044016, 2003.

S. Gao and R.M. Wald.
The 'phyisical process version' of the first law and the generalized second law for charged and rotating black holes.
Phys.Rev., D64, 2001.

S.W. Hawking.
Occurrence of Singularities in Open Universes.
Phys.Rev.Lett., 15:689, 1965.

S.W. Hawking.
Singularities in the Universes.
Phys.Rev.Lett., 17:444, 1966.

S.W. Hawking.
Particle Creation by Black Holes.
Commun. math. Phys., 43:199, 1975.

S.W. Hawking and G.F.R. Ellis.
The Large Scale Structure of Space-Time.
Cambridge University Press, Cambridge, 1973.

V. Iyler and R.M. Wald.
Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy.
Phys.Rev., D50:846, 1994.

B.S. Kay and R.M. Wald.
Theorems on the uniqueness and thermal properties of stationary, nonsingular, quasifree states on spacetimes with a bifurcate killing horizon.
Phys.Rept., 207:49, 1991.

J. Lee and R.M. Wald.
Local Symmetries and Constraints.
J.Math.Phys., 31:725, 1990.

R. Penrose.
Gravitational Collapse and Space-Time Singularities.

Phys.Rev.Lett., 14:57, 1965.

E. Poisson.
A Relativist's Toolkit.
Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

A. Raychaudhuri.
Relativistic Cosmology i.
Phys.Rev., 98:1123, 1955.

I. Smolić.
Killing Horizons as Equipotential Hypersurfaces.
Class. Quantum Grav., 29:2007002, 2012.

I. Smolić.
On the various aspects of electromagnetic potentials in spacetimes with symmetries.
Class. Quantum Grav., 31:235002, 2014.

I. Smolić.
Diferencijalna geometrija u fizici.
skripta, 2022.

D. Sudarsky and R.M. Wald.
Extrema of Mass, Stationarity and Staticity, and Solutions to the Einstein-Young-Mills Equations.
Phys.Rev., D46:1453, 1992.

R.M. Wald.
General Relativity.
University of Chicago Press, Chicago, 1984.

R.M. Wald.
Black Hole Entropy is Noether Charge.
Phys.Rev., 48:3427, 1993.

R.M. Wald.
Quantum Field Theory in Curved Spacetime and Black Hole Thermodynamics.
University of Chicago Press, Chicago, 1994.

R.M. Wald.
The Thermodynamics of Black Holes.
LivingRev.Rel., 2001.

R.M. Wald and A.Zoupas.
General definition of 'conserved quantities' in general relativity and other theories of gravity.
Phys.Rev., D61:084027, 2000.

A.C. Wall.
A Survey of Black Hole Thermodynamics.
gr-qc/1804.10601, 2018.