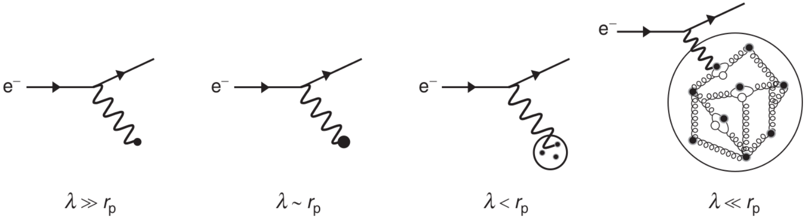
Poopćene partonske distribucije

Filip Bilandžija
Mentor: prof. dr. sc. Krešimir Kumerički

26. siječnja 2023.

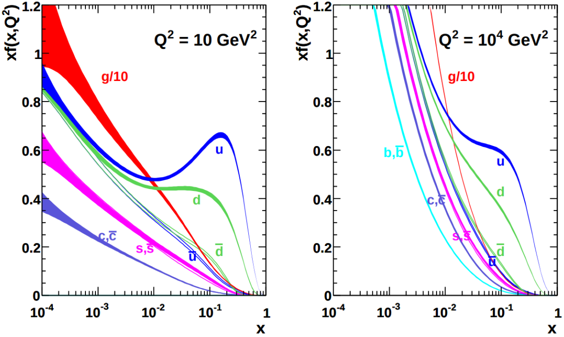
fbilandz.phy@pmf.hr

- Elektron međudjeljuje s protonom izmjenom virtualnog fotona
- Rezultat raspršenja uvelike ovisi o valnoj duljini virtualnog fotona
- Na višim energijama dobivamo bolji uvid u strukturu protona



Slika: Ovisnost prirode raspršenja elektrona na protonu u odnosu na valnu duljinu virtualnog fotona. Preuzeto iz [1].

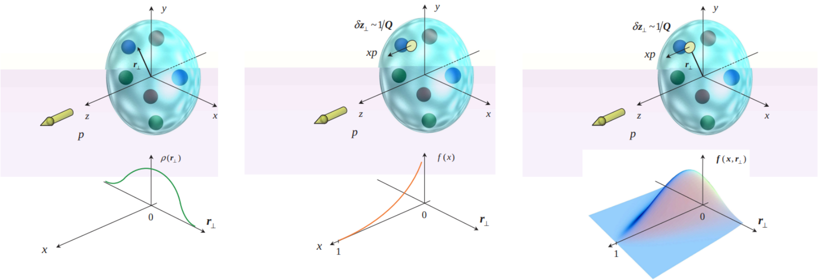
- Iz DIS eksperimenata dobivamo uvid u strukturu protona preko PDF-ova i nuklearnih form faktora
- PDF-ovi predstavljaju longitudinalnu distribuciju impulsa partona
- Nuklearni form faktori predstavljaju transverzalnu raspodjelu naboja u nukleonu



Slika: Protonski PDF-ovi. Preuzeto iz [2].

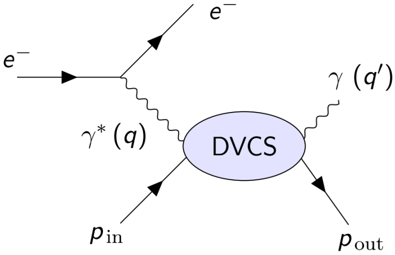
- PDF-ovi i nuklearni form faktori zajedno nam ne daju punu kvalitativnu sliku raspodjele partona u proton
  - Drugim riječima, ne daju nam 3D sliku strukture protona

$\Rightarrow$ Uvodimo poopćene partonske distribucije (GPD)



Slika: Probabilistička interpretacija form faktora, PDF-ova i GPD-ova za $\eta = 0$. Preuzeto iz [3].

- GPD-ove možemo proučavati kroz ekskluzivne procese:
  - Najjednostavniji od njih je duboko virtualno komptonsko raspršenje
- Dobivamo pristup informacijama poput raspodjele transverzalnog impulsa, angularnog momenta i tlaka u protonu



Slika: Duboko virtualno komptonsko raspršenje. Preuzeto iz [4].

- GPD očigledno sadrži više informacija od PDF-a, stoga ovisi o više varijabli:
  - $x = \frac{k^+ + k'^+}{2P^+}$, gdje su k i k' longitudinalni impulsi emitiranog i apsorbiranog kvarka, što odgovara frakciji longitudinalnog impulsa
  - $\eta = -\frac{\Delta^+}{P^+}$ - varijabla asimetrije, otprilike odgovara izmjeni impulsa
  - t - Mandelstanova varijabla
  - Q^2 - izmjena energije, relativno slaba pa se često ni ne piše
- Konvencija - koordinate svjetlosnog stošca: $a^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^0 \pm a^3)$ i $a = (a^+, \boldsymbol{a}, a^-)$.
- Definicija GPD-a, primjerice u nepolariziranom kvarkovskom sektoru:

$$F^q = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}z^-}{2\pi} e^{i\pi P^+ z^-} \left\langle p' \right| \bar{q}\left(-z\right) \gamma^0 q\left(z\right) \left|p\right\rangle \Big|_{z^+=0, \boldsymbol{z}=0} \qquad (1)$$

- Ovisnost o Q^2 dobro je poznata:
  - Evolucijom po Q^2 možemo ispitivati i dobiti više informacija o ovisnosti GPD-a o drugim varijablama
- Jednadžba evolucije u vodećem redu je:

$$Q \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q} F^q(x, \eta,^2, Q^2) = -\frac{\alpha_s(Q)}{2\pi} \gamma^{(0)} \otimes F^q(x, \eta, \Delta^2, Q^2), \tag{2}$$

gdje je operator konvolucije definiran kao:

$$\gamma^{(0)} \otimes F^q(x, \eta, \Delta^2, Q^2) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}y}{|\eta|} \gamma^{(0)} \left(\frac{x}{\eta}, \frac{y}{\eta} \right) F^q(y, \eta, \Delta^2, Q^2) \tag{3}$$

- Evolucijski kernel $\gamma^{(0)}$ pritom je dan izrazom:

$$\gamma^{(0)}(x,y) = \Bigg[\Theta(x,y)\frac{1+x}{1+y}\left(1+\frac{2}{y-x}\right) + \Theta(-x,-y)\frac{1-x}{1-y}\left(1+\frac{2}{x-y}\right)\Bigg]_+, \quad (4)$$

gdje +-znak u indeksu zagrade označava izraz $[K(x,y)]_+ = K(x,y) - \delta(x-y)\int \mathrm{d}z K(z,y)$, a $\Theta(x,y)$ je skraćena notacija za izraz:

$$\Theta(x,y) = \mathrm{sign}(1+y)\theta\left(\frac{1+x}{1+y}\right)\theta\left(\frac{y-x}{1+y}\right) \quad (5)$$

- Potpuno netrivijalna konvolucija
- Evolucijski kernel je dijagonalan u bazi Gegenbauerovih polinoma
  - Uvodimo konformne momente

- Konformni momenti GPD-a definirani su relacijom:

$$F_n(\eta, t) = \int_{-1}^{1} \mathrm{d}x c_n(x, \eta) F(x, \eta, t), \tag{6}$$

gdje je $F(x, \eta, t)$ GPD, dok je c_n dan izrazom:

$$c_n(x, \eta) = \eta^n \frac{\Gamma(3/2)\Gamma(1+n)}{2^n \Gamma(3/2+n)} C_n^{3/2}\left(\frac{x}{\eta}\right), \tag{7}$$

kod kojeg $C_n^{3/2}$ označava Gegenbauerov polinom

- Uvođenjem konformnih momenata, jednadžba evolucije se pojednostavljuje na:

$$Q\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}Q}F_j^q(\eta,t,Q^2) = -\frac{\alpha_s(\mu)}{2\pi}\gamma_j^{(0)}F_j^q(\eta,t,Q^2) \tag{8}$$

- Više nemamo netrivijalnu konvoluciju na desnoj strani, nego imamo jednostavno množenje
- U prostoru konformnih momenata (j-prostoru) jednostavnije je korigirati GPD-ove nego u prostoru frakcije longitudinalnih impulsa (x-prostoru)

- GPD-ove je u j-prostoru teško interpretirati
- Važna fizikalna svojstva GPD-ova vidljiva su tek u x-prostoru:
  - GPD povezan s raspodjelom kvarkova po momentu i položaju
  - Poznavanje GPD-ova u x-prostoru rješava problem spina protona
  - GPD-ovi u x-prostoru daju pristup matričnim elementima tenzora energije i impulsa poput tlaka u protonu
- Stoga, važna nam je transformacija iz j-prostora u x-prostor.

- Problem inverza riješen uvođenjem analitičkog produljenja Gegenbauerovih polinoma p_j:

$$p_j(x,\eta) = \theta(\eta - |x|)\eta^{-j-1}\mathcal{P}_j\left(\frac{x}{\eta}\right) + \theta(x-\eta)\eta^{-j-1}\mathcal{Q}_j\left(\frac{x}{\eta}\right) \tag{9}$$

gdje su $\mathcal{P}_j$ i $\mathcal{Q}_j$ definirani kao:

$$\mathcal{P}_j(x) = \frac{2^{j+1}\Gamma(5/2+j)}{\Gamma(1/2)\Gamma(1+j)}(1+x)\,{}_2F_1\left(-j-1, j+2, 2; \frac{x+1}{2}\right) \tag{10}$$

$$\mathcal{Q}_j(x) = -\frac{\sin(\pi j)}{\pi}x^{-j-1}\,{}_2F_1\left(\frac{j+1}{2}, \frac{j+2}{2}, \frac{5}{2}+j; \frac{1}{x^2}\right) \tag{11}$$

- Inverz je onda dan tzv. Mellin-Barnes (MB) integralnom transformacijom:

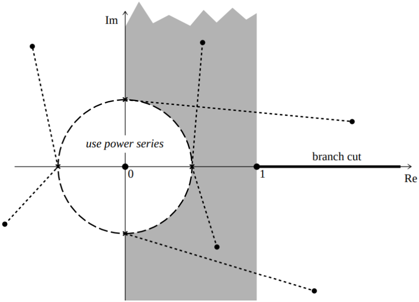
$$F(x,\eta,t) = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{d}j\,\frac{1}{\sin(\pi j)}p_j(x,\eta)F(\eta,t). \tag{12}$$

- Problem kod funkcija $\mathcal{P}_j$ i $\mathcal{Q}_j$ je što u sebi sadrže hipergeometrijsku funkciju
  - U Python-u dosad nije postojala implementacija hipergeometrijske funkcije koja podržava kompleksne parametre
  - Srećom, postoji implementacija u C-u (iz knjige *Numerical Recipes in C*) koju možemo prilagoditi.
- Algoritam dijeli na prostor na dva područja: $|z| \leq 0.5$ i $|z| > 0.5$
- $|z| \leq 0.5$ - red dovoljno brzo konvergira

$$ {}_2F_1(a, b, c; z) = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots \quad (13) $$

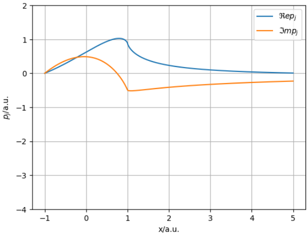
- $|z| > 0.5$ - računamo red za z_0 + integriramo put od točke z_0 do točke z_1 pomoću diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s} &= (z_1 - z_0)F', \\ \frac{\mathrm{d}F'}{\mathrm{d}s} &= (z_1 - z_0)\left(\frac{abF - [c - (a+b+1)z]F'}{z(1-z)}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

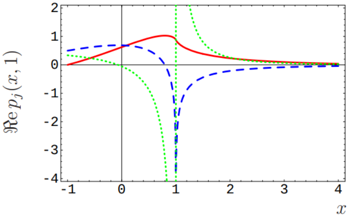


Slika: Skica funkcioniranja algoritma. Preuzeto iz [5].

- Nakon implementacije hipergeomterijske funkcije, bilo je moguće implementirati $\mathcal{P}_j$ i $\mathcal{Q}_j$, pa potom i p_j
- Implementirani p_j je zatim trebalo i testirati



(a) Realni (plavo) i imaginarni (narančasto) dio p_j.



(b) Realni dio p_j (crvena linija) i njegova prva i druga derivacija. Preuzeto iz [6].

- Za samu transformaciju iz j-prostora u x-prostor, potreban nam je integral:

$$F(x,\eta,t) = \frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \mathrm{d}j \frac{1}{\sin(\pi j)} p_j(x,\eta) F(\eta,t). \qquad (15)$$

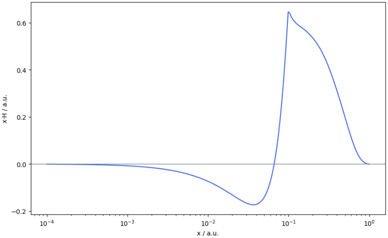
- Za numeričko izvrednjavanje to je potrebno pretvoriti u normalni realni integral
- Korištenjem $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$, integral moguće je pretvoriti u integral:

$$\frac{1}{2i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} dj\ f(j) = \left(e^{i\phi}\int_0^{\infty} dy\ f(j = c + ye^{i\phi})\right) \qquad (16)$$

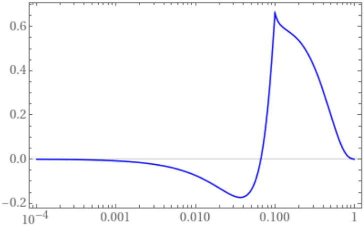
- Za prve testove smo koristili jednostavnu GPD funkciju u j-prostoru oblika

$$H_j = 2\frac{B(1/2+j,4)}{B(1/2,4)} = 2\frac{(1/2)_4}{(1/2+j)_4} \tag{17}$$

- Pritom smo prvotno fiksirali $\eta = 0.1$

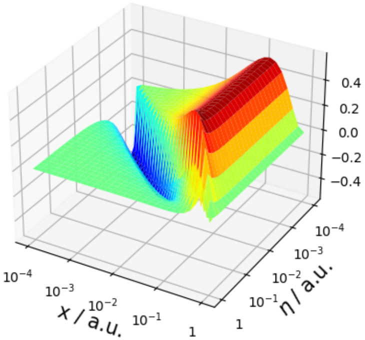


(a) Nacrtano u Pythonu.

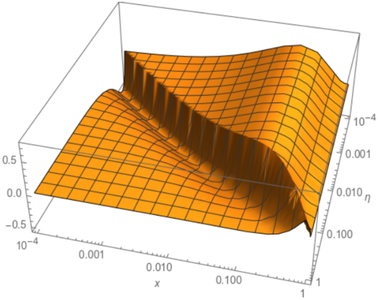


(b) Nacrtano u Wolfram Mathematici.

- Nakon dobrog slaganja u grafovima na prethodnom slide-u, fiksni η zamijenili smo ovisnošću o η i dobili 3D grafove



(a) Nacrtano u Pythonu.



(b) Nacrtano u Wolfram Mathematici.

- Prvotni kod se izvršavao oko 2 i pol minute za 2D graf, te čak 30 minuta za 3D graf
  - Optimizacija je bila nužna
- Kod se isprva izvršavao za jednu po jednu točku
  - Vektorizirali smo ga pomoću `numpy` paketa
  - `numpy` paket posjeduje korutine napisane u C-u za račun s matricama
- Vektorizacija nije svugdje pomogla - negdje je čak i usporila stvari
- Optimiziran kod je sadržavao vektorizirane i sekvencijalne dijelove

- Za integraciju smo isprva koristili funkcija `scipy.quad`
  - Namijenjena za širok spektar problema
  - Upravo zbog svoje široke primjene, ne posjeduje željene performanse
- Stoga smo je zamijenili integracijom Gauss–Legendrovom kvadraturom
  - Svodi računanje integrala na sumu po točkama s različitim težinama
- Podijelili smo područja integracije na 12 intervala danih sa sljedećim točkama: [0., 0.01, 0.08, 0.15, 0.3, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0, 10.0]
  - U svakom intervalu zatim provodimo Gauss–Legendrovu kvadraturu
  - Na kraju sve doprinose zbrajamo i dobivamo vrijednost integrala

- Rješavanje diferencijalnih jednadžbi prvotno preko `scipy.odeint`
  - Slični problemi kao i s `scipy.quad`
  - Zamjenjena s Runge-Kutta metodom
- Runge-Kutta metoda - iterativna metoda za rješavanja problema početne vrijednosti
- Sveukupan efekt naših optimizacija je bilo drastično ubrzanje izvršavanja koda
  - 2D graf: 2.5 min $\rightarrow$ 7s
  - 3D graf: 30 min $\rightarrow$ 20s

[1] Mark Thomson. Modern particle physics. New York: Cambridge University Press, 2013. ISBN: 978-1-107-03426-6. DOI: 10.1017/CBO9781139525367.

[2] A. D. Martin i dr. "Parton distributions for the LHC". The European Physical Journal C 63.2 (srpanj 2009.), str. 189–285. DOI: 10.1140/epjc/s10052-009-1072-5. URL: https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-009-1072-5.

[3] A.V. Belitsky i A.V. Radyushkin. "Unraveling hadron structure with generalized parton distributions". Physics Reports 418.1-6 (listopad 2005.), str. 1–387. DOI: 10.1016/j.physrep.2005.06.002. URL: https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2005.06.002.

[4] Cédric Mezrag. "An Introductory Lecture on Generalised Parton Distributions". Few-Body Systems 63.3 (kolovoz 2022.). DOI: 10.1007/s00601-022-01765-x. URL: https://doi.org/10.1007%2Fs00601-022-01765-x.

[5] William H. Press i dr. Numerical Recipes in C. Second. Cambridge, USA: Cambridge University Press, 1992.

[6] D. Müller i A. Schäfer. "Complex conformal spin partial wave expansion of generalized parton distributions and distribution amplitudes". Nuclear Physics B 739.1-2 (travanj 2006.), str. 1–59. DOI: 10.1016/j.nuclphysb.2006.01.019. URL: https://doi.org/10.1016%2Fj.nuclphysb.2006.01.019.

[7] Krešimir Kumerički, Simonetta Liuti i Hervé Moutarde. "GPD phenomenology and DVCS fitting". The European Physical Journal A 52.6 (lipanj 2016.). DOI: 10.1140/epja/i2016-16157-3. URL: https://doi.org/10.1140%2Fepja%2Fi2016-16157-3.

[8] Marko Cvitković. "Proučavanje duboko virtualnog komptonskog raspršenja pomoću strojnog učenja". Mag. rad. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2020. URL: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:651085.

[9] Ivan Ćorić. "Istraživanje kvarkovsko-gluonske strukture protona pomoću strojnog učenja". Mag. rad. Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet, 2019. URL: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:217:856388.

[10] Sebastian Horvat. Funkcije strukture protona. 2019. URL: https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/sem2019/semHorvat.pdf.

[11] Valerio Bertone i dr. "Revisiting evolution equations for generalised parton distributions". The European Physical Journal C 82.10 (listopad 2022.). DOI: 10.1140/epjc/s10052-022-10793-0. URL: https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-022-10793-0.