Globalne simetrije: viših formi i 2-grupne

Sara Zeko
Mentor: dr. sc. Athanasios Chatzistavrakidis

26. siječnja, 2024.

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Sadržaj

Uvod

Uvod

- simetrije: globalne vs. lokalne
- **Noetherin teorem:**
  kontinuirana globalna simetrija $\rightarrow$ zakon očuvanja
- baždarna polja kao više forme $\rightarrow$ potreba za **generalizacijom** [1] globalnih simetrija

[1] D. Gaiotto et al., Generalized Global Symmetries; C. Córdova et al., Exploring 2-group Global Symmetries

Uvod

- **q-forma je potpuno antisimetričan tenzor ranga $(0, q)$.**
- Intuicija:
  0-forma $\rightarrow$ funkcija
  1-forma $\rightarrow$ kovektor
- Ako je ω q-forma i η je p-forma, *vanjski produkt* je konstrukcija $(p+q)$-forme:

$$(\omega \wedge \eta)_{\mu_1 \dots \mu_q \nu_1 \dots \nu_p} = \frac{(q+p)!}{p!q!} \omega_{[\mu_1 \dots \mu_q} \eta_{\nu_1 \dots \nu_p]} \ .$$

- Gradirana komutativnost:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{qp} \eta \wedge \omega \ .$$

Uvod

- *Vanjska derivacija* (je karta koja) u lokalnim kordinatama djeluje kao:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{q!} \frac{\partial \omega_{\mu_1 \dots \mu_q}}{\partial x^\nu} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_q} \ ,$$

  i vraća $(q+1)$-formu.

- Zbog antisimetričnosti:

$$\mathrm{d}\left(\mathrm{d}\omega\right) = 0 \ .$$

- Vanjska derivacija vanjskog produkta:

$$\mathrm{d}\left(\omega \wedge \eta\right) = \left(\mathrm{d}\omega\right) \wedge \eta + \left(-1\right)^q \omega \wedge \left(\mathrm{d}\eta\right) \quad .$$

Uvod

- *Hodgeov operator* je karta koja, djelujući na q-formu ω, daje $(n-q)$-formu, označenu s $*\omega$ kako slijedi.

$$(*\omega)_{\mu_1\dots\mu_{n-q}} = \frac{1}{q!}\sqrt{|g|}\epsilon_{\mu_1\dots\mu_{n-q}\nu_1\dots\nu_q}\omega^{\nu_1\dots\nu_q}$$

- Koristeći Hodgeov operator, možemo definirati unutarnji produkt dviju q-formi ω i η:

$$\langle\eta,\omega\rangle = \int_M \eta\wedge *\omega \ .$$

Obične globalne simetrije

Obične globalne simetrije - Noetherin teorem

Noetherin teorem pokazuje da, za svaku kontinuiranu globalnu simetriju, postoji odgovarajuća *očuvana struja* j^μ dana s:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \ , \qquad \mathrm{d} * j^{(1)} = 0 \ ,$$

gdje je $j^{(1)}$ 1-forma.

Očuvani naboj definiran je kao:

$$Q = \int j^0 d^3x \ , \qquad Q = \int *j^{(1)} \ .$$

Lako se pokaže:

$$\frac{dQ}{dt} = 0 \ .$$

Obične globalne simetrije - Noetherin teorem

Promotrimo akciju S:

$$S = \int \mathcal{L}(\psi, \partial_\mu \psi, x) d^4x \quad ,$$

i transformaciju:

$$\psi \rightarrow \psi + \alpha \Delta \psi \ .$$

U jednadžbama iznad, ψ je polje, α je infinitezimalni parametar i sve ostale oznake su standardne.

Obične globalne simetrije - Noetherin teorem

Gustoća lagranžijana $\mathcal{L}$ također se transformira, kako je i pokazano sljedećim izrazom.

$$\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \alpha \partial_\mu \mathcal{J}^\mu$$

Uvrštavanje $\delta\psi = \alpha\Delta\psi$ u varijaciju gustoće lagranžijana daje **očuvanu struju**:

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \psi)} \Delta\psi - \mathcal{J}^\mu \ .$$

Obične globalne simetrije - električni naboj

Primijenimo prethodno razmatranje na slobodno fermionsko polje ψ vezano za elektromagnetsko polje, prikazano akcijom S:

$$S = \int \overline{\psi} \left(i\gamma^{\mu} D_{\mu} - m \right) \psi d^4x \ ,$$

gdje je

$$D_{\mu} = \partial_{\mu} + ieA_{\mu} \ ,$$

sa standardnom notacijom.

Može se pokazati da je gustoća lagranžijana invarijantna na faznu transformaciju ψ:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi$$

okarakteriziranom $U(1)$ grupom transformacija.

Obične globalne simetrije - električni naboj

Razvojem transformacije u Taylorov red dobivamo $\Delta\psi = i\psi$ i $\Delta\overline{\psi} = -i\overline{\psi}$.

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{L} = 0 \rightarrow \mathcal{J}^{\mu} = 0$$

Sveukupno, očuvana struja je dana s:

$$j^{\mu} = -\overline{\psi}\gamma^{\mu}\psi \ .$$

Napomene

- Prilikom kvantizacije teorije, zakoni očuvanja mogu se narušiti.
  $\rightarrow$ anomalije
- Anomalija $\mathcal{A}(\mathcal{G})$ je član u (efektivnoj) akciji, koji je otklanja i odgovara zakonu neočuvanja.
- Anomalija je obično prikazana polinomom $\mathcal{I}^{(d+2)}(\mathcal{G})$ koji je $(d+2)$-forma.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}(\mathcal{G}) &= 2\pi i \int_{M_d} \mathcal{I}^{(d)}(\mathcal{G}, \delta\mathcal{G}) \ , \\
\mathrm{d}\mathcal{I}^{(d)}(\mathcal{G}, \delta\mathcal{G}) &= \delta\mathcal{I}^{(d+1)}(\mathcal{G}) \ , \\
\mathrm{d}\mathcal{I}^{(d+1)}(\mathcal{G}) &= \mathcal{I}^{(d+2)}(\mathcal{G})
\end{aligned}
$$

Generalizirane globalne simetrije

Generalizirane globalne simetrije

Globalna simetrija q-forme globalna je simetrija za koju je očuvana struja $(q+1)$-forma, a očuvani su naboji dimenzije q.

Ako promotrimo $U(1)_B^{(q)}$ simetriju proizašlu iz očuvane struje koja je $(q+1)$-forma $j_B^{(q+1)}$ i zadovoljava:

$$\mathrm{d} * j_B^{(q+1)} = 0 \ ,$$

očuvani naboji su dani, onda, s:

$$Q = \int *j^{(q+1)} \ .$$

Klasičan izvor za struju $j^{(q+1)}$ abelovsko je polje $B^{(q+1)}$ koje je $(q+1)$-forma. Vezanje struje dodaje sljedeći član u akciju:

$$\int B^{(q+1)} \wedge * j_B^{(q+1)} \ .$$

Pod $U(1)_B^{(q)}$ transformacijom, baždarno polje se treba tansformirati kako slijedi:

$$B^{(q+1)} \to B^{(q+1)} + \mathrm{d}\lambda_B^{(q)} \ ,$$

gdje je baždarni parametar $\lambda_B^{(q)}$ q-forma.

Generalizirane globalne simetrije - slobodna Maxwellova teorija

Uzmimo za primjer slobodnu $U(1)_c^{(0)}$ baždarnu teoriju s:

- $c^{(1)} \rightarrow f_c^{(2)} = \mathrm{d}c^{(1)}$,
- dvjema globalnim simetrijama 1-forme $U(1)_e^{(1)} \times U(1)_m^{(1)}$,
- i pozadinskim poljima $B_m^{(2)}$ i $B_e^{(2)}$.

Cilj je naći akciju S za ovu teoriju.
$\rightarrow$ vezati dinamičko polje za dva pozadinska polja

$\rightarrow$ dvije formulacije teorije: „električna" i „magnetska"

Generalizirane globalne simetrije - slobodna Maxwellova teorija

Za struje definirane kao:

$$j_e^{(2)} = -\frac{1}{e^2} f_c^{(2)} \ , \qquad j_m^{(2)} = -\frac{i}{2\pi} * f_c^{(2)} \ ,$$

dobivamo odgovarajuće zakone očuvanja, ako koristimo Maxwellove jednadžbe bez izvora:

$$\mathrm{d} * f_c^{(2)} = \mathrm{d} f_c^{(2)} = 0 \ .$$

Dva pozadinska polja, zbog svojih $U(1)_{e,m}^{(1)}$ simetrija, podvrgnuta su baždarnim transformacijama danim s:

$$B_{e,m}^{(2)} \to B_{e,m}^{(2)} + \mathrm{d}\Lambda_{e,m}^{(1)} \ .$$

Generalizirane globalne simetrije - slobodna Maxwellova teorija

„Električna" formulacija teorije:

$$c^{(1)} \to c^{(1)} + \Lambda_e^{(1)} \ , \quad f_c^{(2)} \to f_c^{(2)} + \mathrm{d}\Lambda_e^{(1)} \ .$$

Vezanje struja:

$$S\left(B_e^{(2)}, B_m^{(2)}, c^{(1)}\right) = \frac{1}{2e^2}\int \left(f_c^{(2)} - B_e^{(2)}\right) \wedge * \left(f_c^{(2)} - B_e^{(2)}\right) + \frac{i}{2\pi}\int B_m^{(2)} \wedge f_c^{(2)} \ .$$

- Prvi član invarijantan je na $U(1)_e^{(1)}$ i na $U(1)_m^{(1)}$ pozadinske transformacije.
- Drugi član invarijantan je na $U(1)_m^{(1)}$ pozadinske transformacije.
- Drugi član ima otklon[2] pod $U(1)_e^{(1)}$ pozadinskim transformacijama.

[2] eng. *shift*

Drugi član se pod $U(1)_e^{(1)}$ pozadinskim transformacijama mijenja kako slijedi.

$$\begin{aligned}\int B_m^{(2)} \wedge f_c^{(2)} \to \int B_m^{(2)} \wedge \left(f_c^{(2)} + \mathrm{d}\Lambda_e^{(1)}\right) \\ = \int B_m^{(2)} \wedge f_c^{(2)} + \int \mathrm{d}\Lambda_e^{(1)} \wedge B_m^{(2)}\end{aligned}$$

Ovaj otklon predstavlja 't Hooftovu anomaliju.

$$\frac{1}{4\pi^2} dB_e^{(2)} \wedge \mathrm{d}B_m^{(2)} \subset \mathcal{I}^{(6)}$$

Generalizirane globalne simetrije - slobodna Maxwellova teorija

„Magnetska" formulacija teorije:

$$\tilde{S}\left(B_e^{(2)}, B_m^{(2)}, c^{(1)}, \tilde{c}^{(1)}\right) = S\left(B_e^{(2)}, B_m^{(2)}, c^{(1)}\right) - \frac{i}{2\pi}\int \mathrm{d}\tilde{c}^{(1)} \wedge f_c^{(2)}$$

Prikladna promjena $\tilde{c}^{(1)}$ pod $U(1)_m^{(1)}$ pozadinskim transformacijama:

$$\tilde{c}^{(1)} \to \tilde{c}^{(1)} + \Lambda_m^{(1)}$$

Akcija u „magnetskoj" formulaciji:

$$\begin{aligned}\tilde{S}\left(B_e^{(2)}, B_m^{(2)}, \tilde{c}^{(1)}\right) = \frac{e^2}{8\pi}\int \left(\mathrm{d}\tilde{c}^{(1)} - B_m^{(2)}\right) \wedge * \left(\mathrm{d}\tilde{c}^{(1)} - B_m^{(2)}\right) \\ - \frac{i}{2\pi}\int B_e^{(2)} \wedge \left(\mathrm{d}\tilde{c} - B_m^{(2)}\right)\end{aligned}$$

Generalizirane globalne simetrije - slobodna Maxwellova teorija

- Očuvane struje:

$$\tilde{J}_m^{(2)} = \frac{i}{2\pi} * \mathrm{d}\tilde{c}^{(1)} = -J_e^{(2)} \quad , \tilde{J}_e^{(2)} = -\frac{e^2}{4\pi^2} \mathrm{d}\tilde{c}^{(1)} = J_m^{(2)}$$

- Holonomije polja $c^{(1)}$ i $\tilde{c}^{(1)}$ po zatvorenoj krivulji L su *Wilsonove petlje* $W_m(L)$ i *'t Hooftove petlje* $H_n(L)$ dane s:

$$W_m = \exp\left(im \int_L c^{(1)}\right), H_n(L) = \exp\left(in \int_L \tilde{c}^{(1)}\right) \quad ,$$

gdje su $m, n \in \mathbb{Z}$ naboji Wilsonovih, odnosno 't Hooftovih petlji.

2-grupne simetrije

2-grupne simetrije

Kvantna teorija polja ima 2-grupnu simetriju, ako se može vezati za pozadinsko baždarno polje koje je 2-forma (označeno s $B^{(2)}$), a **koje je podvrgnuto dodatnoj** 2-**grupnoj promjeni**, uz svoje $U(1)_B^{(1)}$ pozadinske baždarne transformacije.

Transformacija polja $A^{(1)}$ ostaje standardna:

$$A^{(1)} \to A^{(1)} + \mathrm{d}\Lambda_A^{(0)} \ ,$$

no polje $B^{(2)}$ podvrgnuto je dodatnoj promjeni.

$$B^{(2)} \to B^{(2)} + \mathrm{d}\Lambda_B^{(1)} + \frac{\hat{\kappa_A}}{2\pi}\Lambda_A^{(0)} F_A^{(2)}$$

$\hat{\kappa_A} \in \mathbb{Z}$ je strukturna konstanta 2-grupe.

2-grupne simetrije

Potonje daje najjednostavniji abelovski primjer 2-grupne simetrije:

$$U(1)_A^{(0)} \times_{\hat{\kappa_A}} U(1)_B^{(1)}$$

- Dodatna promjena u $B^{(2)}$ proporcionalna s $F_A^{(2)} \rightarrow$ ne možemo netrivijalno postaviti $A^{(1)}$ bez utjecaja na transformaciju $B^{(2)}$.
- Za $\hat{\kappa_A} = 0$, 2-grupni otklon nestaje i simetrija opisana 2-grupom razrješava se u:

$$U(1)_A^{(0)} \times U(1)_B^{(1)} \ .$$

2-grupne simetrije

Može se pokazati da simetrija opisana s

$$U(1)_A^{(0)} \times_{\hat{\kappa_A}} U(1)_B^{(1)},$$

proizlazi iz ishodišne simetrije:

$$U(1)_A^{(0)} \times U(1)_C^{(0)}$$

baždarenjem polja C.

$$U(1)_C^{(0)} \to U(1)_c^{(0)},\ C^{(1)} \to c^{(1)},\ F_C^{(2)} \to f_c^{(2)}$$

2-grupne simetrije

- Prilikom baždarenja, jedan od članova u zakonu neočuvanja je:

$$\mathrm{d} * j_A^{(1)} \supset -\frac{i\kappa_{A^2C}}{8\pi^2} F_A^{(2)} \wedge f_c^{(2)}$$

- Postoji prikladan izvor $(B^{(2)})$ za $f_c^{(2)}$ koji poništava anomaliju.

- $B^{(2)}$ mora imati 2-grupni član pod $U(1)_A^{(0)}$ transformacijom.

- $U(1)_A^{(0)} \times U(1)_C^{(0)} \xrightarrow{\textit{baždarenje } C^{(1)}} U(1)_A^{(0)} \times_{\hat{\kappa}_A} U(1)_B^{(1)}$

Zaključak

Zaključak

- globalna simetrija q-forme $\rightarrow$ očuvana struja koja je $(q+1)$-forma
- aspekti slobodne Maxwellove teorije $\rightarrow$ dualna formulacija s istom 't Hooftovom anomalijom
- Simetrija opisana 2-grupom dopušta miješanje dvaju pozadinskih baždarnih polja pod njihovim pozadinskim baždarnim transformacijama.
- $U(1)_A^{(0)} \times U(1)_C^{(0)} \xrightarrow{\textit{baždarenje } C^{(1)}} U(1)_A^{(0)} \times_{\hat{\kappa}_A} U(1)_B^{(1)}$

Literatura

- D. Gaiotto, A. Kapustin, N. Seiberg, and B. Willett, Generalized Global Symmetries,(2015), arXiv:1412.5148
- C. Córdova, T. T. Dumitrescu, and K. Intriligator, Exploring 2-Group Global Symmetries, arXiv:1802.04790
- D. Tong: Lectures on General Relativity
- D. Tong: Lectures on Gauge Theory