Pojava difeomorfne invarijantnosti u “toy” modelu svemira

Sven Hrastić, Mentor: Hrvoje Nikolić

26. siječnja 2024

Opća relativnost i difeomorfna invarijantnost

- Klasična opća relativnost opisuje gravitaciju kao posljedicu zakrivljenja vrijeme-prostora koji ima modificiranu metriku $g_{\mu\nu}$
- Jednadžbe gibanja se dobiju minimiziranjem Einstein-Hilbert akcije

$$S = \frac{c^4}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R \tag{1}$$

- U akciju je još potrebno dodati akciju obične materije $\int d^4x \mathcal{L}_M \sqrt{-g}$ i član proporcionalan s $-2\Lambda\sqrt{-g}$ pa se dobiju jednadžbe gibanja

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \tag{2}$$

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}$$

- Cijela teorija je invarijantna na opće koordinatne transformacije koje čuvaju $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ invarijantnim tj. 4-D difeomorfno invarijantna teorija

3 konceptualna problema u formuliranju teorije kvantne gravitacije

- Problem vremena
- Problem kozmološke konstante (katastrofa vakuuma)
- Informacijski paradoks crne rupe (firewall)
- Proučavam skupinu "toy" modela u kojima će se 1-D difeomorfna invarijantnost vremena pojaviti kao posljedica ograničenja na sustav da ima dobro definiranu energiju
- U literaturi se 1-D difeomorfna invarijantnost vremena zove *time representation invariance*
- U pokušaju kvantiziranja tog modela naići ćemo na "toy" verzije problema vremena i kozmološke konstante i do informacijskog paradoksa crne rupe

Model

- 1-D sustav koji proučavam ima N stupnjeva slobode $q(t) = \{q_1(t), ..., q_N(t)\}$
- Akcija glasi

$$A = \int dt L(q, \dot{q}) \tag{3}$$

$$L(q, \dot{q}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2} - V(q) \tag{4}$$

- Kanonski momenti

$$p_a = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_a} = m_a \dot{q}_a \tag{5}$$

- Hamiltonijan

$$H = \sum_{a=1}^{N} p_a \dot{q}_a - L = \sum_{a=1}^{N} \frac{p_a^2}{2m_a} + V(q) \tag{6}$$

- Kvantizacija je trivijalna

$$H |\psi(t)\rangle = i\hbar \partial_t |\psi(t)\rangle \tag{7}$$

Pojava difeomorfne invarijantnost

- Ako Hamiltonijan ne ovisi o vremenu on je očuvan te u klasičnoj fizici ima konstantnu vrijednost E pa je korisno uvesti

$$\mathcal{H}(q,p) = 0, \tag{8}$$

$$\mathcal{H}(q,p) \equiv H(q,p) - E. \tag{9}$$

- Pa imamo ograničenje u konfiguracijskom prostoru

$$\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2} + V(q) - E = 0. \tag{10}$$

- Sada modificiram akciju (3) tako da je u jednadžbe gibanja ugradjeno ograničenje (10)

$$\tilde{A} = \int dt \sqrt{g} \left[\sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2g} - V(q) + E \right]. \tag{11}$$

Pojava difeomorfne invarijantnost

- Sada u akciji imamo još jedan stupanj slobode $g(t) > 0$ te jednadžba gibanja glasi

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}}\left[\sum_{a=1}^{N}\frac{m_a\dot{q}_a^2}{2g} + V(q) - E\right] = 0 \tag{12}$$

- Iz akcije (11) se vidi da je akcija invarijantna na arbitrarne transformacije koje čuvaju $d\tau^2 \equiv g(t)dt^2$ invarijantnim
- Stoga je izbor $g(t)$ arbitraran pa izbor baždarenja $g = 1$ reducira (12) na ograničenje (10)
- Jasno je da je $g(t)$ analogan g_{00} te se predvidljivo transformira kao i u općoj relativnosti

$$g \to g' = \left(\frac{dt}{dt'}\right)^2 g \tag{13}$$

Ograničenje u kanonskoj formi

- Sada razvijam formalizam koji će biti koristan kasnije

$$\tilde{A} = \int dt \tilde{L}(q, \dot{q}, g) = \int dt \sqrt{g} \mathcal{L}(q, \dot{q}, g) \tag{14}$$

gdje su

$$\mathcal{L}(q, \dot{q}, g) = \sum_{a=1}^{N} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2g} - V(q) + E,$$

$$\tilde{L}(q, \dot{q}, g) = \sqrt{g} \mathcal{L}(q, \dot{q}, g) \tag{15}$$

- Kanonski momenti glase

$$\tilde{p}_a = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{q}_a} = \frac{m_a \dot{q}_a}{\sqrt{g}}, \qquad p_g = \frac{\partial \tilde{L}}{\partial \dot{g}} = 0 \tag{16}$$

Ograničenje u kanonskoj formi

- Hamiltonijan je

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g) = \sum_{a=1}^{N} \tilde{p}_a \dot{q}_a - \tilde{L} = \sqrt{g}\mathcal{H}(q,\tilde{p}) \tag{17}$$

$$\mathcal{H}(q,\tilde{p}) = \sum_{a=1}^{N} \frac{\tilde{p}_a^2}{2m_a} + V(q) - E \tag{18}$$

- Kanonska jednadžba za p_g

$$\dot{p}_g = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial g} = -\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{H} \tag{19}$$

- Pošto vrijedi (16) onda je i derivacija 0 pa vrijedi

$$-\frac{1}{2\sqrt{g}}\mathcal{H} = 0 \tag{20}$$

Ograničenje u kanonskoj formi

- Pošto vrijedi $g(t) > 0$ onda je

$$\mathcal{H}(q, \tilde{p}) = 0, \tag{21}$$

$$\tilde{H}(q, \tilde{p}, g) = 0 \tag{22}$$

- U baždarenju $g = 1$ je očito da se (20), (21) i (22) reduciraju na ograničenje (10)

Problem vremena

- Ovdje ću pokušati kvantizirati difeomorfno invarijantnu akciju
- Najprirodnije je ograničenje (21) uključiti kao ograničenje na fizikalno stanje

$$\mathcal{H}(q,\tilde{p})\,|\psi(t)\rangle = 0, \tag{23}$$

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g)\,|\psi(t)\rangle = 0 \tag{24}$$

- Ako pogledamo vremenski ovisnu Schrödingerovu jednadžbu

$$\tilde{H}(q,\tilde{p},g)\,|\psi(t)\rangle = i\hbar\partial_t\,|\psi(t)\rangle \tag{25}$$

- Jasno se vidi da je problem

$$\partial_t\,|\psi(t)\rangle = 0 \tag{26}$$

- Što je u očitoj kontradikciji sa stvarnim svijetom i sa "toy" modelom

Problem vremena

- Ovo je "toy" verzija problema vremena
- U kontekstu modela je rješenje problema donekle jasno otkud dolazi problem
- U kvantnoj mehanici fizikalno stanje sa dobro definiranom energijom trivijalno evoluira u vremenu te nema nikakve fizikalne posljedice
- Da bi imali mjerljivu ovisnost u vremenu stanje ne smije imati dobro definiranu energiju tj. biti u superpoziciji više različitih energija
- Nema ničeg pogrešnog u klasičnoj fizici gdje je energija dobro definirana, no u kvantnoj fizici to ne vrijedi u općenitom slučaju
- Nepravilno je kvantizirati akciju (14) te je jedino kvantizacija (3) validna
- Iz toga se može zaključiti da pojavna difeomorfna invarijantnost jedino vrijedi na klasičnom nivou, dok fundamentalna kvantna teorija nema tu invarijantnost

Problem kozmološke konstante

- Sada ću problemu pristupati poluklasično tako da ću podijeliti stupnjeve slobode na "teške" i "lake"
- Poanta je da kvantiziram lake, a teške tretiram klasično
- Radi jednostavnosti uzimam

$$V(q) = V_{teški}(q_{teški}) + V_{laki}(q_{laki}) \tag{27}$$

- Klasično ograničenje (12) onda postaje

$$-\sum_{b=1}^{N_{teški}} \frac{m_b \dot{q}_b^2}{2g} - V_{teški}(q_{teški}) = \sum_{a=1}^{N_{laki}} \frac{m_a \dot{q}_a^2}{2g} + V_{laki}(q_{laki}) - E \tag{28}$$

$$-\mathcal{H}_{teški} = \mathcal{H}_{laki} - E \tag{29}$$

Problem kozmološke konstante

- Jednadžbu (29) mijenjam sa semiklasičnom jednadžbom

$$-\mathcal{H}_{te\check{s}ki} = \langle\psi|\,\mathcal{H}_{laki}\,|\psi\rangle - E \tag{30}$$

- Pretpostavljam da je $V_{laki}(q_{laki})$ potencijal N_{laki} harmoničkih oscilatora

$$V_{laki}(q_{laki}) = \sum_{a=1}^{N_{laki}} \frac{k_a q_a^2}{2} \tag{31}$$

- Operator $\mathcal{H}_{laki}$ se sada može pisati kao

$$\mathcal{H}_{laki} = \sum_{a=1}^{N_{laki}} \hbar\omega_a \left(A_a^\dagger A_a + \frac{1}{2}\right) \tag{32}$$

- Ako pretpostavim da je $|\psi\rangle$ najniže stanje harmoničkog oscilatora tada (30) postaje

$$-\mathcal{H}_{te\check{s}ki} = \sum_{a=1}^{N_{laki}} \frac{\hbar\omega_a}{2} - E \tag{33}$$

Problem kozmološke konstante

- Kada bi se radilo o klasičnom harmoničkom oscilatoru (33) bi glasilo

$$-\mathcal{H}_{teški} = -E. \tag{34}$$

- Imajmo na umu da je N_{laki} dosta velik pa postoji velika razlika izmedju (33) i (34), (33) se može skraćeno pisati

$$-\mathcal{H}_{teški} = -E_{eff}, \tag{35}$$

$$-E_{eff} = -E + \sum_{a=1}^{N_{laki}} \frac{\hbar\omega_a}{2} \tag{36}$$

- Pretpostavimo da stanovnici "toy" svemira mjere

$$-E_{eff} \ll \sum_{a=1}^{N_{laki}} \frac{\hbar\omega_a}{2}. \tag{37}$$

- Problem je objasniti zašto je E_{eff} tako mali broj te imamo "toy" verziju problema kozmološke konstante

Problem kozmološke konstante

- Ako jdn. (29) pomnožim s g dobivam jednadžbu analognu (2)

$$-\mathcal{H}_{teški} g = \mathcal{H}_{laki} g - Eg \tag{38}$$

$$G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \tag{39}$$

ali s metrikom drukčije signature

- Isto tako u semiklasičnom pristupu se dobije analogon (30) pomnožen s g

$$G_{\mu\nu} = \langle\Psi| \, T_{\mu\nu} \, |\Psi\rangle + \Lambda g_{\mu\nu} \tag{40}$$

$$-\mathcal{H}_{teški} g = \langle\psi| \, \mathcal{H}_{laki} \, |\psi\rangle \, g - Eg \tag{41}$$

Problem kozmološke konstante

- U kontekstu modela nije teško vidjeti otkud dolazi do problema
- U akciji (11) -E ima fizikalne posljedice jer je sparen s g u članu $\sqrt{g}E$ koji je analogan $\sqrt{|detg_{\mu\nu}|}\Lambda$
- Ako dodamo E u početnu akciju (3) to nemanikakve fizikalne posljedice, jer u korespondirajućoj kvantnoj teoriji to daje samo fazu koja nema fizikalne posljedice
- Isto tako ako dodamo E_{eff} nema fizikalne posljedice
- Zaključak je sličan kao i za problem vremena tj. da fundamentalna kvantna teorija nije difeomorfno invarijantna već se ta invarijantnost pojavljuje samo na klasičnom nivou

Crna rupa i "firewall"

- Sada promatramo sustav s dva stupnja slobode $q(t) = \{x(t), y(t)\}$ koji je invarijantan na rotacije i $E = 0$

$$\tilde{A} = \int dt\sqrt{g}\left[\frac{m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{2g} - V(x, y)\right] \tag{42}$$

- Radi polarne simetrije prelazim u polarne koordinate

$$\tilde{A} = \int dt\sqrt{g}\left[\frac{m(\dot{z}^2 + z^2\dot{\phi}^2)}{2g} - V(z^2)\right] \tag{43}$$

- ograničenje (12) postaje

$$\frac{m(\dot{z}^2 + z^2\dot{\phi}^2)}{2g} + V(z^2) = 0. \tag{44}$$

- Da bi imao zanimljivo ograničenje pretpostavljam da je

$$V(z^2) = -\frac{kz^2}{2} \tag{45}$$

Crna rupa i "firewall"

- Uzimam baždarenje $g = 1$ i pretpostavljam da je $\phi = 0$ iz ograničenja (44) imamo diferencijalnu jdn.

$$\left(\frac{dz(t)}{dt}\right)^2 = \gamma^2 z^2(t), \tag{46}$$

- Čija rješenja glase

$$z(t) = z(0)e^{\pm\gamma t}. \tag{47}$$

- $z(t) = z(0)e^{-\gamma t}$ se interpretira kao padanje u crnu rupu. dok je $z(t) = z(0)e^{\gamma t}$ vremenska inverzija padanja tj. bijeg od crne rupe
- Točka $z = 0$ odgovara horizontu crne rupe
- Pošto je teorija difeomorfno invarijantna mogu uvesti novu varijablu vremena t'

$$e^{-\gamma t} = 1 - \gamma t' \tag{48}$$

Crna rupa i "firewall"

- Pa rješenje pada postane

$$z(t') = z(0)[1 - \gamma t']. \tag{49}$$

- Očito je da je novo rješenje prošireno na regiju $z < 0$ koja je analogno unutrašnjosti crne rupe
- Ovo je analogno Kruskal ekstenziji rješenja u općoj relativnosti
- Ovo je dosta problematično u kontekstu ovog modela jer u prelasku na polarne koordinate u (43) pretpostavljamo da je $z > 0$
- Ovaj problem se opet lako riješi ako se prihvati da na kvantnom nivou difeomorfna invarijantnost ne vrijedi, stoga uvoenje nove varijable vremena u (48) nije dozvoljena
- Na taj način nije moguće proširiti rješenje (47) na unutrašnjost crne rupe te unutrašnjost nije fizikalna

"Firewall"

- No kako to rješava informacijski paradoks?
- Kako bi se riješio paradoks crne rupe izmišljen je koncept "firewalla"
- Horizont postaje fizikalna granica te sve ispod postaje nefizikalno
- Jedan od problema "firewalla" je da se kosi s općom relativnošću u kojoj se rješenje može proširiti na unutrašnjost crne rupe pomoću 4-D difeomorfne invarijantnosti
- No ako je Difeomorfna invarijantnost pojavna na klasičnom nivou kao i u "toy" modelu
- Nije očito može li se rješenje eksteriora crne rupe proširiti na interior
- "Firewall" kao koncept je onda puno prihvatljiviji

Zaključak

- U ovom radu proučavanjem 1-D difeomorfno invarijantnog sustava naišli smo na analogne probleme u kvantizaciji kao i kod 4-D difeomorfnog sustava
- U kontekstu modela se lako vidjelo otkud dolazi problem jer se u modelu difeomorfna invarijantnost pojavila kao posljedica dobro definirane energije sustava
- Ako je ta pojavnost difeomorfne invarijantnosti slučaj i za realne sustave onda smo jako blizu formuliranju teorije kvantne gravitacije
- Unatoč tome nije nimalo očito kako bi se 1-D pojavna difeomorfna invarijantnost mogla generalizirati na 4-D pojavnu difeomorfnu invarijantnost
- Je li to pravi pristup u objašnjavanju nekompatibilnosti današnje kvantne teorije i opće relativnosti te formuliranju fundamentalnije teorije ovog vrijeme-prostora

Reference

[1] C.W. Misner, K.S. Thorne and J.A. Wheeler, Gravitation (W.H. Freeman and Company, San Francisco, 1973).
[2] R.M. Wald, General Relativity (The University of Chicago Press, Chicago, 1984).
[3] S.M. Carroll, Spacetime and Geometry (Addison Wesley, San Francisco, 2004).
[4] C. Kiefer, Quantum Gravity (Oxford University Press, 2012).
[5] C. Rovelli, Quantum Gravity (Cambridge University Press, 2004).
[6] K. Becker, M. Becker and J.H. Schwarz, String Theory and M-Theory (Cambridge University Press, 2007).
[7] N.D. Birrell and P.C.W. Davies, Quantum Fields in Curved Space (Cambridge University Press, 1982).

Reference

[8] V. Mukhanov and S. Winitzki, Introduction to Quantum Effects in Gravity (Cambridge University Press, 2007).
[9] K.V. Kuchar, Proceedings of the 4th Canadian Conference on General Relativity and Relativistic Astrophysics (World Scientific, Singapore, 1992); reprinted in Int. J. Mod. Phys. D 20 (Suppl. 1), 3 (2011).
[10] C.J. Isham, gr-qc/9210011.
[11] T. Padmanabhan, Int. J. Mod. Phys. A 4, 4735 (1989).
[12] E. Anderson, The Problem of Time: Quantum Mechanics Versus General Relativity (Springer International Publishing AG, 2017).
[13] S. Weinberg, Rev. Mod. Phys. 61, 1 (1989).
[14] S. Nobbenhuis, Found. Phys. 36, 613 (2006); gr-qc/0411093.
19
[15] V. Sahni and A. Starobinsky, Int. J. Mod. Phys. D 9, 373 (2000); astro-ph/9904398.

Reference

[16] S.M. Carroll, Living Rev. Rel. 4, 1 (2001); astro-ph/0004075.
[17] T. Padmanabhan, Phys. Rep. 380, 235 (2003); hep-th/0212290.
[18] S.B. Giddings, Phys. Rev. D 46, 1347 (1992); hep-th/9203059.
[19] J.A. Harvey and A. Strominger, hep-th/9209055.
[20] J. Preskill, hep-th/9209058.
[21] D.N. Page, hep-th/9305040.
[22] S.B. Giddings, hep-th/9412138.
[23] A. Strominger, hep-th/9501071.

Reference

[24] S.D. Mathur, Lect. Notes Phys. 769, 3 (2009); arXiv:0803.2030.
[25] S.D. Mathur, Class. Quant. Grav. 26, 224001 (2009); arXiv:0909.1038.
[26] S. Hossenfelder, L. Smolin, Phys. Rev. D 81, 064009 (2010); arXiv:0901.3156.
[27] F.S. D¨undar, arXiv:1409.0474.
[28] D. Harlow, Rev. Mod. Phys. 88, 15002 (2016); arXiv:1409.1231.
[29] J. Polchinski, arXiv:1609.04036.
[30] S. Chakraborty and K. Lochan, Universe 3, 55 (2017); arXiv:1702.07487.

Reference

[31] D. Marolf, Rept. Prog. Phys. 80, 092001 (2017); arXiv:1703.02143.
[32] A. Fabbri and J. Navarro-Salas, Modeling Black Hole Evaporation (Imperial College Press, London, 2005).
[33] A.D. Sakharov, Dokl. Akad. Nauk SSSR 177, 70 (1967).
[34] H. Nikoli ´c, Eur. Phys. J. C 42, 365 (2005); hep-th/0407228.
[35] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, J. Sully, JHEP 1302, 062 (2013); arXiv:1207.3123.
[36] A. Almheiri, D. Marolf, J. Polchinski, D. Stanford, J. Sully, JHEP 1309, 018 (2013); arXiv:1304.6483.
[37] W. Rindler, Am. J. Phys. 34, 1174 (1966).
[38] R.P. Feynman, Feynman Lectures on Gravitation (Addison-Wesley Pub. Company, Massachusetts, 1995). 20

Reference

[39] S. Weinberg, Phys. Lett. 9, 357 (1964); S. Weinberg, Phys. Rev. 135, 1049 (1964).
[40] W.E. Thirring, Ann. Phys. 16, 96 (1961).
[41] H. Nikoli´c, Gen. Rel. Grav. 31, 1211 (1999); gr-qc/9901057.
[42] S. Deser, Gen. Rel. Grav. 42, 641 (2010); arXiv:0910.2975.
[43] J. Maldacena, L. Susskind, Fortsch. Phys. 61, 781 (2013); arXiv:1306.0533.
[44] A. Almheiri, T. Hartman, J. Maldacena, E. Shaghoulian, A. Tajdini, Rev. Mod. Phys. 93, 35002 (2021); arXiv:2006.06872.
[45] M. Schlosshauer, Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition (Springer, Berlin, 2007).

Reference

[46] H. Nikoli´c, Int. J. Quantum Inf. 15, 1740001 (2017); arXiv:1703.08341.

[47] D.N. Page, W.K. Wootters, Phys. Rev. D 27, 2885 (1983).

[48] V. Giovannetti, S. Lloyd, L. Maccone, Phys. Rev. D 92 045033 (2015); arXiv:1504.04215.

[49] H. Nikoli´c, Int. J. Quantum Inf. 12, 1560001 (2014); arXiv:1407.8058.

[50] R.L. Jaffe, Phys. Rev. D 72, 021301 (2005); hep-th/0503158.

[51] H. Nikoli´c, Phys. Lett. B 761, 197 (2016); arXiv:1605.04143.

[52] H. Nikoli´c, Ann. Phys. 383, 181 (2017); arXiv:1702.03291.