Geometrija baždarnih teorija

Filip Požar*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
Mentor : dr.sc. Tajron Jurić, Institut za Teorijsku fiziku Ruđer Bošković, Bijenička 54, Zagreb. email: tjuric@irb.hr
(Dated: 24. siječnja 2022.)

U ovome seminaru ćemo proučiti geometriju baždarnih teorija pomoću formalizma svežnjeva. Definirati ćemo i proučiti glavni i pridruženi svežanj i pomoću njih doći do primjera u fizici. Opću teoriju relativnosti (*OTR*) kao baždarnu teoriju ćemo usput razvijati kroz seminar, a onda ćemo na kraju još prikazati klasičnu elektrodinamiku kao baždarnu teoriju koristeći objekte definirane u seminaru. Iskazati ćemo i neke važne rezultate iz diferencijalne geometrije i topologije koji su usko povezani s našim zadatkom, a započeti ćemo uvodnim primjerima baždarnih teorija u fizici.

I. UVOD

Cilj ovog seminara je rigorozno opisati baždarne teorije na mnogostrukosti (definicija u Dodatku VIII) pomoću formalizma glavnih i pridruženih svežnjeva. Započeti ćemo primjerima klasične i kvantne baždarne teorije, a kasnije ćemo izgraditi teoriju svežnjeva koja je prirodni način za opis baždarnih teorija.

I.1. Klasična elektrodinamika

Klasična elektrodinamika je prva baždarna teorija koju fizičari uče, specifično, klasična elektrodinamika je $U(1)$ baždarna teorija. Naime, Maxwellove jednadžbe

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\\
&\nabla\times\vec{E}=\frac{-1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\\
&\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\\
&\vec{\nabla}\times\vec{B}=\mu_0\vec{J}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}
\end{aligned}\tag{0}$$

se daju uvođenjem četverovektorskog elektromagnetskog potencijala $A^\mu=\left(\frac{\phi}{c},\vec{A}\right)$ i četverovektorske struje $J^\mu=(\rho,\vec{J})$ pojednostaviti u jednu jednadžbu

$$\Box A^\mu-\partial^\mu(\partial_\alpha A^\alpha)=J^\mu\ , \tag{1}$$

pri čemu je A^μ definiran da vrijedi

$$\vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \tag{2}$$

i

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}\ . \tag{3}$$

Iz definicijskih svojstava potencijala A^μ se vidi da je teorija invarijantna na transformacije

$$A^\mu\rightarrow A^\mu+\frac{1}{q}\partial^\mu\chi \tag{4}$$

i tu se zapravo "krije" reduciranje s 4 jednadžbe na svega jednu. Naime, Maxwellove jednadžbe imaju jedinstveno rješenje, a 4-vektorski potencijal određen jednadžbom (1) i nekim rubnim uvjetima nije jedino moguće polje koje daje iste fizikalno mjerljive veličine $\vec{E}$ i $\vec{B}$. Izbor potencijala A^μ kojim ćemo raditi fiziku se zove *baždarenje*. Prethodna relacija (4) se može zapisati na drugačiji način :

$$A^\mu\rightarrow e^{-i\chi}A^\mu e^{i\chi}-\frac{i}{q}e^{-i\chi}\partial^\mu e^{i\chi}\ , \tag{5}$$

a ovo je poznavateljima baždarnih teorija poznati izraz iz kojega se vidi da je klasična elektrodinamika $U(1)$ baždarna teorija, što drugim riječima znači da je elektrodinamika invarijantna na lokalne (one koje ovise od točke do točke!) $U(1)$ transformacije! U početnim kursevima se možda ne spomene izraz (5) i da je teorija baš $U(1)$ baždarna već samo da je baždarna, ali svakako stoji da je klasična elektrodinamika primjer baždarne teorije. Nadalje, cijela ova priča se može objasniti pomoću lagranžijana klasične elektrodinamike

$$\mathcal{L}_{KED}=-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}+J^\mu A_\mu \tag{6}$$

gdje je $F^{\mu\nu}=\partial^\mu A^\nu-\partial^\nu A^\mu$ Faradayev tenzor. Direktno se računom pokaže da su Euler-Lagrange jednadžbe ove teorije upravo Maxwellove i također se može direktnim računom pokazati da ovaj lagranžijan opisuje teoriju invarijantnu na transformacije tipa (5) ukoliko vrijedi jednadžba kontinuiteta ($\partial_\mu J^\mu=0$). Kasnije u seminaru ćemo vidjeti da transformacijska svojstva (5) nisu jedinstvena za elektrodinamiku, već da je to način na koji se transformira povlak koneksije na baznu mnogostrukost pri promjeni baždarenja.

* fpozar.phy@pmf.hr

I.2. Lokalna fazna invarijantnost kvantne fizike i kvantna elektrodinamika

Sljedeći primjer koji ćemo proučiti je primjer kako se relativistička kvantna fizika može prirodno obogatiti elektromagnetskom interakcijom ako zahtjevamo da je teorija invarijantna na lokalne fazne transformacije, tj., u ovom slučaju $U(1)$ baždarne transformacije. Promotrimo za početak Diracov lagranžijan

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi \tag{7}$$

i primijenimo lokalnu faznu transformaciju

$$\psi \to e^{-i\chi(x)}\psi\,. \tag{8}$$

Transformirani lagranžijan glasi :

$$\mathcal{L}' = \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - m)\,\psi + \bar{\psi}\chi\!\!\!/\psi \tag{9}$$

i vidimo da se dobiveni lagranžijan od početnog ne razlikuje samo za površinski član pa zaključujemo da bismo Euler-Lagrange jednadžbama dobili drukčije jednadžbe gibanja od polaznih što znači da relativistička kvantna mehanika nije baždarno invarijantna! Činjenicu da kvantna fizika sama po sebi nije lokalno fazno invarijantna je jako važno primijetiti, jer znamo da su sve mjerljive vjerojatnosti neovisne o globalnoj fazi valne funkcije (i Diracovog spinora) pa je prirodno htjeti to svojstvo pojačati tako da faza postane lokalna, tj., da ovisi od točke do točke, jer ipak fizikalna gustoća vjerojatnosti $|\psi|^2$ ne ovisi niti o lokalnoj fazi. Diracov lagranžijan, koji opisuje kvantu teoriju fermiona, na najjednostavniji način postaje baždarno invarijantan ako modificiramo lagranžijan funkcijom A^μ koja se baždarno transformira kao (5)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - qA\!\!\!/ - m)\,\psi \tag{10}$$

Ovime smo dobili fermionski sektor lagranžijana kvantne elektrodinamike čiji je ukupni lagranžijan jednak

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{QED} &= \bar{\psi}\,(i\partial\!\!\!/ - qA\!\!\!/ - m)\,\psi + \mathcal{L}_{KED}\\ &= \bar{\psi}\,(iD\!\!\!\!/ - m)\,\psi + \mathcal{L}_{KED}\end{aligned} \tag{11}$$

gdje smo usput definirali operator $D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu$ koji se u literaturi zove *kovarijantna derivacija*. Kovarijantne derivacije i objekti poput elektromagnetskog potencijala se prirodno opisuju pomoću matematike svežnjeva i nju ćemo razvijati u ostatku ovog seminara. Također, više o ovom uvodu (ali i skoro sve definicije koje ćemo koristiti u seminaru) može se pronaći npr. u knjizi[1].

II. UVOD U DIFERENCIJALNU GEOMETRIJU

Jedan od fizičarima najvažnijih koncepata iz diferencijalne geometrije su *tenzori na mnogostrukosti* jer nam omogućuju da na prostorvemenu definiramo tenzorske veličine (npr. Faradayev tenzor, tenzor energije i impulsa itd.). Tenzore ćemo "izgraditi" tenzorskim produktima tangentnih vektora i 1-formi.

Definicija 1. Tangentni vektor[3] u točki p na mnogostrukosti M, $X|_p$ (ponekada se označava X_p ili, ako je potpuno jasno, samo skraćeno X), je funkcija $X|_p : C^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$ koja za sve $f, g \in C^\infty_p$ i $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ zadovoljava :

1. Linearnost

$$X|_p(\lambda f + \mu g) = \lambda X|_p(f) + \mu X|_p(g)$$

2. Leibnizovo pravilo

$$X|_p(fg) = f(p)X|_p(g) + g(p)X|_p(f)$$

Skup svih tangentnih vektora u točki p označavamo T_pM i nazivamo ga *tangentni prostor u točki* p.

Teorem 1. *Može se pokazati da je dimenzija prostora T_pM jednaka dimenziji mnogostrukosti M. Također, pokazuje se da je za svaku kartu $(O,\psi) = \left(O,(x^1,...,x^{dimM})\right)$ oko točke p, baza prostora T_pM upravo skup $\left\{\frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}|_p\right) = \partial_\mu\right\}$. Na kraju, ako su $(O,\{x^\mu\})$ i $(V,\{y^{\mu'}\})$ dvije karte oko točke p i ako su komponente vektora $X|_p$ u bazama definiranim koordinatnim sustavima $\{x^\mu\}$ i $\{y^{\mu'}\}$:*

$$\begin{aligned}X|_p &= X|_p^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}\\ X|_p &= X|_p^{\mu'} \frac{\partial}{\partial y^{\mu'}}\end{aligned} \tag{12}$$

onda je veza između komponenti $X|_p^\mu$ i $X|_p^{\mu'}$ dana kao

$$X|_p^{\mu'} = \frac{\partial y^{\mu'}}{\partial x^\alpha} X|_p^\alpha\,. \tag{13}$$

Definicija 2. 1-forma u točki $p \in M$, $\omega|_p$ (ili skraćeno, ω_p) je element vektorskog prostora dualnog tangentnom prostoru. Duale vektora ∂_μ (koji potječu od karte $(O,\{x^\mu\})$) označavamo dx^μ. Skup svih 1-formi u točki p označavamo T^*_pM.

Teorem 2. *Ako su $(O,\{x^\mu\})$ i $(V,\{y^{\mu'}\})$ dvije karte oko točke p i ako su komponente 1-forme $\omega|_p$ u bazama definiranim koordinatnim sustavima $\{x^\mu\}$ i $\{y^{\mu'}\}$:*

$$\begin{aligned}\omega|_p &= \omega|_{p_\mu}\, dx^\mu\\ \omega|_p &= \omega|_{p_{\mu'}}\, dy^{\mu'}\end{aligned} \tag{14}$$

Onda je veza između komponenti $\omega|_{p_\mu}$ i $\omega|_{p_{\mu'}}$

$$\omega|_{p_{\mu'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^{\mu'}}\omega|_{p_\alpha} \tag{15}$$

Sada možemo definirati tenzor u točki proizvoljnog tipa pomoću linearnih kombinacija odgovarajućeg tenzorskog produkta baznih vektora ∂_μ i dx^μ. Nadalje, *vektorsko polje* (ili općenitije, *tenzorsko polje*) je funkcija koja svakoj točki $p \in M$ pridruži vektor $X|_p \in T_pM$ (analogno za tenzore). Problem se javlja s glatkim tenzorskim poljima. Naime, nama prijašnje definicije nikako ne omogućuju da preslikavanje $p \to X|_p$ klasificiramo kao glatko. Za rad s glatkim vektorskim poljima i njihovim generalizacijama koristimo svežnjeve. Također, vrijedi spomenuti da su *diferencijalne 1-forme* glatke (gdje je glatkoća definirana s obzirom na spomenutu prirodnu topologiju) funkcije koje svakoj točki p pridružuju 1-formu ω_p.

III. UVOD U FORMALIZAM SVEŽNJEVA

U ovom poglavlju ćemo definirati topološke objekte svežnjeve.

III.1. Vlaknasti svežanj

Definicija 3. Svežanj je uređena trojka (E,π,M) glatkih topoloških mnogostrukosti (vidi Dodatak) E i M te neprekidne surjekcije $\pi : E \to M$. Mnogostrukost E nazivamo *totalni prostor*, a mnogostrukost M nazivamo *bazni prostor*. Surjekciju π često nazivamo *projekcijom*. Također, ponekada se svežanj (E,π,M) označava $E \xrightarrow{\pi} M$. Za svaki $p \in M$, skup $E_p := \pi^{-1}(p)$ **zovemo** *vlakno u točki p*.

Prva dodatna struktura koju definiramo nad svežnjevima je *standardno vlakno*.

Definicija 4. Vlaknasti svežanj sa standardnim vlaknom F je uređena četvorka (E,π,M,F) takva da je $E \xrightarrow{\pi} M$ svežanj s lokalnom trivijalicavijom, tj., za svaku točku $p \in M$ postoji okolina O_p i homeomorfizam (lokalna trivijalizacija) $\psi_p : \pi^{-1}(O_p) \to O_p \times F$ takav da sljedeći dijagram komutira :

$$\begin{tikzcd} \pi^{-1}(O_p) \arrow[r, "\psi_p"] \arrow[d, "\pi"'] & O_p \times F \arrow[dl, "\pi_1"] \\ O_p & \end{tikzcd}$$

pri čemu je π_1 kanonska projekcija na prvi faktor, $\pi_1(p,f) = p \ \forall p \in M, f \in F$. Kada je π glatka projekcija, (E,π,M,F) sa spomenutim svojstvima nazivamo *glatkim vlaknastim svežnjem (s vlaknom F)*. Ako se nad F može definirati struktura vektorskog prostora, onda (E,π,M,F) zovemo *vektorski svežnj*.

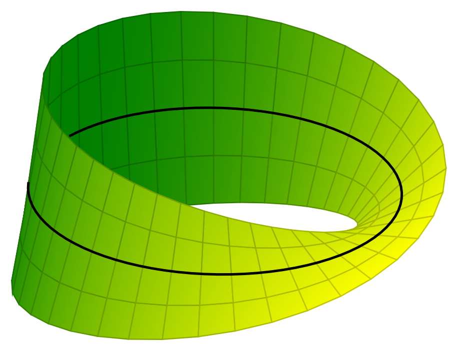
Sad ćemo još definirati *prerez* svežnja, funkciju koja će u posebnom slučaju totalnog prostora odgovarati tenzorskim poljima.

Definicija 5. Prerez svežnja je funkcija $\sigma : M \to E$ koja zadovoljava $\sigma \circ \pi = id_M$. Skup svih prereza (istog) svežnja označavamo $\Gamma(E)$.

Primijetimo da uvjet $\sigma \circ \pi = id_M$ zapravo čini da se svakoj točki p pridijeljuje element iz njenog vlakna F_p.

III.1.1. *Primjeri vlaknastog svežnja*

Vrijedi prokomentirati iskazane definicije. Vlaknasti svežnjevi su zapravo oni čiji totalni prostor lokalno "sliči" na produktni prostor $M \times F$. Česti primjer vlaknastog svežnja je Mobiusova vrpca prikazana na Slici 1.. Kao što se vidi, standardno vlakno Mobiusove trake s



Slika 1. Mobiusova traka kao totalni prostor baznom prostoru kružnice - sive linije se okomito projiciraju na debelu crnu kružnicu

obzirom na projekciju kao na slici je dužina. Svežnjevi su korisni za opisivanje geometrijskih objekata koje je teško definirati jednostavnim metodama poput nivo plohi, a i izrazito su korisni za fizičare npr. u općoj teoriji relativnosti gdje je bazna mnogostrukost prostorvrijeme, a totalna mnogostrukost *tangentni svežanj* sa standardnim vlaknom koje je izomorfno tangentnim vektorskim prostorima T_pM.

III.2. Tangentni svežanj

Kao što smo ranije rekli, nije na prvu jasno kako definirati neprekidna ili glatka vektorska polja na mnogostrukosti. Problem se javlja u tome što iako su svi prostori T_pM izomorfni kao vektorski prostori, ipak za različite $p \neq q$ su T_pM i T_qM različiti vektorski prostori pa su $X|_p$ i $X|_q$ dva vektora iz različitih vektorskih prostora. U specijalnoj teoriji relativnosti smo se uspjeli "izvući" jer smo radili na ravnom prostoru koji ima strukuturu vektorskog prostora, ali u općoj relativnosti ista ideja neće raditi budući da općenite glatke mnogostrukosti nisu vektorski prostori. Rješenje je promatrati (naravno, disjunktnu) uniju tangentnih prostora.

Teorem 3. *Skup*

$$TM := \bigsqcup_{p\in M} T_pM \tag{16}$$

Uz prirodnu topologiju (detalji o toj topologiju su u referancama[2,3]*) čini glatku mnogostrukost i zovemo ju* ***tangentni svežanj****. Vrijedi da ako su M i N dvije difeomorfne (definicija u Dodatku VIII) glatke mnogostrukosti, onda su i TM i TN difeomorfni.*

Uz topologiju[2,3] imamo glatki vektorski svežanj $M \xrightarrow{\pi} TM$ sa standardnim vlaknom $\mathbb{R}^{\dim M}$ i sada imamo sve potrebno da definiramo glatka vektorska polja kao prereze tangentnog svežnja (jer imamo pojam otvorenih skupova na uniji tangentnih prostora). Naravno, za općenita tenzorska polja tipa (l,k) je postupak analogan, osim što u uniji (16) ne uzimamo tangentne prostore, nego tangentne prostore tenzora tipa (l,k). Također, na svim tenzorskim svežnjevima $T^l{}_kM$ vrijede generalizacije pravila (13) i (15), to se može zaključiti primjenom linearne algebre na svaki pojedini tangentni prostor.

III.3. Morfizmi svežnjeva i restrikcija svežnja

Započnimo definicijama podsvežnja i restrikcije svežnja

Definicija 6. Podsvežanj svežnja $E \xrightarrow{\pi} M$ je svežanj $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ takav da $E' \subseteq E$, $M' \subseteq M$ i $\pi' = \pi|_{E'}$.

Definicija 7. Restrikcija svežnja $E \xrightarrow{\pi} M$ na podmnogostrukost $N \subseteq M$ je svežanj $E \xrightarrow{\pi'} N$ s projekcijom

$$\pi' = \pi|_{\pi^{-1}(N)}\,.$$

Definirajmo morfizme dosadašnjih definiranih vrsta svežnjeva.

Definicija 8. Morfizam svežnjeva $E \xrightarrow{\pi} M$ i $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ su funkcije $u : E \to E'$ i $v : M \to M'$ za koje sljedeći dijagram komutira :

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "v"] & M' \end{tikzcd}$$

Ako su u i v difeomorfizmi, onda kažemo da se radi o **izomorfizmu** svežnjeva. Dijagram izomorfizma svežnjeva u teoriji kategorija je jako sličan dijagramu morfizma i prikazan je odmah ispod.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[d, "\pi"] & E' \arrow[l, shift left, "u^{-1}"] \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, shift left, "v"] & M' \arrow[l, shift left, "v^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Na kraju, ako je svežanj izomorfan *produktnom svežnju* $(M\times F, \pi_1, M)$, kažemo da je **trivijalan**.

Definicija 9. Kažemo da je svežanj $E \xrightarrow{\pi} M$ **lokalno izomorfan** svežnju $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ ako za svaku točku $p \in M$ postoji okolina U_p takva da je restrikcija svežnja $E \xrightarrow{\pi} M$ na U_p izomorfna svežnju $E' \xrightarrow{\pi'} M'$. Ako je svežanj lokalno izomorfan produktnom svežnju, kažemo da je *lokalno trivijalan*.

Posljednja definicija u ovom poglavlju je *povlak svežnja*.

Definicija 10. Povlak svežnja (engl. *bundle pullback*) $E \xrightarrow{\pi} M$ induciran funkcijom $f : M' \to M$ je svežanj $E' \xrightarrow{\pi'} M'$ gdje

$$E' = \{(m', e) \in M' \times E : f(m') = \pi(e)\}$$

i $\pi' = \pi_1$, tj., $\pi'(m', e) = m'$.

IV. GLAVNI I PRIDRUŽENI SVEŽANJ

Kako bismo proučavali baždarne teorije, potrebno je da imamo djelovanje Liejeve grupe na mnogostrukosti. U grubo govoreći, glavni svežanj je vlaknasti svežanj s Liejevom grupom G za standardno vlakno, a pridruženi svežanj je onaj na čije vlakno djeluje Liejeva grupa G. U ovom poglavlju ćemo proučiti kategorije glavnih i pridruženih svežnjeva i dati po jedan primjer za oboje.

IV.1. Djelovanje Liejeve grupe na mnogostrukosti

Definicija 11. Neka je $(G, \cdot)$ Liejeva grupa i neka je M glatka mnogostrukost. Glatku funkciju

$$\begin{aligned} \rhd : G\times M &\to M \\ (g,p) &\mapsto g \rhd p \end{aligned} \tag{17}$$

koja zadovoljava

1. $\forall p \in M : e \rhd p = p$
2. $\forall g_1, g_2 \in G : \forall p \in M : (g_1 \cdot g_2) \rhd p = g_1 \rhd (g_2 \rhd p)$

zovemo **lijevo (Liejevo) grupno djelovanje** ili *lijevo G-djelovanje* na M. Mnogostrukost M nad kojom smo definirali $\triangleright$ zovemo *lijevom G-mnogostrukosti*.

Slično se definira i desno djelovanje.

Definicija 12. **Desno (Liejevo) grupno djelovanje** ili *desno G-djelovanje* grupe $(G,\cdot)$ na mnogostrukosti M je glatka funkcija

$$\begin{aligned} \triangleleft \colon M \times G &\to M \\ (p,g) &\mapsto p \triangleleft g \end{aligned} \tag{18}$$

koja zadovoljava

1. $\forall p \in M : p \triangleleft e = p$
2. $\forall g_1, g_2 \in G : \forall p \in M : p \triangleleft (g_1 \cdot g_2) = (p \triangleleft g_1) \triangleleft g_2$

Definicija 13. Neka je $\triangleright\colon G{\times}M \to M$ lijevo G-djelovanje i M glatka mnogostrukost. Za svaku točku $p \in M$ definiramo **orbitu** točke p kao skup

$$G_p := \{q \in M : \exists g \in G \text{ takav da } q = g \triangleright p\}\ . \tag{19}$$

Definicija 14. Neka je $\triangleright\colon G{\times}M \to M$ lijevo G-djelovanje na mnogostrukosti M. **Stabilizator** točke p, S_p, je skup

$$S_p = \{g \in G : g \triangleright p = p\}\ . \tag{20}$$

Uvijek vrijedi da je S_p podgrupa od G.

Definicija 15. Definirajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ na mnogostrukosti M

$$p \sim q :\Leftrightarrow \exists g \in G \text{ takav da } q = g \triangleright p\ . \tag{21}$$

Orbitni prostor M/G definiramo kao kvocijentni prostor relacije $\sim$

$$M/G := G/_{\sim} = \left\{G_p : p \in M\right\}\ . \tag{22}$$

Definicija 16. Lijevo (analogno i desno) G-djelovanje $\triangleright$ na mnogostrukosti M se definira kao

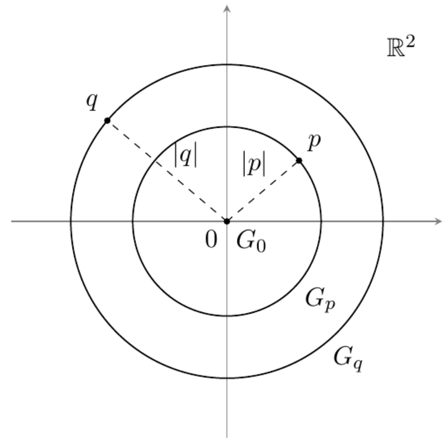
1. **slobodno** ako vrijedi $\forall p \in M : S_p = \{e\}$
2. **tranzitivno** ako vrijedi $\forall p, q \in M : \exists g \in G$ takav da $p = g \triangleright q$.

Korisno svojstvo slobodnih lijevih (analogno i desnih) G-djelovanja je

$$g_1 \triangleright p = g_2 \triangleright p \iff g_1 = g_2\ . \tag{23}$$

IV.1.1. Primjer slobodnog djelovanja

Primjer lijevog djelovanja koja nije slobodno bi bilo djelovanje rotacija $SO(2)$ na ravninu $\mathbb{R}^2$. Za svaki nenula element $p \in \mathbb{R}^2$ vrijedi $S_p = \{e\}$, ali, budući da je stabilizator $S_{(0,0)} = SO(2)$, djelovanje grupe $SO(2)$ ne može biti slobodno. S druge strane, $SO(2)$ djeluje slobodno na $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$. Na Slici 2. je ova tvrdnja ilustrirana, zajedno sa skicama orbita različitih točki.



Slika 2. Orbite dviju točki ravnine $\mathbb{R}^2$ pod djelovanjem grupe $SO(2)$.

IV.2. Glavni svežanj

Definicija 17. Neka je G Liejeva grupa. Glatki svežanj $E \xrightarrow{\pi} M$ zovemo **glavni G-svežanj** ako je nad E definirano slobodno desno G-djelovanje i ako je izomorfan svežnju $E \xrightarrow{\rho} E/G$, gdje je ρ projekcija koja svakom elementu pridružuje njegovu klasu ekvivalencije, tj.

$$p \overset{\rho}{\mapsto} [p] = G_p\ . \tag{24}$$

Primijetimo da što je djelovanje slobodno (pa vrijedi korisno svojstvo (23)), imamo da je vlakno proizvoljne točke G_p iz E/G

$$\rho^{-1}(G_p \in E/G) = G_p \in E$$

upravo ista ta orbita (ali sada gledana kao skup točki iz E, a ne kao klasa ekvivalencije), a ona je difeomorfna (dakle, topološki izomorfna) po (23) grupi G. Glavni G-svežanj (P, π, M) se često dijagramatski prikazuje kao

$$P \xleftarrow{\triangleleft G} P \xrightarrow{\pi} M$$

IV.2.1. Geometrija OTR-a - svežanj tetrada

U fizici (pogotovo u OTR-u) je od velike važnosti takozvani *svežanj tetrada* (engl. *frame bundle*). On se definira pomoću glatke mnogostrukosti M dimenzije d i uz posebno desno djelovanje postaje glavni $GL(d,\mathbb{R})$-svežanj (za definiciju $GL(d,\mathbb{R})$ vidi Dodatak VIII). Definirajmo prostor

$$L_pM := \left\{(e_1, \ldots, e_d) : \{e_1, \ldots, e_d\} \text{ baza za } T_pM\right\}\ . \tag{25}$$

Dakle, L_pM je skup svih uređenih baza tangentnog prostora točke p. Jasno je iz definicije (smatrajući d-torku vektora kao $d \times d$ matricu) da $L_pM \cong M_d(\mathbb{R})$ (izomorfni su kao vektorski prostori).

Definicija 18. **Svežanj tetrada** definiramo kao disjunktnu uniju

$$LM := \bigsqcup_{p \in M} L_p M \tag{26}$$

i, sličnom idejom[4] kao kod tangentnog svežnja, ga obogatimo diferencijabilnom strukutorm. Projekciju definiramo na prilično očit način, naprosto bazu $(e_1, ..., e_d) \in L_p M$ pošaljemo u p, onu točku čijeg su tangentnog prostora vektori $(e_1, ..., e_d)$ baza.

Da bismo postigli strukturu glavnog $GL(d, \mathbb{R})$ svežnja, treba nam i desno djelovanje linearne grupe. Njega definiramo na sljedeći način :

$$(e_1, ..., e_d) \triangleleft g := (g^a_1 e_a, ..., g^a_d e_a) \tag{27}$$

gdje su $g^i{}_j$ komponente grupnog elementa g s obzirom na standardnu bazu od $\mathbb{R}^d$. Lako se provjeri da je ovako definirano lijevo djelovanje dobro definirano. Također, lako se vidi i da je ovo slobodno djelovanje jer jedino $GL(d, \mathbb{R})$ preslikavanje koje ne mijenja niti jedan element baze je jedinično.

Još preostaje pokazati da je svežanj $LM \xrightarrow{\pi} M$ izomorfan svežnju $LM \xrightarrow{\rho} LM/GL(d, \mathbb{R})$. Drugim riječima, tražimo difeomorfizme $u : LM \to LM$ i $v : M \to LM/GL(d, \mathbb{R})$ za koje sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
LM \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & LM \arrow[l, shift left, "u^{-1}"] \arrow[d, "\rho"] \\
M \arrow[r, shift left, "f"] & LM/GL(d, \mathbb{R}) \arrow[l, shift left, "f^{-1}"]
\end{tikzcd}$$

Izbor $u = id_{LM}$ je prilično očit, dok za f možemo uzeti funkciju koja točki $p \in M$ pridijeljuje cijeli skup $GL(d, \mathbb{R})$ u bilo kojoj bazi iz $L_p M$. Tako definirani f je sigurno injekcija, jer za različite $p \neq q$ će baze iz $L_p M$ i $L_q M$ biti iz različitih vektorskih prostora, pa će dakle $f(p) \neq f(q)$, ali jasno je i da je surjektivan jer je svaka orbita iz $LM/GL(d, \mathbb{R})$ zasigurno orbita neke baze iz $L_p M$ za neki $p \in M$. Sada se vidi da prethodni dijagram komutira i da smo ovom konstrukcijom došli do primjera glavnog $GL(d, \mathbb{R})$-svežnja. Kasnije u ostalim "geometrija OTR-a" komentarima ćemo vidjeti da je svežanj tetrada prirodan za definiranje geometrijskih alata koje koristimo u OTR-u.

IV.3. Morfizmi glavnih svežnjeva

Slijede iskazi definicija morfizma glavnih G-svežnjeva i morfizma između glavnog G-svežnja i glavnog H-svežnja.

Definicija 19. Neka su (P, π, M) i (Q, π', N) glavni G-svežnjevi. **Morfizam glavnih G-svežnjeva** je par glatkih funkcija, (u, f), takvih da sljedeći dijagram komutira :

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "u"] & Q \\
P \arrow[r, "u"] \arrow[u, "\triangleleft G"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \arrow[u, "\blacktriangleleft G"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

tj., za $\forall p \in M$ i $\forall g \in G$ vrijedi :

$$\begin{aligned} (f \circ \pi)(p) &= (\pi' \circ u)(p) \\ u(p \triangleleft g) &= u(p) \blacktriangleleft g \, . \end{aligned} \tag{28}$$

Morfizam glavnih G-svežnjeva je **izomorfizam** ako se radi dodatno o izomorfizmu svežnjeva. Na kraju, glavni G-svežanj je **trivijalan** ako je izomorfan kao glavni G-svežanj trivijalnom $(M \times G, \pi_1, M)$ svežnju.

Nakon ove definicije dolazimo do važnog teorema.

Teorem 4. *Glavni G-svežanj (P, π, M) je trivijalan ako i samo ako postoji glatki prerez $\sigma : M \to P$ (takav da $\sigma \circ \pi = id_M$).*

Vrijedi još spomenuti općenitiju verziju Definicije 19., koja je generalizacija za slučaj morfizama između glavnih svežnjeva različitih Liejevih grupa. Prvo, potreban nam je pojam *ekvivarijantne* funkcije.

Definicija 20. Neka su G i H Liejeve grupe i $\rho : G \to H$ homomorfizam Liejevih grupa te neka su

$$\begin{aligned} \triangleleft &: M \times G \to M \\ \blacktriangleleft &: N \times H \to N \end{aligned} \tag{29}$$

lijeva G- i H-djelovanja za neke glatke mnogostrukosti M i N. Glatko preslikavanje $f : M \to N$ kažemo da je ρ **ekvivarijantno** ako sljedeći dijagram komutira:

$$\begin{tikzcd}
M \times G \arrow[r, "f \times \rho"] \arrow[d, "\triangleleft"'] & N \times H \arrow[d, "\blacktriangleleft"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}$$

t.j., ako $\forall m \in M, \forall g \in G : f(m \triangleleft g) = f(m) \blacktriangleleft \rho(g)$. Potpuno analogna je definicija i za desna djelovanja pa stoga u nazivu ekvivarijantno ne spominjemo mislimo li na lijeva ili desna djelovanja.

Definicija 21. Neka je (P, π, M) glavni G-svežanj i neka je (Q, π', N) glavni H-svežanj i neka je $\rho : G \to H$ homomorfizam Liejevih grupa. **Morfizam glavnih svežnjeva**

iz (P,π,M) u (Q,π',N) je uređeni par glatkih funkcija (u,f) takvih da sljedeći dijagram komutira (tj., ako je u ρ-ekvivarijantna funkcija i ako $f\circ\pi=\pi'\circ u$) :

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "u"] & Q \\
P\times G \arrow[u, "\triangleleft"] \arrow[r, "u\times\rho"] & Q\times H \arrow[u, "\blacktriangleleft"'] \\
P \arrow[u, "i_1"] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \arrow[u, "i_1"'] \arrow[d, "\pi'"] \\
M \arrow[r, "f"] & N
\end{tikzcd}
$$

pri čemu je i_1 bilo koja funkcija za koju vrijedi $\pi_1\circ i_1=id$ (ona nam služi da možemo nacrtati komutativni dijagram iz kojeg se iščitava ρ-ekvivarijantnost). Morfizam između glavnog G-svežnja i glavnog H-svežnja je **izomorfizam** ako je ρ izomorfizam Liejevih grupa i (u,f) definira izomorfizam svežnjeva.

Definicija 21. je najopćenitiji mogući morfizam između glavnih svežnjeva i sada smo spremni ići dalje do pridruženog svežnja.

IV.4. Pridruženi svežanj

Pridruženi svežanj ćemo definirati pomoću glavnog svežnja na način da je u stanju ispravno reproducirati nama poznata transformacijska pravila objekata s kojima radimo u fizici, ali, osim toga pridruženi svežanj se može definirati na način da ostvaruje i razne općenitije transformacije i omogućuje generalnije teorije.

Definicija 22. Neka je (P,π,M) glavni G-svežanj i neka je F glatka mnogostrukost opremljena s lijevim G-djelovanjem. Definiramo

$$P_F := (P\times F)/\sim_G$$

gdje je $\sim_G$ definirana na način

$$(p,f)\sim_G(p',f') :\Leftrightarrow \exists g\in G \text{ takav da } p'=p\triangleleft g, f'=g^{-1}\triangleright f\,.$$

Točke iz P_F ćemo označavati $[p,f]$ jer je P_F kvocijenti prostor. Nadalje, projekciju π_F definiramo na način da

$$
\begin{aligned}
\pi_F &: P_F\to M\\
[p,f] &\mapsto \pi(p)\,.
\end{aligned}
$$

Primijetimo da je ovakav π_F dobro definiran jer svaki drugi element klase $[p,f]$ je oblika $[p\triangleleft g, g^{-1}\triangleleft f]$, a znamo da su $p\triangleleft g$ uvijek iz istog vlakna $F_P=G_p\subseteq P$ koje po definiciji zadovoljava $\pi(F_p)=p$. Uz sve ovo, **pridruženi svežanj** (svežnju (P,π,M) uz F i $\triangleright$) je svežanj (P_F,π_F,M).

IV.4.1. *Geometrija OTR-a - tangentni svežanj kao pridruženi svežanj*

Prisjetimo se da je (LM,π,M) bio glavni $GL(d,\mathbb{R})$-svežanj. Ako za F uzmemo $F=\mathbb{R}^d$ i definiramo lijevu akciju

$$
\begin{aligned}
&\triangleright : GL(d,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}^d\\
&(g,x)\mapsto g\triangleright x \quad ((g\triangleright x)^a := g^a{}_b x^b)
\end{aligned}
\tag{30}
$$

smo dobili pridruženi svežanj $(LM_{\mathbb{R}^d},\pi_{\mathbb{R}^d},M)$ koji je izomorfan (kao svežanj) svežnju (TM,π,M)

$$
\begin{tikzcd}
LM_{\mathbb{R}^d} \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{R}^d}"'] & TM \arrow[d, "\pi"] \\
M \arrow[r, "id_M"] & M
\end{tikzcd}
$$

pomoću funkcije u definirane na način :

$$
\begin{aligned}
&u: LM_{\mathbb{R}^d}\to TM\\
&[(e_1,\dots,e_d),x]\mapsto x^a e_a\,.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Funkcija 'u je sigurno bijekcija jer se svaki $X\in TM$ može u svakoj točki $p\in M$ razviti u nekoj bazi $(e_1,\dots,e_d)\in L_pM$ i potom preslikamo $X\overset{u^{-1}}{\longmapsto}[(e_1,\dots,e_d),X_{\mathbb{R}^d}]$ (gdje je $X_{\mathbb{R}^d}$ vektor iz $\mathbb{R}^d$ s komponentama X^a vektora $X\in T_pM$ u bazi $(e_1,\dots,e_d)$), a to je preslikavanje dobro definiramo (u smislu da ne ovisi o izboru baze iz L_pM jer na kraju završimo u klasi ekvivalencije koja ne ovisi o početnom izboru baze!). Vrijedi primijetiti da iako su svežnjevi $(LM_{\mathbb{R}^d},\pi_{\mathbb{R}^d},M)$ i (TM,π,M) izomorfni i iako se može pokazati da imaju iste transformacijske zakone, do transformacijskih zakona smo došli drukčijim postupkom u ovoj konstrukciji i konstrukciji iz III.2 Naime, do transformacijskg pravila (13) iz III.2 se dolazi deduktivno pomoću linearne algebre, a u primjeru u ovom komentaru smo dobili takve iste transformacije samo zbog toga što smo izabrali prikladnu desnu akciju. Da smo izabrali drukčiju desnu akciju, ne bismo nužno reproducirali pravilo (13), stoga vidimo da formalizam pridruženih svežnjeva može služiti za konstrukciju raznih općenitijih teorija, a svejedno pokriva i jednu već poznatu. Također, sličnim postupkom se može pronaći i izomorfizam tangentnog tenzorskog svežnja bilo kojeg tipa s pridruženim svežnjem (s obzirom na svežanj tetrada), dovoljno je za tenzor tipa (l,k) uzeti pridruženom svežnju za vlakno $F:=\underbrace{\mathbb{R}^d\times\dots\times\mathbb{R}^d}_{l\text{ puta}}\times\underbrace{\mathbb{R}^{*d}\times\dots\times\mathbb{R}^{*d}}_{k\text{ puta}}$.

IV.5. Morfizmi pridruženih svežnjeva

Završavamo uvod u kategoriju pridruženog svežnja definicijom morfizma.

Definicija 23. Neka su (P_F, π_F, M) i $\left(Q_F, \pi'_F, N\right)$ pridruženi svežnji glavnih G-svežnjeva (s istim vlaknom F) (P, π, M) i (Q, π', N). **Morfizam pridruženih svežnjeva** je morfizam svežnjeva $(\tilde{u}, v)$ takav da je (u, v) morfizam glavnih svežnjeva pomoću kojih su definirani pridruženi svežnjevi i vrijedi

$$\tilde{u}([p, f]) = [u(p), f] \tag{32}$$

ili ekvivalentno, ako sljedeća dva dijagrama komutiraju i vrijedi (30) :

$$\begin{tikzcd} P_F \arrow[r, "\tilde{u}"] \arrow[d, "\pi_F"'] & Q_F \arrow[d, "\pi'_F"] \\ M \arrow[r, "v"] & N \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} P \arrow[r, "u"] & Q \\ P \arrow[u, "\triangleleft G"] \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\pi"'] & Q \arrow[u, "\blacktriangleleft G"'] \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "v"] & N \end{tikzcd}$$

Kažemo da je $(\tilde{u}, v)$ **izomorfizam pridruženih svežnjeva** ako su $\tilde{u}$ i v bijekcije i ako $(\tilde{u}^{-1}, v^{-1})$ također definira morfizam pridruženih svežnjeva. Na kraju, pridruženi svežanj (P_F, π_F, M) zovemo **trivijalnim** ako je njegov glavni G-svežanj (P, π, M) trivijalan kao glavni G-svežanj.

Valja napomenuti nakon Definicije 23. da pridruženi svežanj može biti trivijalan kao vlaknasti svežanj, a da njegov glavni svežanj svejedno nije trivijalan. S druge strane, trivijalni pridruženi svežanj je nužno trivijalan kao vlaknasti svežanj.

V. GEOMETRIJA NA SVEŽNJEVIMA

U ovom poglavlju ćemo definirati koneksiju na svežnju i koneksijsku 1-formu. Potom ćemo definirati zakrivljenost koneksije te na kraju kovarijantnu derivaciju.

V.1. Koneksija

Koneksija je dodatna struktura na glavnom svežnju koja na poseban "gladak" način dodijeljuje svakoj točki totalne mnogostrukosti po jedan poseban vektorski prostor kompatibilan s desnim djelovanjem glavnog svežnja. Pokazuje se da je izbor tih vektorskih prostora ekvivalentan izboru diferencijalne forme s kodomenom u Liejevoj algebri T_eG Liejeve grupe G.

Definicija 24. Vertikalni potprostor u točki $p \in P$ svežnja (P, π, M) je

$$V_pP := \ker(\pi_*) = \left\{X|_p \in T_pP : \pi_*\left(X|_p\right) = 0\right\} \tag{33}$$

gdje je π_* guranje tangentog vektora pomoću projekcije.

Nadalje, u izvodima je važna funkcija $i_p : T_eG \to T_pP$ koja elementu Liejeve algebre $A \in T_eG$ pridružuje tangentni vektor X_p^A takav da :

$$\begin{aligned} &X_p^A : C_p^\infty(P) \to \mathbb{R} \\ &f \mapsto [f(p \triangleleft \exp(tA))]'(0)\,. \end{aligned} \tag{34}$$

Može se pokazati da je i_p homomorfizam Liejevih algebri. Također, po definiciji se lako pokaže da je za $\forall A \in T_eG$ i $\forall p \in P : i_p(A) = X_p^A \in V_pP$.

Definicija 25. Horizontalni potprostor u točki p svežnja (P, π, M) je potprostor $H_pP \leq T_pP$ koji je komplementaran vertikalnom potprostoru, tj.

$$T_pP = H_pP \oplus V_pP\,. \tag{35}$$

Jasno je da izbor H_pP nije jedinstven u svakoj točki p, ali, jednom kada napravimo izbor, dobivamo jedinstvenu (zbog zahtjeva da je suma direktna) dekompoziciju na vertikalni i horizontalni dio

$$X_p(\equiv X|_p) = \mathrm{hor}\left(X_p\right) + \mathrm{ver}\left(X_p\right)\,. \tag{36}$$

Sada definiramo *koneksiju* na glavnom svežnju.

Definicija 26. Koneksija na glavnom G-svežnju (P, π, M) je izbor horizontalnih potprostora H_pP za svaku točku $p \in P$ takav da :

1. Za svaki $g \in G$ i $X_p \in T_pP$ imamo

$$(\triangleleft\, g)_* X_p \in H_{p \triangleleft g}P \tag{37}$$

to jest,

$$(\triangleleft\, g)_* H_p \subseteq H_{p \triangleleft g}P\,. \tag{38}$$

2. Za svako glatko polje $X \in \Gamma(TP)$, sumandi u jedinstvenom rastavu po točkama

$$X_p = \mathrm{hor}\left(X_p\right) + \mathrm{ver}\left(X_p\right) \tag{39}$$

generiraju glatka vektorska polja hor(X) i ver(X).

Definicija 26. u potpunosti formalizira "glatkoću" izbora horizontalnih prostora i unutar vlakna (1.) i među vlaknima (2.). Također, iako nije možda sasvim očito na prvu, ali općenito nije samo horizontalni dio ovisan o izboru prostora H_pP nego je i vertikalni dio također (osim ako vektor u potpunosti leži u vertikalnom potprostoru).

V.2. Koneksijska 1-forma

Slijedi definicija *koneksijske 1-forme* ω, izbor koje je ekvivalentan izboru koneksije. Za početak, 1-forma ω s vrijednostima u Liejevoj algebri je funkcija koja svakoj točki p pridružuje linearnu funkciju $\omega_p \equiv \omega|_p$ iz $L(T_pP, T_eG)$, tj., $\omega_p : T_pP \to T_eG$. Dakle ona ”uzima” tangentni vektor i ”vraća” element Liejeve algebre, a ne broj. Osim drukčije kodomene, razlike baš i nema u odnosu na funkcionale jer takva 1-forma mora i dalje biti linearan operator.

Definicija 27. Neka je ω_p za $\forall p \in P$ funkcija

$$\begin{aligned} &\omega_p : T_pP \to T_eG \\ &X_p \mapsto \omega_p\left(X_p\right) := i_p^{-1}(\mathrm{ver}\left(X_p\right)) . \end{aligned} \tag{40}$$

Funkciju ω, koja svakoj točki $p \in P$ pridružuje funkciju ω_p, zovemo **koneksijska 1-forma s obzirom na koneksiju**.

Opravdanje prethodne definicije je sljedeće. Naime, ako nam netko zada funkciju ω za koju kaže da potječe od koneksije, onda možemo u svakoj točki p rekonstruirati horizontalni potprostor kao

$$H_pP = \ker\left(\omega_p\right) .$$

Naravno, neće svaka 1-forma s vrijednostima u Liejevoj algebri generirati koneksiju na prihvatljiv način (u smislu Definicije 26.), ali sljedeći teorem nam daje nužan uvjet za takvu formu.

Teorem 5. *Koneksijska 1-forma ω s obzirom na koneksiju zadovoljava:*

1. *za $\forall p \in P$ imamo $\omega_p(X_p^A) = A$, tj., $\omega_p \circ i_p = id_{T_eG}$. Prikazano dijagramatski :*

$$\begin{tikzcd} T_eG \arrow[r, "i_p"] \arrow[dr, "id_{T_eG}"'] & V_pP \arrow[d, "\omega_p|_{V_pP}"] \\ & T_eG \end{tikzcd}$$

2. *Za $\forall p \in P$ i $\forall X_p \in T_pP$ vrijedi*

$$((\triangleleft\, g)^* \omega)_p\left(X_p\right) = \left(Ad_{g^{-1}}\right)_*\left(\omega_p\left(X_p\right)\right) \tag{41}$$

gdje je $Ad_{g^{-1}}$ adjungiranje, tj. $Ad_g(h \in G) = g \cdot h \cdot g^{-1}$. Ekvivalentno, za svaki $p \in P$ sljedeći dijagram komutira :

$$\begin{tikzcd} T_pP \arrow[r, "\omega_p"] \arrow[dr, "((\triangleleft g)^*\omega)_p"'] & T_eG \arrow[d, "\left(\mathrm{Ad}_{g^{-1}}\right)_*"] \\ & T_eG \end{tikzcd}$$

3. *ω je glatka funkcija.*

V.3. Lokalna reprezentacija koneksijske forme na baznoj mnogostrukosti

Sljedeći korak je izraziti koneksijsku formu lokalno na baznoj mnogostrukosti. To nam je korisno jer u fizici najčešće ”živimo” na baznoj mnogostrukosti.

Definicija 28. Neka je $\sigma : U \subseteq M \to P$ lokalni prerez glavnog G-svežnja (P, π, M), tj., $\pi|_U \circ \sigma = id_U$. Na zadanoj koneksijskoj 1-formi ω, lokalni prerez inducira :

1. **Yang-Mills polje** $\omega^U : \Gamma(TU) \to \Gamma(T_eG)$ dano kao

$$\omega^U := \sigma^* \omega ,$$

2. **Lokalnu trivijalizaciju** h glavnog svežnja P

$$\begin{aligned} &h : U \times G \to P \\ &(m, g) \mapsto \sigma(m) \triangleleft g , \end{aligned}$$

3. **Lokalnu reprezentaciju** od ω na U :

$$h^*\omega : \Gamma\left(T\left(U \times G\right)\right) \to \Gamma\left(T_eG\right) .$$

U 3. vrijedi napomenuti da je tangentni prostor točke (m, g) izomorfan kao Liejeva algebra algebri $T_mU \oplus T_gG$

$$T_{(m,g)}\left(U \times G\right) \cong T_mU \oplus T_gG . \tag{42}$$

V.3.1. *Maurer-Cartan forma i baždarna funkcija Ω*

Vrijedi sljedeća veza između Yang-Mills polja i lokalne reprezentacije :

Teorem 6. *Za $\forall v \in T_mU$ i $\forall \gamma \in T_gG$ vrijedi*

$$(h^*\omega)_{(m,g)}(v, \gamma) = \left(Ad_{g^{-1}}\right)_*\left(\omega^U(v)\right) + \Xi_g(\gamma) \tag{43}$$

*gdje je $\Xi_g : T_gG \to T_eG$ **Maurer-Cartan forma** koja je inverz guranja lijevom translacijom*[5] *$(l_g)_*$*

$$\begin{aligned} &(l_g)_* : T_eG \to T_gG \\ &A \mapsto X_g^A . \end{aligned} \tag{44}$$

Nadalje, ponekada u fizici lokalno proučavamo Yang-Mills polje i cilj nam je stvoriti neku globalnu sliku o sustavu. Stoga je potrebno nekako ”pospajati” lokalna polja za različite okoline. Za tu svrhu nam služi baždarna funkcija Ω koja povezuje Yang-Mills polja na presjeku okolina. Također, Teorem 4. nam govori da na glavnom svežnju nije moguće definirati glatki globalni prerez (prerez s domenom cijele bazne mnogostrukosti) osim ako je svežanj trivijalan (produktan), tako da ne samo da nam je Ω potrebna zbog načina na koji se rade mjerenja, Ω nas spašava jer globalnu sliku jednim glatkim preprezom ne možemo spoznati niti u principu.

Definicija 29. Neka su $U_1, U_2 \subseteq M$ otvoreni skupovi na M i promotrimo Yang-Mills polja pridružena dvama lokalnim prerezima σ_1 i σ_2, kao na sljedećem dijagramu:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi"] & \\ U_1 \subseteq M \arrow[ur, bend left, "\sigma_1"] & & U_2 \subseteq M \arrow[ul, bend right, "\sigma_2"'] \end{tikzcd}$$

Baždarna funkcija Ω je funkcija $\Omega : U_1 \cap U_2 \to G$ takva da

$$\sigma_2(m) = \sigma_1(m) \triangleleft \Omega(m)\,. \tag{45}$$

Zbog toga što je djelovanje na glavnom svežnju po definiciji slobodno, relacija (45) jedinstveno određuje baždarnu funkciju.

Teorem 7. *Pod pretpostavkama Definicije 29., veza između ω^{U_2} i ω^{U_1} je dana kao*

$$(\omega^{U_2})_m = \left(Ad_{\Omega^{-1}(m)}\right)_* \left(\omega^{U_1}\right) + \left(\Omega^* \Xi_g\right)_m\,. \tag{46}$$

Teorem 7. nam daje vezu između dva Yang-Mills polja na presjeku njihovih domena.

V.3.2. Geometrija OTR-a - Christofellovi simboli kao Yang-Mills polje

Sada ćemo pokazati da u slučaju kada je $P = LM$ i $G = GL(d, \mathbb{R})$, Christoffelovi simboli se mogu smatrati Yang-Mills poljem i njihove transformacije iz sustava u sustav slijede Teorem 7.. Za početak, pokazuje se eksplicitnim računom da za $GL(d, \mathbb{R})$, Mauer-Cartan forma ima oblik

$$\left(\Xi_g\right)^i{}_j = \left(g^{-1}\right)^i{}_k \left(dx^k{}_j\right)_g\,. \tag{47}$$

Neka su (U_1, x) i (U_2, y) dvije koordinatne karte s nepraznim presjekom. Drugi sumand u Teoremu 7. se u bazi $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ raspisuje u

$$\begin{aligned}
(\Omega^*\Xi)_p{}^i{}_j\left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right) &= \Xi_{\Omega(p)}{}^i{}_j\left(\Omega_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right)_{\Omega(p)} = \\
&= [\text{Koristimo relaciju (45)}] = \\
&= \left(\Omega(p)^{-1}\right)^i{}_k \left(dx^k{}_j\right)_{\Omega(p)}\left(\Omega_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right)_{\Omega(p)} \\
&= [\text{Definicija djelovanja diferencijala}] \\
&= \left(\Omega(p)^{-1}\right)^i{}_k \left(\Omega_*\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p\right)_{\Omega(p)}\left(x^k{}_j\right) \\
&= [\text{Definicija guranja vektora}] \\
&= \left(\Omega(p)^{-1}\right)^i{}_k \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \left(x^k{}_j \circ \Omega\right)(p) \\
&= \left(\Omega(p)^{-1}\right)^i{}_k \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_p \Omega(p)^k{}_j\,.
\end{aligned} \tag{48}$$

Za račun prvog sumanda treba primijetit da za $\forall A \in T_e GL(d, \mathbb{R})$:

$$\left(\left(Ad_g\right)_* A\right)^i{}_j = g^i{}_k A^k{}_l \left(g^{-1}\right)^l{}_j \tag{49}$$

pa onda pošto je ω^U forma s vrijednostima u Liejevoj algebri, možemo na nju direktno primijeniti izraz (49)

$$\left(\left(Ad_{\Omega^{-1}(m)}\right)_* \omega^U\right)^i{}_j = \left(\Omega^{-1}(m)\right)^i{}_k \left(\omega^U\right)^k{}_l \left(\Omega(m)\right)^l{}_j\,. \tag{50}$$

Sve skupa, veza između Yang-Mills polja na presjeku otvorenih skupova U_1 i U_2 je

$$\left(\omega^{U_2}\right)^i{}_{j\mu} = \left(\Omega^{-1}\right)^i{}_k \left(\omega^{U_1}\right)^k{}_{l\mu} \Omega^l{}_j + \left(\Omega^{-1}\right)^i{}_k \partial_\mu \Omega^k{}_j\,. \tag{51}$$

U izrazu (51) je važno napomenuti da i dalje nismo izabrali eksplicitno prereze svežnja $\sigma_1 : U_1 \to P$ i $\sigma_2 : U_2 \to P$, taj izraz je potpuno općenit i neovisan o izboru prereza. Ako specijalno izaberemo prereze inducirane koordinatama $\{x\}$ i $\{y\}$,

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &: m \mapsto x^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_m \\
\sigma_2 &: m \mapsto y^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)_m
\end{aligned} \tag{52}$$

dobivamo da je očito $\Omega^i{}_j = \frac{\partial y^i}{\partial x^j}$ (kao posljedica veze (13)). Uz sve ovo, ω^{U_2} izražena preko koordinata y i forme ω^{U_1} glasi

$$\left(\omega^{U_2}\right)^i{}_{j\nu} = \frac{\partial y^\mu}{\partial x^\nu}\left(\frac{\partial x^i}{\partial y^k}\left(\omega^{U_1}\right)^k{}_{l\mu}\frac{\partial y^l}{\partial x^j} + \frac{\partial x^i}{\partial y^k}\frac{\partial^2 y^k}{\partial x^\mu \partial x^j}\right) \tag{53}$$

i to su upravo transformacijska pravila Christoffelovih simbola! Do njih smo došli najprirodnijim odabirima prereza i karti, upravo onakvima koje rabimo u OTR-u.

V.4. Zakrivljenost na glavnom svežnju

Često se u literaturi koja nije pretjerano obazirava prema diferencijalnoj geometriji zakrivljenost spominje kao svojstvo kovarijantne derivacije. Ali, pokazati ćemo da je za definiciju zakrivljenosti na glavnom svežnju potrebna samo koneksija. Za početak, za definiciju zakrivljenosti nam je potreban pojam *vanjske kovarijantne derivacije*.

Definicija 30. Neka je (P, π, M) glavni G-svežanj sa koneksijskom 1-formom ω. Neka je ϕ k-forma s vrijednostima u nekom modulu V. Definiramo **vanjsku kovarijantnu derivaciju** od ϕ, $D\phi$, kao

$$\begin{aligned}
D\phi &: \Gamma\left(T^{k+1}_0\right) \longrightarrow V \\
(X_1, \ldots, X_{k+1}) &\mapsto d\phi\left(\mathrm{hor}(X_1), \ldots, \mathrm{hor}(X_{k+1})\right)\,.
\end{aligned} \tag{54}$$

Sada definiramo *zakrivljenost*.

Definicija 31. Neka je ω koneksijska 1-forma na glavnom G-svežnju (P,π,M). **Zakrivljenost** koneksijske 1-forme ω je 2-forma Ω na P s vrijednostima u Liejevoj algebri T_eG

$$\Omega := D\omega\,. \tag{55}$$

Za računanje je koristan sljedeći teorem.

Teorem 8. *Neka je ω koneksijska 1-forma i Ω njena zakrivljenost. Tada vrijedi*

$$\Omega = d\omega + \omega \wedge \omega\,, \tag{56}$$

gdje vanjski produkt 1-formi s vrijednostima u T_eG definiramo prirodno preko komutatora iz Liejeve algebre

$$\omega \wedge \omega(X,Y) := [\![\omega(X),\omega(Y)]\!]\,. \tag{57}$$

Teorem 9. ***Prvi Bianchijev identitet****. Neka je Ω zakrivljenost koneksijske 1-forme ω pridružene glavnom G-svežnju. Tada vrijedi*

$$D\Omega\,\left(= D^2\omega\right) = 0\,. \tag{58}$$

Za razliku od običnog diferenciranja, operator $D^2 \neq 0$ općenito, ali ipak vidimo po prethodnom teoremu da ima netrivijalnu jezgru. Nadalje, uz zakrivljenost je usko povezana *jakost Yang-Mills polja*.

Definicija 32. Neka je (P,π,M) glavni G-svežanj i neka je Ω zakrivljenost koneksijske 1-forme ω. Neka je $\sigma : U \subseteq M \to P$ lokalni prerez, tada 2-formu

$$\sigma^*\Omega \in \Omega^2(U)\otimes T_eG$$

zovemo **jakost Yang-Mills polja**. Ponekada ćemo $\sigma^*\Omega$ označavati F ili Riem, ovisno o kontekstu.

V.4.1. Geometrija OTR-a - Riemannov tenzor kao jakost Yang-Mills polja

Promotrimo opet slučaj kada je $P = LM$ i $G = GL(d,\mathbb{R})$. Iz primjera V.3.2 smo pokazali da ω^U nosi matrične indekse i relacijom (53) smo razriješili njegovo transformiranje. Uvrstimo li takvo Yang-Mills polje u relaciju (56) Teorema 8., dobivamo (koristeći da povlak i diferencijal komutiraju) jakost Yang-Mills polja (koju ćemo sada označavati Riem)

$$\begin{aligned} Riem^i{}_{j\mu\nu} &= \left(d\omega^U\right)^i{}_{j\mu\nu} + \left(\omega^U\right)^i_{k\mu} \wedge \left(\omega^U\right)^k_{j\nu} = \\ &= \partial_\nu\left(\omega^U\right)^i{}_{j\mu} - \partial_\mu\left(\omega^U\right)^i{}_{j\nu} + \\ &+ \left(\omega^U\right)^i{}_{k\mu}\left(\omega^U\right)^k{}_{j\nu} - \left(\omega^U\right)^i{}_{k\nu}\left(\omega^U\right)^k{}_{j\mu}\,. \end{aligned} \tag{59}$$

Što uz prethodno (komentar V.3.2) obrazloženu korespodenciju

$$\left(\omega^U\right)^i{}_{k\mu} \equiv \Gamma^i{}_{k\mu}$$

točno odgovara definiciji Reimannovog tenzora.

V.5. Kovarijantna derivacija

Sada ćemo definirati na apstraktan način kovarijatnu derivaciju na pridruženom svežnju. Postoji i geometrijski intuitivan način za doći do definicije kovarijantne derivacije koji se oslanja na paralelni transport, ali, zbog količine definicija potrebnih i rezultata koji je na kraju (iako ekvivalentan apstraktnom pristupu) izrazito neučinkovit za računanje smo ga u ovom seminaru odlučili preskočiti. Geometrijska ideja kovarijantne derivacije je da gledamo vektorske pridružene svežnjeve (za njih je vlakno F vektorski prostor) i linearne (u drugom argumentu) lijeve akcije $\triangleright$: $G\times F \to F$. Zato jer je F vektorski prostor, možemo oduzimati vektore, pa onda možemo uspoređivati vektor iz vlakna neke točke i paralelno transportirani vektor iz vlakna susjedne točke, a s obzirom na krivulju po kojoj smo paralelno transportirali vektor ćemo dobiti kovarijantnu derivaciju u smjeru tangentnog polja krivulje. Cilj nam je konstruirati operator ∇ koji lokalni prerez $\sigma : U \to P_F$ zajedno sa zadanim vektorskim poljem $X \in TU$ preslikava u lokalni prerez $\nabla_X\sigma : U \to P_F$, a da pritom kao operator zadovoljava sljedeća svojstva :

1. za $\forall f,g \in C^\infty_p(M)$, $\forall X,Y \in TU$:
$$\nabla_{fX+gY}\sigma = f\nabla_X\sigma + g\nabla_Y\sigma$$
2. $\forall X \in TU$:
$$\nabla_X(\sigma+\tau) = \nabla_X\sigma + \nabla_X\tau$$
3. $\forall f \in C^\infty_p(M)$:
$$\nabla_X f\sigma = X(f)\sigma + f\nabla_X\sigma$$

Započinimo teoremom koji jedinstveno povezuje G-ekvivarijantne (za definiciju vidi Dodatak VIII) funkcije i lokalne prezreze pridruženog svežnja.

Teorem 10. *Neka je (P,π,M) glavni G-svežanj i (P_F,π_F,M) njemu pridruženi svežanj. Skup lokalnih prereza $U \subseteq M \to P_F$ je bijektivno povezan sa skupom G-ekvivarijantnih funkcija $\phi : \pi^{-1}(U) \subseteq P \to F$.*

Ovaj teorem nam omogućuje da kovarijantnu derivaciju definiramo na kodomeni F, a onda ju ekvivalentno (sa tom bijektivnom korespodencijom) prebacimo na pridruženi svežanj.

Teorem 11. *Neka je $\phi : P \to F$ G-ekvivarijantna funkcija i neka je $X \in TP$ te $s : U \subseteq M \to P$ lokalni prerez. Tada vrijedi identitet*

$$(s^*D\phi)(X) = (ds^*\phi)(X) + \omega^U(X) \triangleright (s^*\phi)\,. \tag{60}$$

Uz identifikacije

$$s^*\phi \longleftrightarrow \sigma : U \to P_F$$
$$(s^*D\phi)(X) \longleftrightarrow \nabla_X\sigma$$

se upravo dolazi do konstrukcije ***usmjerene kovarijatne derivacije*** ∇_X *sa svojstvima 1., 2. i 3. iz prijašnjeg razmatranja. Treba naglasiti da su* σ *i* $\nabla_X \sigma$ *ostvareni bijektivnim parom funkcije* ϕ *(u smislu Teorema 10. i kojeg također označavamo* ϕ *iako uopće nije ista funkcija), inače ne bismo za kodomenu od* σ *imali* P_F *nego* F.

Teoremom 11. smo konstruirali traženi operator (usmjerene) kovarijantne derivacije i pronašli da izgleda kao (sada uz uvrštenu identifikaciju iz teorema)

$$\nabla_X \sigma = d\sigma(X) + \omega^U(X) \triangleright \sigma \, . \tag{61}$$

Drugi sumand u (61) je zapravo pokrata dviju bijektivnih identifikacija u smislu Teorema 10.. Prvo za izabrani prerez σ uzmemo njegov G-ekvivarijantni par i na njega djelujemo sa $\omega^U(X) \triangleright$ i onda potom tu G-ekvivarijantnu funkciju identificiramo njoj pridruženim parom prerezom (koji označavamo $\omega^U(X) \triangleright \sigma$).
Vrijedi napomenuti da svojstva ovog operatora ovise o dva uglavnom nepovazana izbora : o izboru koneksije ω i o izboru lijevog *linearnog* djelovanja $\triangleright$ na F.

V.5.1. Geometrija OTR-a - kovarijantna derivacija

Teorem 11. završava naš niz komentara o geometriji OTR-a u kojima primijenjujemo rezultate na svežanj tetrada (LM, π, M) i reproduciramo matematičke alate koje koristimo u OTR-u. Naime, ako za lijevu akciju na $F(\simeq \mathbb{R}^d)$ uzmemo

$$(g \triangleright f)^i := g^i{}_j f^j \, , \tag{62}$$

gdje je $g^i{}_j$ matrični zapis elementa $g \in T_e GL(d, \mathbb{R})$ u standardnoj bazi od $\mathbb{R}^d$, a Yang-Mills polje ω^U kao u prethodna dva komentara (V.3.2 i V.4.1), dobivamo kovarijantnu derivaciju istu kao onu koju smo definirali u OTR-u :

$$\forall X \in TM : (\nabla_X \sigma)^i = X^\nu \partial_\nu \sigma^i + X^\nu \left(\omega^U\right)^i{}_{j\nu} \sigma^j \, . \tag{63}$$

VI. KLASIČNA ELEKTRODINAMIKA KAO U(1) BAŽDARNA TEORIJA

Kroz seminar smo do sada konstrukcijski pokazali da se OTR može smatrati baždarnom $GL(4, \mathbb{R})$ teorijom. Sljedeće ćemo konstruirati glavni $U(1)$ svežanj iz kojeg se vidi da je Klasična elektrodinamika $U(1)$ baždarna teorija.

VI.1. Glavni svežanj za elektrodinamiku

Neka je $(M \times U(1), \pi_1, M)$ trivijalni svežanj pri čemu je M prostorvrijeme Minkowskog sa svojoj metrikom g. Na ovom svežnju definiramo desno djelovanje kao

$$(x^\mu, g) \triangleleft g' := (x^\mu, gg') \tag{64}$$

i onda on postaje glavni $U(1)$-svežanj jer je ovako definirano djelovanje $\triangleleft$ slobodno. Ako na $M \times U(1)$ definiramo koneksiju, onda ju možemo povući na M pomoću globalnog prereza (koji postoji po Teoremu 4. jer je $(M \times U(1)\pi_1, M)$ trivijalni svežanj!) i dobiti globalno Yang-Mills polje. To nas ne iznenađuje jer u KED-u često imamo globalno definiran potencijal A_μ, a za njega smo već rekli da očekujemo da ćemo ga prepoznati kao Yang-Mills polje (ispasti će tako, do na faktor).

VI.2. Potencijal $\mathbf{A}_\mu$ i koneksija

Sada ćemo izvesti transformacijsko pravilo za 4-vektorski potencijal pri promjeni baždarenja. Neka je $\mathcal{A}^1_\mu$ neko Yang-Mills polje na M dobiveno povlakom koneksije globalnim prerezom

$$\sigma_1 : m \in M \mapsto \left(x^\mu, e^{i\alpha(m)}\right) . \tag{65}$$

Neka je

$$\sigma_2 : m \in M \mapsto \left(x^\mu, e^{i\beta(m)}\right) \tag{66}$$

drugi globalni prerez za iste funkcije x^μ. Tada je baždarna funkcija Ω dana kao

$$\Omega(m) = e^{i\chi(m)} = e^{i(\beta(m) - \alpha(m))} . \tag{67}$$

Ponavljanjem istog postupka (samo sada bez $GL(d, \mathbb{R})$ matričnih indeksa) kao u komentaru V.3.2 dobivamo da je drugi sumand iz Teorema 7.

$$(\Omega^* \Xi)_m \left(\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)_m\right) = \Omega(m)^{-1} \partial_\mu \Omega(m) \, , \tag{68}$$

a prvi sumand iz Teorema 7. ima oblik

$$\left(Ad_{\Omega^{-1}(m)}\right)_* \left(\mathcal{A}^1_\mu\right) = \Omega^{-1}(p) \mathcal{A}^1_\mu \Omega(p) \, . \tag{69}$$

Sve skupa, veza između dva baždarenja Yang-Mills polja je :

$$\mathcal{A}^2_\mu = \Omega^{-1} \mathcal{A}^1_\mu \Omega + \Omega^{-1} \partial_\mu \Omega \, . \tag{70}$$

Ako pretpostavimo da svako Yang-Mills polje $\mathcal{A}_\mu$ definira po jedan 4-vektorski potencijal A_μ kao $\mathcal{A}_\mu = iq \cdot A_\mu$, dobivamo (uvrštavanjem točnog oblika za Ω) vezu između 4-vektorskih potencijala

$$A^2_\mu = e^{-i\chi} A^1_\mu e^{i\chi} - \frac{i}{q} e^{-i\chi} \partial_\mu e^{i\chi} \tag{71}$$

koja je identična izrazu (5) s početka seminara. Dakle, zaključujemo da je 4-vektorski potencijal naprosto (do na faktor) povlak koneksije prerezom. Ako totalna mnogostrukost nije ovako jednostavna kao u našem slučaju, može se dogoditi (npr. u slučaju Diracovog monopola) da ne možemo definirati globalni prerez i samim time nemamo globalnu sliku 4-vektorskog potencijala pa moramo koristiti lokalne prereze i Teorem 7.

VI.3. Faradayev tenzor i zakrivljenost koneksije

Idući cilj je prikazati Faradayev tenzor kao jakost Yang-Mills polja. Ako je $\mathcal{A}_\mu$ neko Yang-Mills poje, tada je jakost Yang-Mills polja $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ dana kao

$$\mathcal{F} = d\mathcal{A} + \mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \,. \tag{72}$$

Treba uzeti u obzir da sumand $\mathcal{A}\wedge\mathcal{A}$ propada jer je $U(1)$ komutativna grupa. Sve skupa, ako definiramo Faradayev tenzor $F_{\mu\nu} := \frac{1}{iq}\mathcal{F}_{\mu\nu}$, dobivamo poznati izraz

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \,. \tag{73}$$

VI.4. Kovarijantna derivacija

Za glavni $U(1)$ svežanj (P, π_1, M) (gdje je $P = M \times U(1)$) možemo definirati pridruženi vektorski svežanj $(P_\mathbb{C}, \pi_\mathbb{C}, M)$. Na njegovome vlaknu, $\mathbb{C}$, definiramo lijevo djelovanje pomoću množenja u kompleksnoj ravnini

$$g \triangleright z := g \cdot z \,. \tag{74}$$

Prema Teoremu 11., usmjerena kovarijantna derivacija onda izgleda kao

$$\nabla_X = X^\mu \partial_\mu + X^\mu \mathcal{A}_\mu = X^\mu \partial_\mu + iq \cdot X^\mu A_\mu = X^\mu D_\mu \,. \tag{75}$$

Vidimo da je usmjerena (baždarna) kovarijantna derivacija u tom slučaju kontrakcija vektora i kovarijantne derivacije kakvu smo definirali u uvodu I.2.
Vrijedi primijetiti da ova baždarna kovarijantna derivacija razlikuje funkcije koje su baždarni skalari i baždarni vektori. Na primjer, klasično neutronsko polje n je za baždarnu kovarijantnu derivaciju skalar pa se kovarijantna derivacija svodi na parcijalnu derivaciju, kao što bi i trebala

$$\begin{aligned} \nabla_X n &= X^\mu \partial_\mu n + iq \cdot X^\mu A_\mu n = \\ &= [q = 0 \text{ za neutron}] = \\ &= X^\mu \partial_\mu n \,. \end{aligned} \tag{76}$$

S druge strane, klasično elektronsko polje e je za baždarnu kovarijantnu derivaciju vektor pa se kovarijantna derivacija ne svodi samo na parcijalne derivacije.

VII. ZAVRŠNA DISKUSIJA

U prošlom poglavlju smo definirali objekte iz klasične elektrodinamike pomoću pojmova iz teorije glavnih i pridruženih svežnjeva. Sličan posao smo, kroz komentare tijekom seminara, odradili i na OTR-u i time smo zapravo teorijom svežnjeva objasnili geometriju dviju velikih teorija iz fizike. Ovu priču nastavljamo u Diplomskom radu gdje ćemo primijeniti formalizam glavnog svežnja (i ostatak matematike razvijene u ovom seminaru) na lagranžijan Standardnog modela (koji ćemo doduše definirati nad klasičnim spinornim poljima, a ne spinornim operatorima na Hilbertovom prostoru). U Dodatku VIII navodimo definiciju spinornog svežnja kao zagrijavanje za Diplomski rad.

VIII. DODATAK

VIII.0.1. Topološka mnogostrukost

Topološka mnogostrukost dimenzije m, ili skraćeno, **topološka m mnogostrukost**, je[3] Hausdorffov lokalno euklidski topološki prostor dimenzije $m \in \mathbb{N}_0$ s prebrojivom bazom.

VIII.0.2. Difeomorfizam

Difeomorfizam[3] između glatkih mnogostrukosti M (s atlasom $\mathcal{A}_M$) i N (s atlasom $\mathcal{A}_N$) je gladak homeomorfizam $f : M \to N$ čiji je inverz $f^{-1} : N \to M$ također gladak.

VIII.0.3. Opća linearna grupa

Opća linearna grupa nad vektorskim prostorom V je skup svih automorfizama $A : V \to V$ i označavamo ju $GL(V)$. Ako je $V = \mathbb{R}^d$ (ili $\mathbb{C}^d$) običaj je pisati $GL(d, \mathbb{R})$ (ili $GL(d, \mathbb{C})$).

VIII.0.4. G-ekvivarijantna funkcija

Ako je (P, π, M) glavni G-svežanj i (P_F, π_F, M) pridruženi svežanj, kažemo da je $\phi : \pi^{-1}(U \subseteq M) \subseteq P \to F$ **G-ekvivarijantna** funkcija ako

$$\forall g \in G : \forall p \in \pi^{-1}(U) : \phi(p \triangleleft g) = g^{-1} \triangleright \phi(p) \tag{77}$$

gdje je $\pi^{-1}(U)$ praslika neke otvorene okoline U.

VIII.0.5. Dvostruki prekrivač

Za Liejevu grupu G kažemo da je **dvostruki pokrivač** Liejeve grupe H ako postoji homomorfizam Liejevih grupa $\rho : G \to H$ za koji vrijedi $\mathrm{Ker}\rho \simeq \mathbb{Z}_2$.

VIII.0.6. Spinska grupa Spin(m,n)

Definicija se nalazi u literaturi[6], ovdje ju ne navodimo jer je dugačka i oslanja se na previše definicija koje nismo koristili u ovom seminaru.

VIII.0.7. Ortogonalni svežanj tetrada - OLM

Za glatku mnogostrukost M s metrikom g_{ab} (analogna je definicija za metrike Lorentzovog i Riemannovog tipa) možemo promatrati potskup svežnja tetrada LM tako da za svaki L_pM uzimamo podskup

$$OL_pM := \{(e_1, ..., e_{dimM}) : (e_1, ..., e_{dimM}) \text{ je ONB } \} \qquad (78)$$

i onda napravimo disjunktnu uniju kao u (26)

$$OLM := \bigsqcup_{p \in M} OL_pM \, . \qquad (79)$$

Na kraju, prostor OLM je potrebno obdariti topologijom (vidi referencu[4]) kako bismo završili konstrukciju **ortogonalnog svežnja tetrada**.

VIII.0.8. Spinorni svežanj

Spinorni svežanj tetrada nad $(n+1)$-dimenzionalnom mnogostrukosti (M, g) (gdje je g metrika Lorentzovog tipa) je glavni Spin(1,n)-svežanj (P, π, M) takav da sljedeći dijagram komutira

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\pi"'] & OLM \arrow[dl, "\pi_{OLM}"] \\ M & \end{tikzcd}$$

i da je ϕ ρ-ekvivarijantna funkcija, gdje je ► desno djelovanje glavnog $SO(1,n)$-svežnja (OLM, π_{OLM}, M), a $\rho : \text{Spin}(1,n) \to SO(1,n)$ je dvostruki prekrivač.
Uređeni par glatke mnogostrukosti P i ρ-ekvivarijante funkcije ϕ, (P, ϕ), zovemo **spinska struktura** za (M, g).
Nadalje, koristeći spinorni svežanj tetrada kao glavni svežanj, možemo definirati spinorni svežanj kao pridruženi vektorski svežanj s linearnim lijevim djelovanjem (za koje se ujedno zahtjeva i da je reprezentacija spinske grupe) na vlaknu.
Pomoću spinornog svežnja definiramo **spinorno polje** kao prerez spinornog svežnja.

---

[1] S.B. Sontz : Principal Bundles - The Classical Case
[2] J.C Baez, J.P. Munian : Gauge Fields, Knots And Gravity (Volume 4)
[3] Ivica Smolić - Diferencijalna Geometrija u Fizici (skripta)
[4] M. Fecko - Differential Geometry and Lie Groups for Physicists (1st Edition)
[5] Lijeva translacija $l_g : G \to G$, $l_g(h) = g \cdot h$ je automorfizam Liejeve grupe pa onda ta funkcija može poslužiti za guranje tangentnih vektora Liejeve grupe.
[6] E. de Faria, W. de Melo - Mathematical Aspects of Quantum Field Theory (1st Edition)