

Kvark-hadron dualnost

Lovre Pavičić*

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

(Dated: 22. siječnja 2022.)

Kvark-hadron dualnost je ideja da se udarni presjeci izračunati u terminima kvarkova i gluona mogu poistovjetiti s mjerenim udarnim presjecima hadrona, koji su njihova vezana stanja. U seminaru je izložen formalizam kvark-hadron dualnosti putem Wilsonovog OPE, ograničenja formalizma te je argumentirana jedna klasa modela koji opisuju narušenja kvark-hadron dualnosti.

I. UVOD

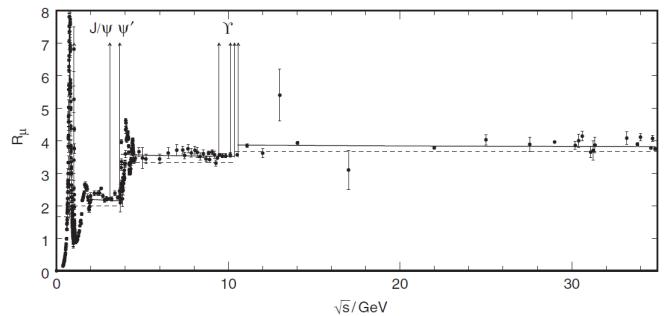
Kvantna kromodinamika (QCD) je kvantna teorija polja koja opisuje jaku interakciju. U njoj se sve fizikalne veličine poput udarnih presjeka, širina raspada, distribucija, itd. računaju u terminima kvarkova i gluona te su njihova međudjelovanja dobro zadana. Međutim kvarkovi i gluoni ne mogu biti opservirani svaki za sebe zbog zatočenja boje. Fizikalna stanja koja se u eksperimentima detektiraju su hadroni, koji su po kvantnoj kromodinamici vezana stanja kvarkova i gluona te su ona za praktične potrebe neizračunljiva. Kvark-hadron dualnost je jedan od načina da se premosti ta razlika između teorijskih fizikalnih vrijednosti izračunatih u slici kvarkova i gluona i stvarnih izmjerenih vrijednosti u eksperimentima s hadronima. U suštini se kvark-hadron dualnost zasniva na ideji da će izračuni na nivou kvarkova bar aproksimativno opisivati mjerene vrijednosti.

Započnimo s jednom prilično ilustrativnom fizikalnom slikom. Promotrimo procese u kojima se mogu izdvojiti dvije faze koje se odvijaju na različitim vremenskim skalama. Prva faza je osnovna tranzicija koja uključuje kvarkove i gluone i tipično se odvija na kratkim vremenskim skalama. Na primjeru anihilacije elektrona i pozitrona u hadrone to je konverzija virtualnog fotona u par kvark-antikvark. U drugoj fazi se kvarkovi i gluoni materijaliziraju u hadrone i to se tipično događa na puno većim vremenskim skalama od prve faze ako se naravno proces odvija na dovoljno velikim energijama. Prva vremenska skala je tipično reda veličine $1/Q$, a druga Q/Λ^2 , gdje je Q prijenos impulsa, a Λ parametar skale QCD-ja (energija ispod koje je QCD neperturbativan). Dok nastupi druga faza originalni kvarkovi su već daleko jedan od drugog i može se reći da je udarni presjek "određen" u prvoj fazi. Stoga se može smatrati da će udarni presjek izračunat perturbativno u slici kvarkova i gluona aproksimativno odgovarati izmjerenom. Za takve procese možemo reći da će vrijediti kvark-hadron dualnost.

Problem nastaje na pragovima energija za stvaranje određenog para kvark-antikvark i njihovih pobuđenih stanja. Tada se više ne može koristiti pojednostavljenje da su dvije faze nezavisne jer nastali kvark i antikvark nemaju dovoljno kinetičke energije da bi se udaljili dovoljno brzo jedan od drugog, pa se dvije faze miješaju. Dolazi do

formiranja vezanog stanja nastalog para kvark-antikvark koje ne možemo računati perturbativnim QCD računom. Kako je to stanje gotovo "on-shell" ono se propagira veoma dugo u vremenu i zbog toga dolazi do oštih vrhova u udarnom presjeku na tim energijama te se takve pojave zovu *rezonance*. Primjer na udarnom presjeku anihilacije elektrona i pozitrona u hadrone pokazan je na slici 1 i jasno je vidljivo rezonantno ponašanje u blizini pragova energija za stvaranje određenih parova kvark-antikvark (čestice J/ψ , ψ' , itd.).

Dakle kako nije moguće udarni presjek računati perturbativnim QCD-jem u blizini rezonanci on se prvo izračunava za velike negativne prijenose impulsa $q^2 = -Q^2 < 0$ gdje smo sigurni da će virtualne čestice biti veoma "off-shell" i neće biti rezonanci. To područje se zove *Euklidska domena*. Treba napomenuti da je u procesima kao što je anihilacija elektrona i pozitrona u hadrone to područje prijenosa impulsa nefizikalno. No, kako će biti pokazano u idućem odjeljku, svejedno možemo napraviti račun u tom području i potom analitički proširiti rješenje na traženo područje pozitivnih prijenosa impulsa $q^2 > 0$ (*Minkowski domena*). Međutim, perturbativnim računom i analitičkim proširivanjem dobivamo glatku funkciju pa još uvijek ne možemo reproducirati oštre rezonance. Takva odstupanja moguće je opisati samo pomoću nekakvih modela te će jedna klasa takvih modela biti spomenuta u trećem odjeljku.



Slika 1: Omjer R_μ udarnog presjeka anihilacije elektrona i pozitrona u hadrone i anihilacije elektrona i pozitrona u par mion-antimion. Vidi se da omjer pokazuje istaknuto rezonantno ponašanje

Kvark-hadron dualnost predstavljena je prvi put 1976. u članku Poggia, Quinna i Weinberga [1]. Oni u tom članku tvrde da ako se mjereni udarni presjeci pravilno

* lovre.pavicic@gmail.com

usrednje preko nekog raspona energija će oni aproksimativno odgovarati teoretski izračunatim veličinama. To jest, ako udarni presjek usrednjimo preko rezonanci dobivena glatka funkcija će odgovarati onome što izračunamo pomoću kvarkova i gluona. Takva formulacija je doduše bila relativno nejasna. Neka od osnovnih pitanja nisu bila razjašnjena, npr. koliko energija mora biti velika da bi vrijedila kvark-hadron dualnost, mogu li se procijeniti devijacije od dualnosti i kako, trebaju li se uključivati poznati neperturbativni efekti i slično. S obzirom na to da su eksperimentalni podaci za tvrde procese (proces na visokim energijama na kojima je QCD perturbativan) tada bili dosta skromni teorija formulirana na navedeni način je dovoljno dobro opisivala eksperimente te dugo nije bilo većih pomaka po pitanju kvark-hadron dualnosti.

Ovako definirana dualnost u kojoj se veličine usrednjavaju se naziva *globalna kvark-hadron dualnost*, dok dualnost u kojoj se ne uspoređuju usrednjene veličine nego se one uspoređuju po točkama se zove *lokalna kvark-hadron dualnost*.

U nastavku seminara će na primjeru udarnog presjeka u anihilaciji elektrona i pozitrona u hadrone biti predstavljen formalizam kvark-hadron dualnosti baziran na Wilsonovom razvoju produkta operatora (eng. Wilson's operator product expansion - OPE) [2], [3]. Dakle ukratko će biti predstavljen Wilsonov OPE, potom će s njime biti izračunat udarni presjek duboko u Euklidskoj domeni i onda će on biti analitički proširen na Minkowski domenu [4]. Na kraju će biti objašnjeno zbog čega dolazi do narušenja dualnosti te će biti ukratko predstavljena jedna klasa modela narušenja dualnosti bazirana na tzv. instantonima.

II. OPE NA PRIMJERU ELEKTRON POZITRON ANIHILACIJE

U ovom odjeljku će biti demonstriran Wilsonov OPE na kojem je temeljena kvark-hadron dualnost na primjeru anihilacije elektrona i pozitrona u hadrone. Iako svaki zasebni proces ima svoje specifičnosti po pitanju kvark-hadron dualnosti generalna ideja prezentirana ovdje može se lako primjeniti i na druge procese.

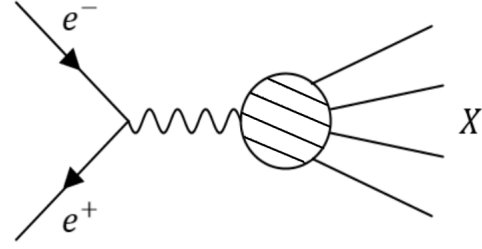
Promatramo dakle proces $e^+e^- \rightarrow X$ (X je neko bilo koje konačno hadronsko stanje) prikazan na slici 2 te tražimo $\sigma(e^+e^- \rightarrow X)$. Da bi pojednostavnili situaciju koristimo *optički teorem* koji u općenitoj formi glasi:

$$2 \operatorname{Im}(\mathcal{M}(a \rightarrow b)) = \sum_f \int d\Pi_f \mathcal{M}^*(b \rightarrow f) \mathcal{M}(a \rightarrow f) \quad (1)$$

gdje su a i b bilo koja ulazna/izlazna stanja, a na desnoj strani sumiramo po svim mogućim stanjima f nekog potpunog skupa i integriramo po elementima Lorentz invarijantnog faznog prostora $d\Pi_f$.

Ako se u jednadžbu (1) uvrsti da su a i b isto dvočestično stanje imamo posebno jednostavan slučaj:

$$\operatorname{Im}(\mathcal{M}(a \rightarrow a)) = 2E_{cm} p_{cm} \sigma_{tot}(a \rightarrow \text{bilo što}). \quad (2)$$



Slika 2: Anihilacija elektrona i pozitrona u hadrone

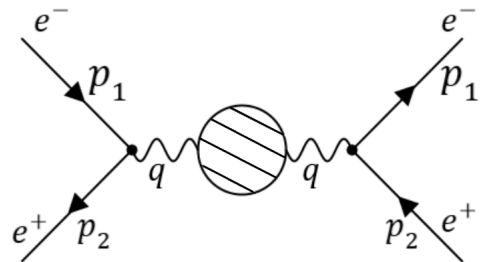
Iskorištena je općenita formula za udarni presjek:

$$\begin{aligned} \sigma_f &= \frac{1}{4E_1 E_2 |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|} \int d\Pi_f |\mathcal{M}(a \rightarrow f)|^2 \\ &= \frac{1}{4(E_1 + E_2) |\vec{p}|} \int d\Pi_f |\mathcal{M}(a \rightarrow f)|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

gdje je drugi red izvrijednjen u sustavu centra impulsa. Ako se uzme u obzir da je $E_1 + E_2 \equiv E_{cm}$, $|\vec{p}| \equiv p_{cm}$ i $\sum_f \sigma_f = \sigma_{tot}$ dobije se jednadžba (2). Sada se uvrste konkretne varijable za naš proces - stanje a su elektron i pozitron (jedan je stanje 1, a drugi stanje 2), a stanja f su sva moguća hadronska stanja. Ako još uzmemo u obzir da se proces odvija na visokoj energiji možemo za elektron aproksimirati da je bezmasen i onda imamo

$$\sigma_{tot}(e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}) = \frac{1}{s} \operatorname{Im}(\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+)) \quad (4)$$

gdje je uzeto $E_{cm} \approx \sqrt{s}$ i $p_{cm} \approx \sqrt{s}/2$. Vidimo da na kraju imamo relativno jednostavan izraz za ukupni udarni presjek anihilacije elektrona i pozitrona u hadrone. Treba samo izračunati matrični element raspršenja $e^-e^+ \rightarrow e^-e^+$, no treba uzeti u obzir sve hadronske korekcije fotonskog propagatora, kao što je prikazano na slici 3.



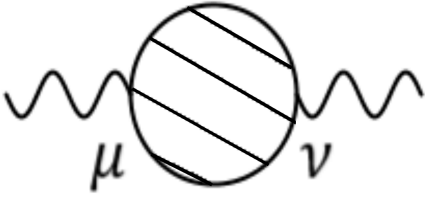
Slika 3: Dijagrami čiji imaginarni dio doprinosi udarnom presjeku procesa $e^-e^+ \rightarrow \text{hadroni}$

Taj matrični element računamo po Feynmanovim pra-

vilima;

$$i\mathcal{M}(e^-e^+ \rightarrow e^-e^+) = (-ie)^2 \bar{u}(s_1, p_1) \gamma_\mu v(s_2, p_2) \frac{-i}{s} \times \\ \times (i\Pi_h^{\mu\nu}(q)) \frac{-i}{s} \bar{v}(s_2, p_2) \gamma_\nu u(s_1, p_1) \quad (5)$$

gdje $\Pi_h^{\mu\nu}$ predstavlja središnji dio dijagrama, tj. hadronski dio vakuumske polarizacije (slika 4), a q je prijenos impulsa $q = p_1 + p_2$. Treba primjetiti da smo uzeli isti spin i impuls za ulazno i izlazno stanje. To je zato što je po optičkom teoremu specificirano da to trebaju biti ista stanja pa tako trebaju imati i iste impulse i spinove.



Slika 4: Dijagram hadronskog dijela vakuumske polarizacije

Vakuumska polarizacija treba zadovoljavati *Wardov identitet*:

$$q_\mu \Pi_h^{\mu\nu} = 0 \quad (6)$$

i stoga funkcija $\Pi_h^{\mu\nu}$ može imati samo idući oblik

$$\Pi_h^{\mu\nu} = (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \Pi_h(q^2). \quad (7)$$

Izraz (7) se uvrštava u jednadžbu (5) i potom cijeli izraz usrednjavamo po ulaznim spinovima pa imamo

$$\mathcal{M} = \frac{e^2}{s^2} \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2} \bar{u}(s_1, p_1) \gamma_\mu v(s_2, p_2) (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \times \\ \times \bar{v}(s_2, p_2) \gamma_\nu u(s_1, p_1) \Pi_h(q^2). \quad (8)$$

Računamo prvo član uz $g^{\mu\nu}$:

$$\sum_{s_1, s_2} \bar{u}(s_1, p_1) \gamma_\mu v(s_2, p_2) \bar{v}(s_2, p_2) \gamma^\mu u(s_1, p_1) q^2 = \\ = \text{Tr}(p_1^\mu \gamma^\mu p_2^\nu \gamma_\nu) s \\ = -2 \text{Tr}(p_1^\mu p_2^\nu \gamma_\mu \gamma_\nu) s \\ = -8(p_1 p_2) s \\ \approx -4s^2 \quad (9)$$

gdje su korišteni standardni identiteti za gama matrice te aproksimacija da su elektron i pozitron bezmaseni. Član

uz $q^\mu q^\nu$ iščezava što se lako pokaže;

$$\sum_{s_1, s_2} \bar{u}(s_1, p_1) \not{q} v(s_2, p_2) \bar{v}(s_2, p_2) \not{q} u(s_1, p_1) q^2 = \\ = \text{Tr}(p_1 \not{q} p_2 \not{q}) \\ = 4((p_1 q)(p_2 q) - (p_1 p_2) q^2 + (p_1 q)(p_2 q)) \quad (10) \\ \approx 4\left(\frac{s}{2} \frac{s}{2} - \frac{s}{2} s + \frac{s}{2} \frac{s}{2}\right) \\ = 0.$$

Kad se to sve uvrsti natrag u jednadžbu (8) pa to opet u jednadžbu (4) imamo

$$\sigma_{tot} = -\frac{4\pi\alpha}{s} \text{Im}(\Pi_h(s)) \quad (11)$$

gdje je korišteno $\alpha = e^2/4\pi$. Sada ostaje samo računati funkciju $\Pi_h(s)$.

Funkcija $\Pi_h^{\mu\nu}$ se može zapisati na način

$$i\Pi_h^{\mu\nu}(q) = -e^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle \Omega | T \{ J^\mu(x) J^\nu(0) \} | \Omega \rangle. \quad (12)$$

$|\Omega\rangle$ je vakuum (ne slobodni vakuum, već "pravi", tj. osnovno stanje u teoriji s međudjelovanjema), T označava vremenski uređen produkt, a J^μ je elektromagnetska struja

$$J^\mu = \sum_f Q_f \bar{q}_f \gamma^\mu q_f \quad (13)$$

gdje imamo sumu po okusima kvarkova. Taj produkt dviju struja računamo putem *Wilsonovog OPE*. Wilson je predložio da se svaki produkt operatora $O_1(x)O_2(0)$ u granici $x \rightarrow 0$ može razviti kao linearna kombinacija svih mogućih lokalnih operatora:

$$T(O_1(x)O_2(0)) \rightarrow \sum_n C_{12}^n(x) : O_n(0) : \quad (14)$$

gdje je $::$ normalno uređenje (od sad se neće pisati $::$ nego će se podrazumjevati da su svi operatori normalno uređeni). Produkt $O_1(x)O_2(0)$ je potencijalno singularan u $x \rightarrow 0$ i ovakvim razvojem smo singularitete u $x = 0$ strpali u koeficijente $C_{12}(x)$. Praktički smo razvili funkciju oko singulariteta u nuli. Taj razvoj možemo primjeniti i na našu polarizaciju vakuuma (12) pa imamo:

$$J^\mu(x) J^\nu(0) \rightarrow C_1^{\mu\nu}(x) \mathbf{1} + C_{\bar{q}q}^{\mu\nu}(x) \cdot m \bar{q} q(0) + \\ + C_{G^2}^{\mu\nu}(x) \cdot G_{\alpha\beta}^a G^{a\alpha\beta}(0) + \dots \quad (15)$$

S obzirom da uzimamo na kraju vakuumsku očekivanu vrijednost produkta struja u gornjem razvoju je bilo dovoljno uzeti doprinose od baždarno invarijantnih Lorentzovih skalara. Prvi takav operator je jedinična matrica $\mathbf{1}$, drugi je polje kvark-antikvark $\bar{q}q(0)$ (u kojem smo eksplicitno izvukli masu), treći je gluonsko polje $G_{\alpha\beta}^a G^{a\alpha\beta}(0)$ ($G_{\alpha\beta}^a = \partial_\alpha A_\beta^a - \partial_\beta A_\alpha^a + f_{abc} A_\alpha^b A_\beta^c$, A_α^a - gluonsko

baždarno polje), i tako dalje u beskonačnost. Dimenzija lijeve strane jednadžbe je x^{-6} i stoga zaključujemo da je $C_1^{\mu\nu}(x) \sim x^{-6}$, $C_{\bar{q}q}^{\mu\nu}(x) \sim x^{-2}$, $C_{G^2}^{\mu\nu}(x) \sim x^{-2}$ itd. Vidimo da su viši redovi sve manje i manje singularni u $x \rightarrow 0$.

Za izračunati funkciju $\Pi_h^{\mu\nu}(q)$ treba nam Fourierov transformat jednadžbe (15). Ako pretpostavimo da u produktu struja stvarno dominiraju singulariteti u $x \rightarrow 0$ onda ukupni Fourierov transformat možemo računati tako da računamo Fourierov transformat svakog pojedinih koeficijenta $C_i^{\mu\nu}(x)$. Ako još iskoristimo isti argument kao za jednadžbu (7) onda imamo

$$-e^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} T\{J^\mu(x)J^\nu(0)\} = -ie^2(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu) \times \\ \times (c_1(q^2) \cdot \mathbf{1} + c_{\bar{q}q} \cdot m\bar{q}q(0) + c_{G^2} \cdot G_{\alpha\beta}^a G^{a\alpha\beta}(0) + \dots) \quad (16)$$

gdje su koeficijenti c_i sada kompleksni Lorentzovi skalari. Dimenzionalnom analizom vidimo da $c_1 \sim (q^2)^0$, $c_{\bar{q}q} \sim (q^2)^{-2}$, $c_{G^2} \sim (q^2)^{-2}$. Što je red u razvoju viši to je potisnutiji s velikim prijenosom momenta q^2 .

Kada se uzme vakuumska očekivana vrijednost na desnoj strani se dobivaju članovi tipa $\langle \Omega | \bar{q}q(0) | \Omega \rangle$, $\langle \Omega | G_{\alpha\beta}^a G^{a\alpha\beta}(0) | \Omega \rangle$ itd. i to se zovu kondenzati. Oni su neperturbativni te se za njih ili uzima eksperimentalna vrijednost ili ih se računa numeričkim metodama.

Koeficijente c_i računamo perturbativno putem Feynmanovih dijagrama jer računamo da smo sve mekane (niskoenergetske neperturbativne) doprinose iz njih potrpali u kondenzate. Iako koeficijenti c_i nisu još skroz slobodni od neperturbativnih doprinosa, pretpostavljamo da ipak možemo bar u prvoj aproksimaciji ih računati perturbativnim razvojem po α_s .

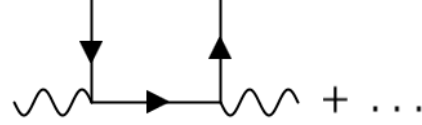
Slikovito, možemo shvatiti da koeficijente računamo putem Feynmanovih dijagrama kao na slici 5. Koeficijenti c_i se računaju tako da se izraz (16) "uklješćuje" između slobodnih stanja. Koeficijent c_1 se računa tako da se izraz (16) stavi između dva slobodna vakuuma $|0\rangle$. Na desnoj strani propadnu svi članovi osim člana što stoji uz jediničnu matricu (jer su članovi $\langle 0 | m\bar{q}q | 0 \rangle = 0$, $\langle 0 | G_{\alpha\beta}^a G^{a\alpha\beta}(0) | 0 \rangle$, itd.). Na lijevoj strani imamo

$$-e^2 \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle 0 | T\{J^\mu(x)J^\nu(0)\} | 0 \rangle \quad (17)$$

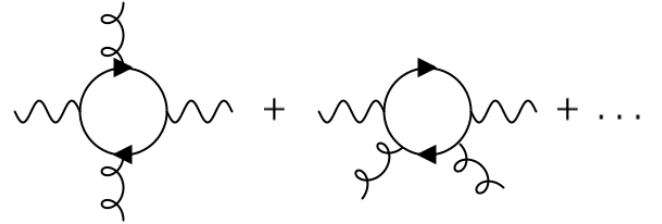
što nam je upravo samo fotonski propagator (sa svim korekcijama). Stoga se član c_1 računa iz Feynmanovih dijagrama kao na slici 5a gdje imamo samo dvije ulazne fotonske linije. Idući član se računa tako da se izraz (16) uklješti između jednočestičnih kvarkovskih stanja $|q\rangle$ i $|\bar{q}\rangle$ (ili obrnuto). Na desnoj strani ostaje samo $c_{\bar{q}q}$. Na lijevoj strani imamo isto što i prije samo trebamo dodati dva vanjska stanja - jedan ulazni kvark zbog $|q\rangle$ i jedan izlazni antikvark zbog $|\bar{q}\rangle$ (treba i obrnuti slučaj uzeti u obzir). Stoga se koeficijent $c_{\bar{q}q}$ računa iz feynmanovih dijagrama kao na slici 5b gdje osim dvije vanjske fotonske struje imamo i dvije vanjske fermionske noge. Analogno član c_{G^2} računamo iz Feynmanovih dijagrama s dvije gluonske vanjske noge, itd.



(a) Dijagrami za koeficijent c_1



(b) Dijagrami za koeficijent $c_{\bar{q}q}$



(c) Dijagrami za koeficijent c_{G^2}

Slika 5: Feynmanovi dijagrami za koeficijente u Wilsonovom OPE

Kombinirajući jednadžbu (16) s jednadžbom (5) imamo na kraju

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadroni}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} (\text{Im } c_1(q^2) + \\ + \text{Im } c_{\bar{q}q}(q^2) \langle \Omega | m\bar{q}q | \Omega \rangle + \\ + \text{Im } c_{G^2}(q^2) \langle \Omega | (G_{\alpha\beta}^a)^2 | \Omega \rangle + \dots). \quad (18)$$

Ako se zadržimo samo na nultoj korekciji prvog člana imamo samo dijagram kakav je na slici 6. Rezultat za takav dijagram dobro je poznat iz teorije polja i ovdje je naveden samo konačan rezultat:

$$c_1(q^2) = \left(3 \sum_f Q_f^2\right) \cdot \frac{1}{3\pi} \ln(-q^2). \quad (19)$$

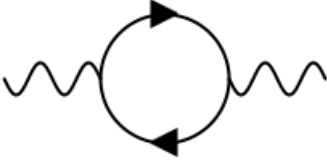
Da bi izračunali vrijednost logaritma koristimo jednadžbu za glavnu vrijednost logaritma općenitog kompleksnog broja

$$\ln(z) = \ln(|z|) + i \arg(z). \quad (20)$$

Vidimo da je imaginarni dio logaritma jednak argumentu broja pod njim. U jednadžbi (19) pod logaritmom imamo negativan realan broj, a njegov argument je jednak π . Kad se uvrsti sve to u jednadžbu za ukupni udarni presjek imamo dobro poznat rezultat koji se dobije računom "tree-level" dijagrama anihilacije elektrona

i pozitrona u hadrone:

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadroni}) = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \sum_f Q_f^2. \quad (21)$$



Slika 6: Nulta korekcija prvog člana u Wilsonovom OPE

U računu za jednadžbu (21) smo koristili pretpostavku da možemo koristiti perturbativni QCD. Međutim to i nije sasvim točno jer je za vremenolike impulse q očekivana vrijednost produkta struja dominirana međustanjima u kojima ima i fizikalnih hadrona. Kako je njihova energija skoro "on-shell" oni se propagiraju dosta daleko i razvoj po $x \rightarrow 0$ za njih nije sasvim dobar. Kako su zapravo vremenoliki impulsi oni koji su zapravo fizikalni, znači da nam treba funkcija $\Pi_h(q^2)$ u području gdje ne možemo primjenjivati perturbativni QCD. Ono što možemo jest izračunati $\Pi_h(q^2)$ duboko u Euklidskoj domeni, tj. za velike prostornolike impulse q . Tada će sva međustanja koja ulaze u račun produkta struja biti veoma "off-shell". Takva stanja se ne propagiraju daleko pa se za njih može koristiti razvoj za $x \rightarrow 0$. Dakle područje u kojem možemo računati udarni presjek perturbacijom kvarkovskih i gluonskih polja je područje $q^2 = s < 0$, što je nefizikalno za proces koji promatramo (ulazna energija ne može biti negativna).

Čini se da je naša analiza beskorisna, no ono što možemo jest izračunati udarni presjek za nefizikalne prostornolike impulse i onda ga analitički proširiti na područje fizikalnih vremenolikih impulsa.

Funkcija $\Pi_h^{\mu\nu}(q)$ je korelacijska funkcija između dvije točke i kao takva ima tzv. Källén-Lehmannovu spektralnu dekompoziciju. Ona nam kaže da će ta funkcija u kompleksnoj ravnini imati rez na x-osi od neke točke te da će njen diskontinuitet preko reza biti jednak $2i \cdot \text{Im}(\Pi_h^{\mu\nu}(q))$. Od sad ćemo promatrati skalarni dio $\Pi_h(q^2)$ za koji vrijedi isto to. Sada uzmimo točku $q^2 = -Q_0^2$ koja je dovoljno duboko u Euklidskoj domeni da možemo računati Fourierov transformat produkta struja putem OPE te promotrimo integral

$$I_n = -4\pi\alpha \oint_C \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2 + Q_0^2)^{n+1}} \Pi_h(q^2) \quad (22)$$

gdje je C neka krivulja koja obuhvaća točku Q_0^2 (slika 7), a $n \geq 1$. Iz kompleksne analize znamo da je taj integral

jednak

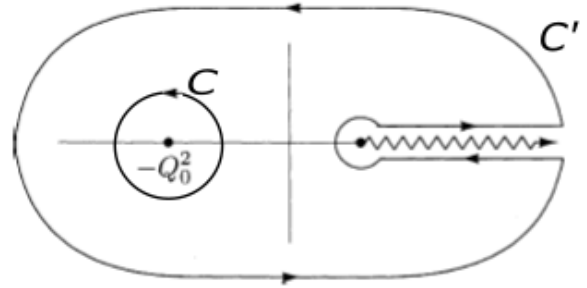
$$I_n = -4\pi\alpha \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d(q^2)^n} \Pi_h \Big|_{q^2 = -Q_0^2} \quad (23)$$

što se može izračunati putem OPE. Sada opet promotrimo integral u jednadžbi (22) samo sada krivulju integracije izobličimo u krivulju C' kao što je prikazano na slici 7. Integral po vanjskom dijelu krivulje iščezava kad joj radijus puštamo u beskonačnost što se može vidjeti po tome što ni jedan član u razvoju funkcije $\Pi_h(q^2)$ ne raste brže od $(q^2)^0$, a u nazivniku imamo bar $(q^2)^2$. Ostaje integral po x-osi od 0 do beskonačno s gornje strane reza i od beskonačno do 0 s donje strane reza pa imamo

$$I_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_0^\infty \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2 + i\epsilon + Q_0^2)^{n+1}} \Pi_h(q^2 + i\epsilon) - \int_0^\infty \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2 - i\epsilon + Q_0^2)^{n+1}} \Pi_h(q^2 - i\epsilon) \right). \quad (24)$$

Razlomak ima lijepo ponašanje za limes kad $\epsilon \rightarrow 0$ i on je jednostavno jednak $q/(q^2 + Q_0^2)^{n+1}$ za oba limesa pa ga možemo izlučiti. Π_h s druge strane ima diskontinuitet preko reza pa ova dva limesa nisu jednaka, već vrijedi $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\Pi_h(q^2 + i\epsilon) - \Pi_h(q^2 - i\epsilon)) = \text{Disc}(\Pi_h(q^2))$. Koristeći činjenicu da je diskontinuitet jednak $2i \cdot \text{Im}(\Pi_h^{\mu\nu}(q))$ imamo konačno

$$I_n = -4\pi\alpha \int_0^\infty \frac{dq^2}{2\pi i} \frac{1}{(q^2 + Q_0^2)^{n+1}} \cdot 2i \text{Im} \Pi_h(q^2) \\ = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{s}{(s + Q_0^2)^{n+1}} \sigma(s). \quad (25)$$



Slika 7: Prikaz integrala iz jednadžbe 22

Na kraju imamo set integralnih jednadžbi

$$-4\pi\alpha \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d(q^2)^n} \Pi_h \Big|_{q^2 = -Q_0^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty ds \frac{s}{(s + Q_0^2)^{n+1}} \sigma(s) \quad (26)$$

te vidimo da smo s njima povezali korelacijsku funkciju Π_h izračunatu duboko u Euklidskoj domeni s fizikalnim udarnim presjecima. Ove relacije su još poznate pod nazivom *ITEP sumacijska pravila*.

III. KVARK-HADRON DUALNOST I NJENA NARUŠENJA

Sada kada smo objasnili što znači OPE možemo malo pobliže definirati kvark-hadron dualnost. Recimo da smo navedenim postupkom izračunali Π_h do reda α_s^2 , a članove uz α_s^3 smo odbacili. Onda očekujemo da naš izračunati Π_h odgovara izmjerenom do na nesigurnost od $O(\alpha_s(s)^3)$. Ako teoretska vrijednost odgovara izmjerenoj do na tu nesigurnost onda kažemo da je kvark-gluonska predikcija dualna hadronskoj vrijednosti. Ako postoje odstupanja van prirodne nesigurnosti onda to zovemo *narušenje dualnosti*.

U uvodu je već objašnjeno da do narušenja dualnosti dolazi blizu rezonanci, a sada ćemo malo formalnije objasniti njihov uzrok. Stvar je u tome da je veličine poput Π_h nemoguće izračunati potpuno egzaktno. Prvo, nemoguće je s tehničke strane izračunati sve članove u redu po α_s za koeficijente u OPE, a kamoli još i beskonačan red kondenzata. No čak i da možemo teoretski izračunati baš bilo koju korekciju opet taj red moramo negdje odrezati jer u konačnici on divergira (jer broj dijagrama raste faktorijalno, a red opada kao potencija konstante vezanja α^n pa u jednom trenutku potencija više ne može potisnuti faktorijalni rast). Tako da najbolje što možemo jest odrezati red na nekoj optimalnoj vrijednosti. Kada bi smo mogli izračunati taj red potpuno egzaktno potrebe za pojmom kvark-hadron dualnost ne bi ni bilo.

Do narušenja dualnosti dolazi zbog činjenice da neki članovi koje smo zanemarili (opravdano) pri računu u dubokoj Euklidskoj domeni se mogu povećati pri analitičkom proširenju na Minkowski domenu. Stvar je u tome da ne možemo znati točno koji članovi koje smo odrezali će kako pridonositi udarnom presjeku u konačnici (jer kad bi znali, mogli bi ih izdvojiti iz odrezanog dijela i uključiti ih "ručno" u izračun i problema ne bi bilo). Prilikom računanja s OPE opisali smo dobro sve singularitete u $x^2 \rightarrow 0$, no naša funkcija može imati i druge singularitete kao npr. $1/(x^2 + \rho^2)$. Fourierov transformat takvih singulariteta u Euklidskoj domeni opada kao eksponencijala $\exp(-Q\rho)$. Takve članove u OPE praktički i ne vidimo jer su eksponencijalno potisnuti te ih je opravdano zanemariti. No u Minkowski domeni je situacija da $Q \rightarrow iE$ pa ti eksponencijalno trnući članovi postaju oscilatorni. OPE zapravo uopće ne bi mogao ni približno reproducirati eksperimentalne rezultate da oscilirajući faktori nisu potisnuti prefaktorom koji je negativna potencija energije $E^{-\kappa} \sin(-E\rho)$. Također, postoje singulariteti i u $x^2 \rightarrow \infty$ te u Minkowski domeni oni uzrokuju oscilacijske funkcije tipa $E^{-\eta} \sin(-E^2\rho^2)$.

Dakle narušenja dualnosti parametriziraju naše neznanje o odbaćenim članovima u redu kondenzata i redu za koeficijente. Stoga je po samoj prirodi problema nemoguće izgraditi pravu teoriju narušenja dualnosti iz nekakvih prvih principa. Preostaje nam samo tretirati

narušenja u raznim modelima s različitim stupnjevima pouzdanosti i fundamentalnosti. Dakako oni trebaju imati neku fizikalnu interpretaciju te trebaju biti testirani na eksperimentalnim podacima.

Jedna od klasa modela jesu modeli bazirani na *instantonima* (klasična rješenja jednadžbi gibanja u kvantnoj teoriji polja). Promotrimo prvo situaciju na dijagramu na drugoj slici u 5a. Pri izračunu te petlje pojavljuje se integral koji ide po svim mogućim impulsima gluona koji se propagira između dvije fermionske linije. Kako ide po svim mogućim tako ide i po onim impulsima za koje QCD nije perturbativan (označimo s μ impuls ispod kojeg QCD nije perturbativan). Za $k < \mu$ moramo prerezati tu gluonsku liniju i to onda odgovara članu pri gluonskom kondenzatu koji je na prvoj slici u 5c. Time zapravo dijelom dolazi do dvostrukog brojanja tih doprinosa no kako ionako najveći doprinos integralu dolazi od perturbativnog dijela to i ne čini neku razliku. Problem dolazi kod visokih korekcija, tj. u dijagramima s veoma puno gluonskih linija. U takvim dijagramima gotovo ni jedna gluonska linija neće nositi veliki impuls. U tim slučajevima je bolje govoriti da se impuls q ulaznog fotona prenosi do izlaznog preko koherentnih fluktuacija mekanog polja, umjesto da govorimo o odvojenim linijama u Feynmanovom dijagramu. Taj mehanizam je očito povezan s visokim članovima u redu kondenzata i kao takvog smo ga odsjekli. Može se pokazati da se taj mehanizam može opisati s tzv. pozadinskim poljem instantona fiksne veličine ρ i da takav model zapravo reproducira singularitete u $x^2 \rightarrow \rho^2$ i time oscilatorno ponašanje u Minkowski domeni. Instantoni nisu jedini ni dominantni neperturbativni doprinos, no kako znamo da smo navedeni mehanizam odsjekli u redu kondenzata i znamo da time možemo dobiti oscilatorno ponašanje zgodno je od njih krenuti pri modeliranju narušenja dualnosti.

IV. ZAKLJUČAK

U seminaru je opisana kvark-hadron dualnost kao način da se povežu teorijske izračunate vrijednosti fizikalnih veličina u slici kvarkova i gluona te vrijednosti koje su mjerene u eksperimentima u kojima se opserviraju hadroni. Formulacija kvark-hadron dualnosti bazirana je na Wilsonovom OPE koji je opisan u odjeljku II. OPE je izložen na primjeru udarnog presjeka anihilacije elektrona i pozitrona u hadrone kao najreprezentativnijeg QCD procesa. Nakon što je uveden OPE izložena je formalna definicija kvark-hadron dualnosti u odjeljku III. Opisani su problemi s dualnosti i zašto nužno na nekim mjestima (najviše na rezonancama) dolazi do odstupanja od nje, tj. narušenja dualnosti. Na kraju je uvedena ukratko jedna klasa modela bazirana na instantonima kojom se mogu opisati narušenja dualnosti.

-
- [1] E.C. Poggio, H.R. Quinn and S. Weinberg, Phys. Rev. D 13, 1958 (1976).
- [2] M. Shifman, *Lectures on quark-hadron duality*, Czech.J.Phys. 52 B102-B135 (2002).
- [3] I. Bigi, N. Uraltsev, *A vademecum on quark-hadron duality*, Int.J.Mod.Phys.A 16 5201-5248 (2001).
- [4] M. Peskin, D. Schroeder, *An Introduction to quantum field theory* (Westview Press, 1995.).