

Kvazinormalni modovi crnih rupa

Lovro Dulibić*, mentor: izv. prof. Ivica Smolić
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu
(Dated: 23. siječnja 2022.)

Budući da se horizont crnih rupa ponaša kao jednosmjerna ulica, crne rupe su disipativni sustavi kojima gravitacijski valovi odvođe energiju. Za takve sustave možemo definirati svojstvene modove titranja koje zovemo kvazinormalni modovi. Od velikog su značaja za fiziku gravitacijskih valova jer ne ovise o perturbaciji koja ih je stvorila, već isključivo o svojstvima samih crnih rupa. Predmet ovoga rada su kvazinormalni modovi skalarnog perturbacije Schwarzschildove crne rupe. Izvedena je jednačba gibanja skalarnog polja u Schwarzschildovom prostorvremenu te su njezina rješenja analitički produljena na kompleksnu ravninu. Iskorištavanjem analitičkih svojstva rješenja izračunata je njihova monodromija kako bi se u konačnici odredili kvazinormalni modovi.

I. UVOD

Einsteinova opća teorija relativnosti najpreciznija je teorija gravitacije koju znamo. Brojna svojstva svemira predviđena Einsteinovim jednačbama se i dan danas, čak stotinjak godina kasnije, potvrđuju novim eksperimentima. Primjerice, prvu ‘fotografiju’ crne rupe napravio je Event Horizon Telescope tek 2019. godine, dok su gravitacijski valovi prvi puta izmjereni, također nedavne, 2015. godine.

Iako je Einstein svoje jednačbe napisao davne 1915. godine i dalje su predmet istraživanja od velikog teorijskog i eksperimentalnog značaja. Konkretno, nedavno uspješna potraga za gravitacijskim valovima otvorila je novi svijet eksperimentalne fizike te budući veliki eksperimentalni projekti koji su nekada bili samo daleki planovi postaju stvarnost. U ovome radu poblize ćemo se baviti kvazinormalnim modovima crnih rupa. Oni su svojevrsni analogoni normalnim modovima, ali za disipativne sustave, dakle svojstveni načini titranja polja u gravitacijskom polju crne rupe. Držat ćemo se jednostavnijeg slučaja i stoga pronaći kvazinormalne modove skalarnog polja u Schwarzschildovom prostorvremenu i time dobiti uvid u dinamiku polja u zakrivljenom prostoru.

A. Crne rupe i njihove perturbacije

Rješenja Einsteinovih jednačbi su metrike i one sadrže u sebi informaciju o zakrivljenosti prostorvremena koja je u konačnici zaslužna za ono što poznamo kao gravitaciju.

$$R_{\mu\nu} + \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (1)$$

Einsteinove jednačbe (1) ovdje su prikazane koristeći prirodne jedinice ($G = c = 1$) te su prirodne jedinice korištene kroz cijeli tekst.

S desne strane jednačbi (1) je tenzor energije i impulsa koji nosi informaciju o materiji i energiji sadržanoj

	Nerotirajuća	Rotirajuća
Nenabijena	Schwarzschild	Kerr
Nabijena	Reissner-Nordström	Kerr-Newman

Tablica I. Rješenja Einsteinovih jednačbi za odgovarajuće crne rupe.

u prostorvremenu, dakle metrika će ovisiti o količini i raspodjeli materije, što nije začuđujuće. Što je posebno zanimljivo kod rješenja Einsteinovih jednačbi je klasa rješenja koja odgovara crnim rupama. Dakle, metrike zakrivljenih prostorvremena čiji izvor zakrivljenosti su crne rupe, a ne materija.

Karl Schwarzschild je 1915., iste godine kada je Einstein objavio svoje jednačbe, pronašao prvo rješenje njegovih jednačbi koje odgovara nenabijenoj, nerotirajućoj, sfernosimetričnoj crnoj rupi. Ubrzo nakon, Reissner i Nordström su pronašli rješenje nabijene, nerotirajuće, sfernosimetrične crne rupe između 1916. i 1921. godine. Rješenja za rotirajuću pronašli su tek 60-tih godina prošlog stoljeća Kerr i Newman. U tablici I vidimo koja rješenja odgovaraju kojim crnim rupama.

Mi ćemo se usredotočiti na Schwarzschildovu crnu rupu i njezine kvazinormalne modove. Zanima nas kako će skalarno polje zatirati ako perturbiramo Schwarzschildovu crnu rupu na neki način, odnosno ako u jednom trenutku umjesto Schwarzschildove metrike $g_{\mu\nu}$ imamo $g_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, gdje je $h_{\mu\nu} \ll g_{\mu\nu}$. Jednačbu gibanja za samu metriku u ovom slučaju prilično je teško izvesti obzirom da se radi o tenzorskom polju, ali ne moramo promatrati metriku direktno. Možemo se usredotočiti na vektorska ili skalarna polja u Schwarzschildovom prostorvremenu. Time i dalje promatramo dinamiku proizašlu iz perturbacije crne rupe, ali ne direktno. Motivacija za takav pristup je drastično jednostavniji račun koji ne gubi bitne detalje. Zato ćemo se fokusirati na dinamiku skalarnog polja u Schwarzschildovom prostorvremenu. Točnije, tražit ćemo svojstvene modove titranja skalarnog polja nakon što se Schwarzschildovo prostorvrijeme perturbiralo i vratilo u prvobitno stanje.

* ldulibic.phy@pmf.hr

B. Klein-Gordonova jednadžba u Schwarzschildovom prostorvremenu

Brzinski pogled na dodatak A uvjerit će nas kako za skalarna polja ϕ vrijedi sljedeća relacija:

$$\square\phi = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu})\phi \quad (2)$$

Jednostavnosti radi, usredotočit ćemo se na *bezmasena* skalarna polja. Stoga, Klein-Gordonova jednadžba se svodi na $\square\phi = 0$. Drugim riječima, preostalo je samo raspisati (2). Očekujemo da će rješenje biti sferno simetrično, odnosno da će se jednadžba svesti na jednadžbu isključivo u radijalnoj koordinati, budući da je Schwarzschildovo prostorvrijeme sferno simetrično.

Prvi korak je raspisati d'Alambertov operator (2). Znamo da Schwarzschildovo rješenje izgleda kao:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2(\sin\theta d\theta^2 + d\varphi^2), \quad (3)$$

dakle, ako uzmemo da je $f(r) := \left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, raspis Klein-Gordonove jednadžbe glasi

$$\begin{aligned} 0 = \square\phi &= \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_t \left(r^2 \sin\theta \left(-\frac{1}{f(r)} \right) \partial_t \phi \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_r \left(r^2 \sin\theta f(r) \partial_r \phi \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\theta \left(r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2} \partial_\theta \phi \right) \\ &+ \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\varphi \left(r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \partial_\varphi \phi \right). \end{aligned} \quad (4)$$

Pretpostavimo rješenje sljedećeg oblika

$$\phi(t, r, \theta, \varphi) = e^{i\omega t} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l R_{lm}(r) P_{lm}(\theta) e^{-im\varphi}, \quad (5)$$

gdje je $R_{lm}(r) := u_{lm}(r)/r$. Stoga u jednadžbi (4) možemo pogledati samo kutni dio i prepoznati Legendrovu jednadžbu.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r^2 \sin\theta} \left[\partial_\theta \left(r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2} \partial_\theta \left(P_{lm}(\theta) e^{-im\varphi} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. + \partial_\varphi \left(r^2 \sin\theta \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_\varphi \left(P_{lm}(\theta) e^{-im\varphi} \right) \right) \right] = \\ &\frac{e^{-im\varphi}}{r^2} \left[\frac{1}{\sin\theta} \partial_\theta \left(\sin\theta \partial_\theta P_{lm}(\theta) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{\sin^2\theta} P_{lm}(\theta) \right] = -\frac{l(l+1)}{r^2} P_{lm}(\theta) \end{aligned} \quad (6)$$

Radijalni i vremenski dio onda glasi

$$\begin{aligned} &-\partial_t \left(\frac{1}{f(r)} \partial_t \left(R_{lm}(r) e^{i\omega t} \right) \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \partial_r \left(r^2 \sin\theta f(r) \partial_r \left(R_{lm}(r) e^{i\omega t} \right) \right) = \\ &e^{i\omega t} \left(\frac{\omega^2}{f(r)} + f(r) \partial_r^2 + \frac{2f(r)}{r} + f'(r) \right) R_{lm}(r). \end{aligned} \quad (7)$$

Kada skupimo sve, uvrstimo $R_{lm}(r) = u_{lm}(r)/r$ i množimo cijelu jednadžbu s $rf(r)$ dobivamo takozvanu Regge-Wheelerovu jednadžbu

$$\begin{aligned} &f^2(r) \frac{d^2\psi}{dr^2} + f(r)f'(r) \frac{d\psi}{dr} \\ &\quad + \left(\omega^2 - f(r) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{f'(r)}{r} \right) \right) \psi = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

gdje smo radi jednostavnosti uzeli $\psi(r) := u_{lm}(r)$. Ovu jednadžbu se rijetko viđa u tako kompliciranom obliku. Uvođenjem takozvane 'kornjačaste koordinate' (eng. *tortoise coordinate*)

$$\begin{aligned} \frac{dr_*}{dr} &= \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1}, \\ r_* &= r + 2M \ln \left(\frac{r}{2M} - 1 \right), \end{aligned} \quad (9)$$

razvlačimo fizikalni prostor $r \in \langle 2M, +\infty \rangle$ na $r_* \in \langle -\infty, +\infty \rangle$. Time dobivamo oblik, nalik Schrödingerovoj jednadžbi, u kojem se Regge-Wheelerova jednadžba najčešće viđa [1]

$$\frac{d^2\psi}{dr_*^2} + \left(\omega^2 - V(r(r_*)) \right) \psi = 0, \quad (10)$$

gdje je potencijal $V(r)$ sljedeći

$$V(r) = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \left(\frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} (1 - j^2) \right). \quad (11)$$

Iako smo izvod radili specijalno za skalarnu perturbaciju, ovdje smo poopćili potencijal za perturbaciju koja može biti skalarna ($j = 0$), elektromagnetska ($j = 1$) ili gravitacijska ($j = 2$). Naime, može se pokazati kako izvodi za druga dva slučaja, iako su daleko kompliciraniji, na kraju vode do ovog jednostavnijeg oblika [2].

Ovime je postavljena obična diferencijalna jednadžba drugog reda (10) čiji parametar ω tražimo. To ćemo postići promatrajući i iskorištavajući svojstva rješenja, a i same jednadžbe, produljenih u kompleksnu ravninu.

II. KVAZINORMALNI MODOVI

Prije nego krenemo sa samim izračunom bitno je definirati kvazinormalne modove i precizno odrediti koji ω odgovara kvazinormalnim modovima koje tražimo. Znamo da su to svojstveni modovi disipativnih sustava dakle ω koju tražimo zasigurno će biti kompleksna tako da rješenja trnu u vremenu.

Rubni uvjeti koje postavljamo u rješavanju (10) odgovaraju isključivo ulazećim valovima na horizontu te isključivo izlazećim valovima u beskonačnosti. Na tim rubovima jednadžba (10) svodi se na običnu valnu jednadžbu čija rješenja su ravni valovi jer, lako se vidi, $V(r) \rightarrow 0$ kada $r \rightarrow 2M$ ili $+\infty$, odnosno $V(r_*) \rightarrow 0$ kada $r_* \rightarrow \pm\infty$.

Stoga, uz $\omega = \omega_R + i\omega_I$ imamo sljedeća rješenja na granicama $r_* \rightarrow \pm\infty$

$$\begin{aligned} \psi &\propto e^{+i\omega r_*} \text{ kada } r_* \rightarrow -\infty, \\ \psi &\propto e^{-i\omega r_*} \text{ kada } r_* \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (12)$$

te ona odgovaraju isključivo ulazećim valovima na horizontu te isključivo izlazećim u beskonačnosti (sjetimo se (5) - vremenska ovisnost je $+i\omega t$).

Uz ovakvu definiciju vremenski dio će izgledati kao $\exp(i\omega_R t - \omega_I t)$, kako bi i trebao jer za $\omega_I > 0$ ta rješenja trnu s vremenom. Međutim, prostorna rješenja se ponašaju naizgled problematično. Ako zahtijevamo da rješenje trne s vremenom za zadani r_* , očito će divergirati za zadani t kada guramo $r_* \rightarrow \pm\infty$. Ovaj naizgled problematičan zaključak možemo pospremiti pod tepih argumentom da valovima treba beskonačno vremena da bi dosegli beskonačnost te bi u fizikalnoj situaciji trnuća eksponencijala od vremena kompenzirala za divergirajuću od prostora [1]. Detaljniju diskusiju može se naći u nedavnom revijalnom članku o kvazinormalnim modovima [3] te njegovim referencama. Identifikacija kvazinormalnih modova nije jednostavna, a rad s njima još i manje. Ovakvi problemi s divergencijama predstavljaju nemali tehnički izazov za numeričke račune. Množenje eksponencijalno velikih i eksponencijalno malih brojeva zahtijeva iznimnu količinu računalne preciznosti.

Kvazinormalne modove možemo također naći kao polove u Greenovoj funkciji. Naime, polovi Greenove funkcije vezane uz (10) odgovarat će nulama Wronskijana koje pak dobivamo zahtijevanjem rubnih uvjeta definiranih gore. Drugim riječima, Wronskijan će biti jednak nuli ako želimo isključivo ulazeće valove na horizontu i isključivo izlazeće u beskonačnosti. O diskusiji Greenovih funkcija vezanih za kvazinormalne modove više priča ju Frolov i Novikov [1], a vrijedi pogledati i pedagoški pristup koji je napravio Berti na jednostavnom primjeru [2].

III. IZRAČUN MONODROMIJA

Monodromija označava za koji faktor se kompleksna funkcija promijeni kada napravimo krug oko singulari-

teta. Po uzoru na Motl i Neitzke [4] prevest ćemo rubne uvjete u zahtjev na monodromiju i iz toga izvući izraz za ω .

A. Analitičko produljenje i rubni uvjeti

Ako napravimo produljenje u kompleksnu ravninu trebamo prepoznati moguće singularitete. Na horizontu ($r = 2M$) i u središtu crne rupe ($r = 0$) imamo regularne singularitete, dok u beskonačnosti ($r \rightarrow +\infty$) imamo neregularni singularitet. Singulariteti na horizontu i u središtu crne rupe bit će točke grananja iz kojih proizlaze rezovi koji su u konačnici zaslužni za monodromiju kompleksnih funkcija.

Rješenje (10) (sada produljeno na kompleksnu ravninu) gledamo blizu singulariteta na horizontu gdje znamo da će biti oblika $e^{i\omega r_*}$. Raspisano preko koordinate r imamo

$$e^{i\omega r_*} = e^{i\omega r + i\omega 2M \ln(\frac{r}{2M} - 1)} = \left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{2M\omega i} e^{i\omega r} \quad (13)$$

Sada ćemo napraviti krug oko tog singulariteta. Treba imati na umu kako zapravo promatramo rješenje (10) (koje je funkcija od r_*) kako se mijenja kruženjem oko singulariteta u r -ravnini. Znači zanima nas omjer

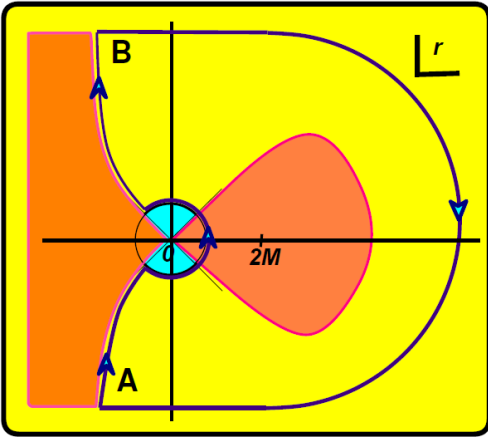
$$\frac{\psi(r_* (re^{-2\pi i}))}{\psi(r_*(r))} = \frac{\left(\frac{re^{-2\pi i}}{2M} - 1\right)^{2M\omega i}}{\left(\frac{r}{2M} - 1\right)^{2M\omega i}} = e^{2\pi\omega 2M} \quad (14)$$

Rezultat koji smo dobili govori da ako blizu horizonta imamo rješenje $e^{i\omega r_*}$ onda faktor koji rješenje dobije okruživanjem tog singulariteta po proizvoljnoj krivulji (u smjeru kazaljke na satu) mora biti $e^{2\pi\omega 2M}$. Ovo je snažan rezultat koji ćemo koristiti kasnije kako bismo našli jednadžbu za ω . Naime, uvjet (14) nam govori i koliko će monodromiju imati izlazeći ravni val. Ako vrijedi (14) onda za $e^{-i\omega r_*}$ moramo dobiti monodromiju $e^{-2\pi\omega 2M}$. Rubni uvjet isključivo ulazećih ravnih valova na horizontu preveli smo u zahtjev na monodromiju za izlazeće valove. Vidjet ćemo kasnije zašto nam je bitno da ga izrazimo baš za izlazeće valove.

Drugi rubni uvjet, koji brine da u beskonačnosti imamo samo izlazeće valove je nešto konceptualno teži za zahtijevati u kompleksnoj ravnini. Analitički produljujemo rješenje Wickovom rotacijom na pravac

$$\begin{aligned} 0 &= \text{Im}(\omega r_*) = \omega_I r_{*R} + \omega_R r_{*I}, \\ r_{*I} &= -\frac{\omega_I}{\omega_R} r_{*R}, \end{aligned} \quad (15)$$

jer duž tog pravca rješenja su isključivo oscilatorna i možemo izabrati točno ono koje želimo. Također, primijetimo da za $\omega_I \gg \omega_R$ ovaj pravac leži gotovo točno na imaginarnoj osi. Ovime smo fizikalni rubni uvjet za



Slika 1. [4] Kompleksna r -ravnina. Tamno područje označava $\text{Re}(r_*) < 0$. Linija pokazuje smjer duž kojega ćemo okružiti singularitet u $r = 2M$.

realni $r_* \rightarrow +\infty$ zarotirali u donju polovicu kompleksne ravnine (nagib pravca je negativan) gdje puštamo duž tog pravca $\omega r_* \rightarrow +\infty$.

Ova tehnika nije nešto što se susreće svaki dan, ali kako ćemo vidjeti pokazat će se prilično moćnom. Za one željne više tehničkog i općenitog pristupa monodromiji mogu pogledati [5].

B. Račun monodromije

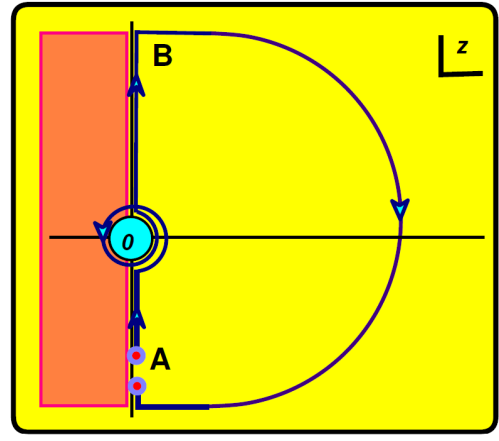
Račun ćemo raditi u još malo izmijenjenim koordinatama. Naime, singularitet na horizontu smo prelaškom na koordinatu (9) gurnuli u $r_* = -\infty$, a onaj u središtu crne rupe na $r_* = 2Mi\pi$. Sada želimo spustiti taj singularitet u nulu odnosno radimo transformaciju $z = r_* - 2Mi\pi$. Time (10) postaje jednostavno

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\omega^2 + V(r(z)) \right) \psi = 0. \quad (16)$$

Maloprije definirani rubni uvjeti također se lako vide jednostavnim uvrštavanjem. Tako (14) ostaje isti, a (15) postaje $\text{Im}(\omega z) = 0$.

Jednadžbu (16) očito ne možemo analitički riješiti. Međutim, znamo ju riješiti u nekim asimptotskim područjima. Za $z \rightarrow \pm\infty$, odnosno $r_* \rightarrow \pm\infty$ jasno vidimo da znamo rješenje, dok za $z \rightarrow 0$ ćemo vidjeti ubrzo. U tim asimptotskim područjima, gdje poznamo rješenje možemo pratiti kako se mijenja faktor ispred izlazećih ravnih valova kada okružujemo singularitet na horizontu u r -ravnini.

Pogledajmo sada koji oblik poprima jednadžba (16) blizu $z \rightarrow 0$. Sama koordinata je $z \approx r + 2M(i\pi - \frac{r}{2M} - \frac{r^2}{8M^2} - \dots) - 2Mi\pi = -\frac{r^2}{4M}$. Nadalje, iz potencijala (11) uzimamo samo najdominantniji član i imamo



Slika 2. [4] Kompleksna z -ravnina. Tamno područje označava $\text{Re}(r_*) < 0$. Linija pokazuje smjer duž kojega računamo asimptotske oblike rješenja te odgovara liniji iz slike 1.

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \left(\omega^2 - \frac{j^2 - 1}{4z^2} \right) \psi = 0. \quad (17)$$

Blizu središta crne rupe, rješenja su Besselove funkcije (vidi dodatak B).

$$\psi \propto A_+ c_+ \sqrt{\omega z} J_{j/2}(\omega z) + A_- c_- \sqrt{\omega z} J_{-j/2}(\omega z) \quad (18)$$

Kako bismo primijenili rubne uvjete i vidjeli kako izgleda rješenje u području A, idemo duž pravca $\text{Im}(\omega z) = 0$ prema dolje, odnosno prema $\omega z \rightarrow +\infty$. Biramo c_{\pm} tako da vrijedi razvoj

$$c_{\pm} \sqrt{\omega z} J_{\pm j/2}(\omega z) \rightarrow 2 \cos(\omega z - \alpha_{\pm}), \quad (19)$$

gdje su $\alpha_{\pm} = \frac{\pi}{4}(1 \pm j)$. Tako nam uvjet da u beskonačnosti nemamo ulazećih valova, nakon raspisa kosinusa preko eksponencijala, daje

$$A_+ e^{-i\alpha_+} + A_- e^{-i\alpha_-} = 0 \quad (20)$$

Ostaju izlazeći valovi općenitog oblika

$$\psi_A \propto (A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-}) e^{-i\omega z} \quad (21)$$

Dakle, znamo faktor ispred ravnih valova u području A, sada moramo vidjeti kako će se promijeniti dok dođemo do područja B i u konačnici po desnom polukrugu nazad.

Iduća prepreka je obilazak ishodišta u r -ravnini što izgleda kao 3π rotacija u z -ravnini. Iz svojstava Besselovih funkcija znamo da vrijedi [6]

$$J_{\pm j/2}(\omega z) = z^{\pm j/2} \phi(z), \quad (22)$$

gdje je $\phi(z)$ holomorfna funkcija. Stoga, pribrajavući i taj faktor koji dolazi od rotacije za 3π oko $z = 0$ razvoju u područje B glasi

$$c_{\pm} \sqrt{\omega z} J_{\pm j/2}(\omega z) \propto e^{\delta i \alpha_{\pm}} 2 \cos(-\omega z - \alpha_{\pm}). \quad (23)$$

I sada, konačno možemo pisati i samo rješenje u području B , odnosno za $\omega z \rightarrow -\infty$ (primijetimo, dopušteni su i ulazeći i izlazeći valovi jer Wickova rotacija (15) je uvjet samo za područje $\omega z \rightarrow +\infty$)

$$\begin{aligned} \psi_B \propto & (A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-}) e^{-i\omega z} \\ & + (A_+ e^{7i\alpha_+} + A_- e^{7i\alpha_-}) e^{i\omega z}. \end{aligned} \quad (24)$$

Sada se polako vraćamo do A preko polukruga s desne strane. Negdje tijekom puta moramo također i pokupiti faktor od zaokruživanja singulariteta u r -ravnini. Podsjetimo se, radimo običan krug u r -ravnini (slika 1), koji se prevodi u zamršeniju krivulju u z -ravnini (slika 2). Želimo usporediti faktor ispred *izlazećih* valova u području A i B jer znamo da se njihov faktor neće mijenjati dok se krećemo po polukrugu budući da je dovoljno daleko da potencijal teži u nulu (*ulazećim* valovima faktor će se mijenjati zbog rubnih uvjeta koje smo konstruirali Wickovom rotacijom u području A -tamo nema ulazećih valova). Preostalo je samo dodati taj faktor koji dolazi od zaokruživanja singulariteta u r -ravnini. U diskusiji kod rubnog uvjeta (14) zaključili smo da *rješenje* diferencijalne jednadžbe mora imati monodromiju (14), ali funkcija $e^{-i\omega z}$ će imati monodromiju $e^{-2\pi\omega 2M}$. Dakle, nakon svega što smo prošli imamo faktor $e^{-2\pi\omega 2M} (A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-})$, a na početku (21) smo imali $(A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-})$. Omjer ovih faktora daje nam monodromiju *rješenja* diferencijalne jednadžbe (16), a ona mora biti jednaka (14)

$$e^{2\pi\omega 2M} = \frac{(A_+ e^{5i\alpha_+} + A_- e^{5i\alpha_-}) e^{-2\pi\omega 2M}}{(A_+ e^{i\alpha_+} + A_- e^{i\alpha_-})}, \quad (25)$$

što nakon korištenja (20) i raspisivanja eksponencijala daje

$$e^{\pm 4\pi\omega 2M} = -(1 + 2 \cos(\pi j)), \quad (26)$$

gdje smo stavili \pm u eksponent kako bismo označili i slučaj računanja da smo u suprotnom smjeru zaokruživali singularitet. U konačnici, uzimanjem logaritma imamo rezultat

$$4\pi\omega 2M = (2n + 1)i\pi \pm \ln(1 + 2 \cos(\pi j)) \quad (27)$$

IV. ZAKLJUČAK

U ovome radu izvedena je jednadžba gibanja skalarnog polja u Schwarzschildovom prostorvremenu te je pokazano kako se ona svodi na jednodimenzionalnu običnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda. Jednadžba je analitički produljena na kompleksnu ravninu kako bi se iskoristila analitička svojstva rješenja u svrhu računanja frekvencije kvazinormalnih modova skalarnih perturbacija Schwarzschildove crne rupe. Izračunali smo monodromiju rješenja uz pomoć asimptotskih oblika jednadžbe te zahtijevali slaganje s fizikalnim rubnim uvjetom. U konačnici, dobili smo analitički izraz za frekvenciju kvazinormalnih modova u granici snažnog gušenja $\omega_I \gg \omega_R$.

Dodatak A: Kovarijantni zapis d'Alambertovog operatora

Cilj nam je pronaći kako izgleda d'Alambertov operator ako djeluje na skalarno polje. Po definiciji vrijedi $\square\phi = g^{\mu\nu} \nabla_{\mu} \nabla_{\nu} \phi$. Budući da je ϕ skalar prva će derivacija djelovati samo kao parcijalna derivacija i ostat će nam $\nabla_{\mu} \partial^{\mu} \phi$. Pitanje je kako djeluje kovarijantna derivacija na vektor A^{μ} ?

$$\nabla_{\mu} A^{\mu} = \partial_{\mu} A^{\mu} + \Gamma_{\mu\nu}^{\mu} A^{\nu} \quad (A1)$$

Drugi član je jednak

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} A^{\nu} = \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_{\mu} g_{\nu\rho} + \partial_{\nu} g_{\mu\rho} - \partial_{\rho} g_{\mu\nu}) A^{\nu} \quad (A2)$$

$$= \frac{1}{2} g^{\mu\rho} (\partial_{\nu} g_{\mu\rho}) A^{\nu}. \quad (A3)$$

Znamo da $g^{\mu\rho} = (g_{\mu\rho})^{-1} = (g_{\rho\mu})^{-1}$, ali i dalje imamo sumaciju po indeksima koju ćemo sada eksplicitno pisati

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \sum_{\mu\rho} (g_{\rho\mu})^{-1} (\partial_{\nu} g_{\mu\rho}). \quad (A4)$$

Stoga, prepoznajući da je ovo trag i uz upotrebu Jacobi-jevog identiteta imamo

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\mu} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left((g_{\rho\mu})^{-1} (\partial_{\nu} g_{\mu\rho}) \right) \quad (A5)$$

$$= \frac{1}{2g} \partial_{\nu} g = \frac{1}{2(-g)} \partial_{\nu} (-g) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\nu} \sqrt{-g} \quad (A6)$$

Što u konačnici daje

$$\square\phi = \nabla_{\mu} \nabla^{\mu} \phi = \nabla_{\mu} \partial^{\mu} \phi = (\partial_{\mu} \partial^{\mu} + \Gamma_{\nu\mu}^{\nu} \partial^{\mu}) \phi \quad (A7)$$

$$= \left(\partial_{\mu} \partial^{\mu} + \frac{1}{\sqrt{-g}} (\partial_{\mu} \sqrt{-g}) \partial^{\mu} \right) \phi \quad (A8)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_{\mu} (\sqrt{-g} \partial^{\mu} \phi) \quad (A9)$$

□

Dodatak B: Besselova jednadžba (17)

U ovom dodatku pokazat ćemo kako se jednadžba (17)

$$\frac{d^2\psi(z)}{dz^2} + \left(\omega^2 - \frac{j^2 - 1}{4z^2}\right)\psi(z) = 0. \quad (\text{B1})$$

svodi na Besselovu jednadžbu. Pomnožit ćemo i podijeliti $\psi(z)$ s $\sqrt{\omega z}$ u prvom članu te izvrijedniti tu derivaciju

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\sqrt{\omega z} \frac{\psi(z)}{\omega z} \right) = \quad (\text{B2})$$

$$= \frac{d}{dz} \left(\frac{\omega}{2\sqrt{\omega z}} \frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} + \sqrt{\omega z} \frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} \right)$$

$$= -\frac{\omega}{4} \frac{\omega}{(\omega z)^{3/2}} \frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} + \frac{\omega}{2\sqrt{\omega z}} \frac{d}{dz} \frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} \quad (\text{B3})$$

$$+ \frac{\omega}{2\sqrt{\omega z}} \frac{d}{dz} \frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} + \sqrt{\omega z} \frac{d^2}{dz^2} \frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}}$$

$$= \sqrt{x} \frac{d^2}{dz^2} f(x) + \frac{\omega}{\sqrt{x}} \frac{d}{dz} f(x) - \frac{\omega^2}{4x^{3/2}} f(x), \quad (\text{B4})$$

gdje smo u zadnjem redu uveli pokrate $\omega z = x$, $\frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} = f(x)$. Cijelu jednadžbu raspisujemo i dijelimo s $\omega^2 \sqrt{\omega z}$ kako bismo se riješili preostalih ω i z

$$\frac{d^2}{dx^2} f(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} f(x) - \frac{1}{4x^2} f(x) + f(x) - \left(\frac{j}{2}\right)^2 \frac{1}{x^2} f(x) + \frac{1}{4x^2} f(x) = 0. \quad (\text{B5})$$

Sređivanjem i množenjem s x^2 dobivamo dobro poznati oblik Besselove jednadžbe [6]

$$x^2 \frac{d^2}{dx^2} f(x) + x \frac{d}{dx} f(x) + (x^2 - (j/2)^2) f(x) = 0, \quad (\text{B6})$$

čija rješenja su, naravno, Besselove funkcije

$$\frac{\psi(z)}{\sqrt{\omega z}} = f(\omega z) \propto J_{\pm j/2}(\omega z). \quad (\text{B7})$$

Njihov asimptotski razvoj se također može pronaći u [6] i glasi

$$J_{\pm j/2}(\omega z) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi \omega z}} \cos \left(\omega z - \frac{1}{4} \pi (1 \pm j) \right) \quad (\text{B8})$$

-
- [1] V. P. Frolov, I. D. Novikov, *Black Hole Physics Basic Concepts and New Developments*, Kluwer Academic Publishers (1998)
- [2] E. Berti, *Black Hole Perturbation Theory*, International Center for Theoretical Sciences, Summer School on Gravitational-Wave Astronomy (Bangalore, 2016)
- [3] E. Berti, V. Cardoso, A. O. Starinets, *Quasinormal modes of black holes and black branes*, *Class. Quantum Grav.* 26 (2009) 163001
- [4] L. Motl, A. Neitzke, *Asymptotic black hole quasinormal frequencies*, *Adv. Theor. Math. Phys.* 7 (2003) 307–330
- [5] A. Castro, J. M. Lapan, A. Maloney, M. J. Rodriguez, *Black hole scattering from monodromy*, *Class. Quantum Grav.* 30 (2013) 165005
- [6] M. Abramowitz, I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, United States Department of Commerce, National Bureau of Standards (1964)