

Monte Carlo replike dubokog virtualnog komptonskog raspršenja

Matija Matijević*

Mentor: prof.dr.sc. Krešimir Kumerički

Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek

Bijenička cesta 32, 10000, Zagreb

(Dated: 21. siječnja 2022.)

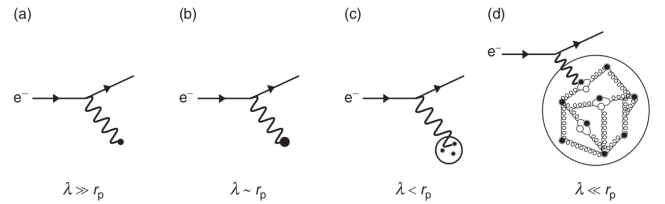
Napravljene su tzv. Monte Carlo replike modela udarnog presjeka za pojednostavljen opis procesa dubokog virtualnog komptonskog raspršenja. Prvo je proučavana situacija u kojoj su podaci opterećeni statističkim pogreškama. Prilagodbom modela na podatke dobivene u replikama određeni su parametri modela te je napravljen histogram dobivenih parametara na koji je napravljena prilagodba Gaussiana. Iz dobivene prilagodbe određene su srednja vrijednost i standardna devijacija pojedinog parametra modela te je standardna devijacija uspoređena s vrijednošću dobivenom analitičkim računom pri čemu je dobiveno dobro slaganje. Zatim je na podatke iz replika dodana sistematska pogreška te je, analogno kao i prije, napravljena prilagodba Gaussiana na histogram koeficijenata. Standardne devijacije tih koeficijenata su uspoređene s vrijednostima dobivenim analitički te je za parametre modela dobiveno vrlo dobro slaganje. Konačno, isti postupak je napravljen i za tzv. moduliranu sistematsku pogrešku te su uspoređene standardne devijacije određene iz prilagodbe Gaussove funkcije na podatke iz replika s vrijednostima dobivenim analitičkim izračunom te je dobiveno dobro slaganje.

1. UVOD

Elektron-proton raspršenje je proces koji služi kao glavni alat za ispitivanje svojstava protona. Fizika koja opisuje ovakvo raspršenje ovisi o energiji upadnog elektrona. Primjerice, pri niskim energijama raspršenje je elastično što znači da čestice u početnom i konačnom stanju ostaju nepromijenjene. S druge strane, pri visokim energijama dominantan proces postaje tzv. *duboko neelastično raspršenje* (*engl.* deep inelastic scattering, DIS) gdje se proton „razbija”. Ova je proces u osnovi elastično raspršenje elektrona na kvarkovima unutar protona te se stoga može koristiti kao metoda za ispitivanje strukture protona. Fizika koja opisuje elektron-proton raspršenja ovisi o ulaznoj energiji, odnosno o valnoj duljini virtualnog fotona kojeg izmjenjuje elektron i proton. Stoga se ono, ovisno o odnosu valne duljine virtualnog fotona λ i radijusa protona r_p , može u grubo razvrstati u četiri kategorije ([1, pp. 160-161]) prikazane shematski na slici 1:

- $\lambda \gg r_p$: vrlo niske energije na kojima su elektroni nerelativistički, proces se može opisati kao elastično raspršenje elektrona u statičkom potencijalu točkastog protona;
- $\lambda \sim r_p$: proces više nije isključivo elektrostatske prirode te se mora uzeti u obzir i distribucija naboja i magnetskog momenta unutar protona;
- $\lambda < r_p$: valna duljina postaje mala u usporedbi s radijusom protona, udarni presjek za elastično raspršenje postaje malen te neelastično raspršenje elektrona postaje dominantno, upadni elektron „razbija” proton i interagira s valentnim kvarkovima unutar protona;

- $\lambda \ll r_p$: vrlo visoke energije, valna duljina fotona je dovoljno mala da se može detaljno razlučiti struktura protona, mogu se razlučivati tzv. *kvarkovi mora* unutar protona.



Slika 1: Shematski prikaz elektron-proton raspršenja. Preuzeto iz: [1]

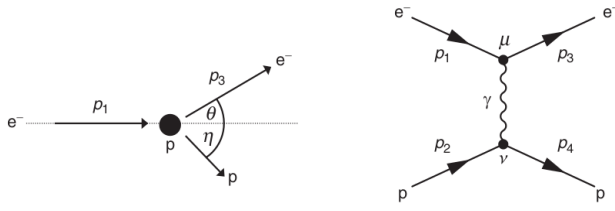
2. TEORIJA ELEKTRON-PROTON RASPRŠENJA

2.1. Rutherfordov i Mottov udarni presjek

Rutherfordovo i Mottovo raspršenje su niskoenergetski limesi elektron-proton raspršenja. Ako se pretpostavi da je odboj protona puno manji od njegove mase mirovanja i da je proton točkasta čestica interakcija se može opisati tako da je proton fiksni izvor klasičnog $1/r$ elektrostatskog potencijala. Jedina razlika između Rutherfordovog i Mottovog udarnog presjeka jest to što elektron u prvom slučaju nije relativistički, dok u drugom je. Feynmanov dijagram za Rutherfordovo i Mottovo raspršenje prikazan je na slici 2. Usrednjeni kvadrat amplitude za proces na slici 2 dobiva se primjenom Feynmanovih pravila za kvantnu elektrodinamiku (*engl.* QED):

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle = \frac{m_p^2 m_e^2 e^4}{p^4 \sin^4(\theta/2)} \left[1 + \beta_e^2 \gamma_e^2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (1)$$

* mmatej@yaho.com.hr



Slika 2: Prikaz elastičnog raspršenja u laboratorijskom sustavu (**lijevo**) i Feynmanov dijagram za elastično raspršenje u vodećem redu računa smetnje (**desno**).

Preuzeto iz: [1]

gdje su m_p i m_e mase protona i elektrona, a $p = p_1 = p_3$ impuls elektrona. Diferencijalni udarni presjek u laboratorijskom sustavu za takvo raspršenje, uz zanemariv odboj protona, dobiva se iz formule:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 m_p^2} \langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle. \quad (2)$$

Rutherfordov udarni presjek dobiva se iz jedn. (1) u aproksimaciji u kojoj je elektron nerelativistički, $\beta_e \gamma_e \ll 1$ i $m_e \sim E_1 \ll m_p$. U tom slučaju jedn. (1) postaje:

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle_{\text{Rutherford}} = \frac{m_p^2 m_e^2 e^4}{p^4 \sin^4(\theta/2)} \quad (3)$$

Ako se jedn. (3) uvrsti u jedn. (2) dobiva se:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \frac{\alpha^2}{16E_K^2 \sin^4(\theta/2)}, \quad (4)$$

gdje je $E_K = p^2/2m_e$ kinetička energija elektrona, a $\alpha = e^2/4\pi$ je tzv. *konstanta fine strukture*.

S druge strane, Mottov udarni presjek se dobiva u limesu relativističkog elektrona, odnosno $\beta_e \gamma_e \gg 1$ i $E \approx p$. Jedn. (1) stoga postaje:

$$\langle |\mathcal{M}_{fi}|^2 \rangle_{\text{Mott}} = \frac{m_p^2 e^4}{E^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (5)$$

gdje je $E = \gamma_e m_e$ ulazna energija elektrona te se uvrštavanjem jedn. (5) u jedn. (2) dobiva Mottov udarni presjek:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4(\theta/2)} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6)$$

2.2. Rosenbluthova formula

Jedn. (6) ne uzima u obzir odboj protona pri raspršenju relativističkog elektrona što je dobra aproksimacija ako $|\mathbf{q}| \ll m_p$. U slučaju kada taj uvjet ne vrijedi, potrebno je modificirati jedn. (6) pa će udarni presjek za raspršenje

relativističkog elektrona na mirujućem protonu ako se u obzir uzme odboj protona imati oblik:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1} \times \left[\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \frac{Q^2}{2m_p^2} \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]. \quad (7)$$

gdje su E_1 i E_3 ulazna i izlazna energija elektrona, a $Q^2 = -q^2$ gdje je q^2 impuls virtualnog fotona. Varijabla Q^2 se naziva *virtualnost* i interpretira se kao skala na kojoj se ispituje struktura protona. Jedn. (7) se reducira na udarni presjek za Mottovo raspršenje ako $E_3 = E_1$ i $Q^2 \ll m_p^2$.

Na višim energijama je također potrebno uzeti u obzir i samu strukturu protona jer valna duljina virtualnog fotona postaje manja od radijusa protona. U tom slučaju proton se više ne smatra točkastim te se javlja potreba za uvođenjem tzv. *form faktora* $F(\mathbf{q}^2)$ koji su definirani kao Fourierovi transformati gustoće naboja ([1, p. 167]):

$$F(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r. \quad (8)$$

Form faktor kvalitativno možemo opisati kao funkciju koja uzima u obzir razlike u fazi između doprinosa raspršenom valu koje dolaze od različitih točaka distribucije naboja u protonu.

Uzimajući sve navedeno u obzir, najopćenitiji, Lorentz-invarijantan izraz za diferencijalni udarni presjek elektron-proton raspršenja koji uzima u obzir i strukturu protona dan je tzv. *Rosenbluthovom formulom* ([1, pp. 172]):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\alpha^2}{4E_1^2 \sin^4(\theta/2)} \frac{E_3}{E_1} \times \left[\frac{G_E^2 + \tau G_M^2}{1 + \tau} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + 2\tau G_M^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right], \quad (9)$$

gdje je $\tau = Q^2/4m_p$. Funkcije $G_E(Q^2)$ i $G_M(Q^2)$ nazivaju se *Sachsovim form faktorima* te ovise o 4-impulsu virtualnog fotona. Zbog te ovisnosti one se ne mogu interpretirati kao „standardni” form-faktori koji su funkcije 3-impulsa virtualnog fotona. Međutim, kako vrijedi $Q^2 = -q^2 = \mathbf{q}^2 - (E_1 - E_3)^2$, može se dobiti ovisnost 3-impulsa \mathbf{q} o 4-impulsu Q koristeći činjenicu da $E_1 - E_3 = Q^2/2m_p$:

$$Q^2 \left(1 + \frac{Q^2}{4m_p^2} \right) = \mathbf{q}^2$$

Ako se uzme limes $Q^2 \ll 4m_p^2$ dobiva se $Q^2 \approx \mathbf{q}^2$ te se u tom slučaju Sachsovi form faktori mogu interpretirati kao Fourierovi transformati gustoće naboja i magnetskog momenta:

$$G_E(Q^2) \approx G_E(\mathbf{q}^2) = \int \rho(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r; \quad (10)$$

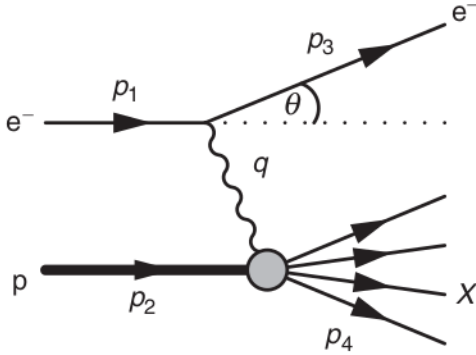
$$G_M(Q^2) \approx G_M(\mathbf{q}^2) = \int \mu(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d^3r.$$

Zbog konzistentnosti s eksperimentalnim vrijednostima, izrazi u jedn. (10) imaju sljedeće normalizacije:

$$\begin{aligned} G_E(0) &= \int \rho(\mathbf{r}) d^3r = 1; \\ G_M(0) &= \int \mu(\mathbf{r}) d^3r = 2.79, \end{aligned} \quad (11)$$

gdje vrijednost $G_M(0) = 2.79$ dolazi od tzv. *anomalnog magnetskog momenta protona*. Iz poznatih Sachsovih form faktora se mogu odrediti izrazi za radijuse naboja i magnetskog momenta protona što je i dalje vrlo aktivno područje istraživanja.

2.3. Duboko neelastično raspršenje



Slika 3: Prikaz DIS-a u laboratorijskom sustavu.
Preuzeto iz: [1]

Zbog konačne veličine protona, Sachsovi form faktori $G_E(Q^2)$ i $G_M(Q^2)$ trnu vrlo brzo s porastom Q^2 pa stoga diferencijalni udarni presjek za elastično elektron-proton raspršenje naglo pada s porastom energije. Posljedično, dominantan proces u elektron-proton raspršenju pri visokim energijama je *duboko neelastično raspršenje* (DIS), prikazan na slici 3, u kojem se proton „razbija” te virtualni foton počinje međudjelovati s kvarkovima unutar protona. Pri $e^-p \rightarrow e^-X$ raspršenju, konačno hadronsko stanje koje nastaje uslijed razbijanja protona se sastoji od mnoštva čestica. Invarijantna masa tog hadronskog sustava W ovisi o 4-impulsu virtualnog fotona, $W^2 = p_4^2 = (p_2 + q)^2$, za razliku od elastičnog raspršenja gdje je ona jednaka masi protona m_p . Zbog postojanja tog dodatnog stupnja slobode, kinematika DIS-a mora biti opisana pomoću dvije nezavisne varijable, za razliku od elastičnog raspršenja koje je bilo opisano samo kutom raspršenja θ . Često se u tu svrhu koriste već spomenuta invarijantna masa W i virtualnost Q^2 , no znaju se uvesti i bezdimenzionalne varijable poput:

$$x_B := \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} = \frac{Q^2}{Q^2 + W^2 - m_p^2}, \quad (12)$$

koja se naziva *Bjorkenov x*. Kako je invarijantna masa uvijek veća ili jednaka masi protona, $W^2 \geq m_p^2$, i $Q^2 \geq 0$ tada Bjorkenov x ima raspon vrijednosti $0 \leq x_B \leq 1$ te $x_B = 1$ predstavlja specijalan slučaj kada je $W^2 = m_p^2$ što odgovara procesu elastičnog raspršenja. Zbog toga se Bjorkenov x može interpretirati kao mjera „elastičnosti” raspršenja. Još neke bezdimenzionalne varijable koje se uvode su:

$$y := \frac{p_2 \cdot q}{p_2 \cdot p_1} = 1 - \frac{E_3}{E_1}, \quad (13)$$

koja predstavlja postotak energije koju elektron izgubi pri raspršenju u sustavu u kojem proton miruje u početnom stanju, i:

$$\nu := \frac{p_2 \cdot q}{m_p} = E_1 - E_3, \quad (14)$$

koja predstavlja energiju koju elektron izgubi pri raspršenju u sustavu u kojem proton miruje u početnom stanju.

Rosenbluthova formula se može generalizirati za neelastično raspršenje te će u tom slučaju diferencijalni udarni presjek biti funkcija dvije kinematičke varijable, kako je i prethodno napomenuto. Najopćenitiji, Lorentz-invarijantni udarni presjek za $ep \rightarrow eX$ neelastično raspršenje u kojem se izmjenjuje jedan virtualni foton, dano je jednadžbom ([1, p. 184]):

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_B dQ^2} &= \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \times \\ &\times \left[\left(1 - y - \frac{m_p^2 y^2}{Q^2} \right) \frac{F_2(x_B, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x_B, Q^2) \right], \end{aligned}$$

gdje su $F_1(x_B, Q^2)$ i $F_2(x_B, Q^2)$ tzv. *strukturne funkcije* (engl. structure functions). Zbog toga što su F_1 i F_2 funkcije koje ovise i o x_B i o Q^2 one se ne mogu interpretirati kao Fourierovi transformati gustoće naboja i magnetskog momenta. U aproksimaciji $Q^2 \gg m_p^2 y^2$ gornja jednadžba postaje:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma}{dx_B dQ^2} &\approx \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \times \\ &\times \left[(1 - y) \frac{F_2(x_B, Q^2)}{x} + y^2 F_1(x_B, Q^2) \right], \end{aligned} \quad (15)$$

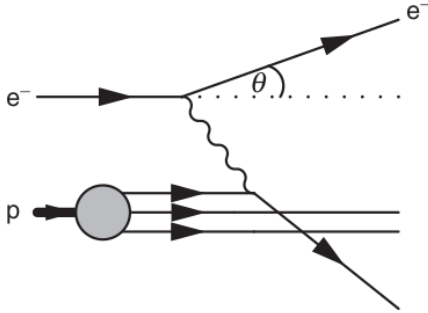
Prva sustavna istraživanja strukturnih funkcija F_1 i F_2 u neelastičnim elektron-proton raspršenjima su napravljena na SLAC-u (engl. Stanford Linear Accelerator Center) u Kaliforniji. Rezultati istraživanja su pokazali dva vrlo značajna svojstva strukturnih funkcija. Prvo svojstvo je tzv. *Bjorkenovo skaliranje*, odnosno uočeno je da strukturne funkcije uopće ne ovise o virtualnosti Q^2 , tj. $F_j(x_B, Q^2) \rightarrow F_j(x_B)$, gdje je $j = 1, 2$. To svojstvo upućuje na činjenicu da se neelastično raspršenje odvija na točkastim konstituentima unutar samog protona jer bi inače objekt konačne veličine uio Q^2 ovisnost u strukturne funkcije kroz form faktor. Drugo svojstvo, uočeno

za Q^2 veći od nekoliko GeV-a, je tzv. *Callan-Gross relacija*:

$$F_2(x_B) = 2x_B F_1(x_B), \quad (16)$$

koja se može objasniti ako se pretpostavi da se pri neelastičnom elektron-proton raspršenju elektron ustvari elastično raspršuje na točkastim konstituentima spina 1/2 unutar protona.

2.4. Partonske distribucijske funkcije



Slika 4: Feynmanov dijagram za najniži red perturbativnog računa za DIS. Preuzeto iz: [1]

Prije nego što je moderna teorija kvarkova i gluona postala općeprihvaćena, Feynman je predložio da je proton sastavljen od točkastih konstituenta koje je nazvao *partoni*. U kvark-partonskom modelu je neelastično e-p raspršenje opisano elastičnim raspršenjem elektrona na slobodnim kvarkovima (partonima) spina 1/2, što je prikazano na slici 4. Svi računi u ovom modelu napravljeni su u tzv. *sustavu beskonačnog impulsa*, tj. sustavu u kojem je energija protona mnogo veća od njegove mase, $E \gg m_p$, pa se masa protona može zanemariti. Impuls kvarka (partona) u sustavu beskonačnog impulsa glasi:

$$p_q = xp_2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (17)$$

gdje je x udio longitudinalnog impulsa protona kojeg ima raspršeni kvark. Nakon interakcije s virtualnim fotonom, raspršeni kvark će imati impuls:

$$p'_q = xp_2 + q,$$

a kvadrat njegovog impulsa nakon raspršenja je:

$$(xp_2 + q)^2 = x^2 p_2^2 + 2xp_2 \cdot q + q^2 = m_q^2.$$

Iz jedn. (17) se može vidjeti da je $x^2 p_2^2 = m_q^2$, pa će stoga gornja jednadžba glasniti:

$$2xp_2 \cdot q + q^2 = 0,$$

te se konačnim sređivanjem dobiva:

$$x = \frac{-q^2}{2p_2 \cdot q} = \frac{Q^2}{2p_2 \cdot q} := x_B. \quad (18)$$

Jedn. (18) govori da je udio longitudinalnog impulsa protona koji nosi kvark u sustavu beskonačnog impulsa s kojim elektron interagira jednak Bjorkenovoj varijabli x_B .

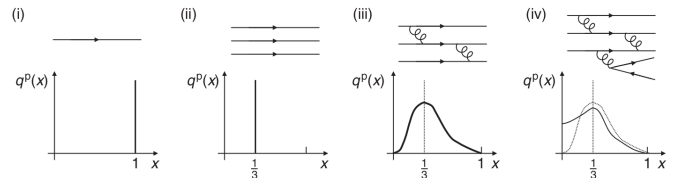
U kvark-partonskom modelu je moguće diferencijalni udarni presjek DIS-a reducirati na sumu diferencijalnih udarnih presjeka za elastična raspršenja na pojedinačnim kvarkovima u protonu ([1, p. 193]):

$$\frac{d^2\sigma}{dx dQ^2} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4} \left[(1-y) + \frac{y^2}{2} \right] \sum_i Q_i^2 q_i^p(x), \quad (19)$$

gdje je q_i^p tzv. *partonska distribucijska funkcija* (engl. parton distribution function, PDF), a Q_i naboj za i -ti parton. Partonska distribucijska funkcija $q_i^p(x)$ se može shvatiti kao gustoća i -tog partona u protonu p s udjelom longitudinalnog impulsa x između x i $x + \delta x$. Ako se jedn. (19) usporedi s jedn. (15) dobiva se:

$$F_2(x) = 2xF_1(x) = x \sum_i Q_i^2 q_i^p(x). \quad (20)$$

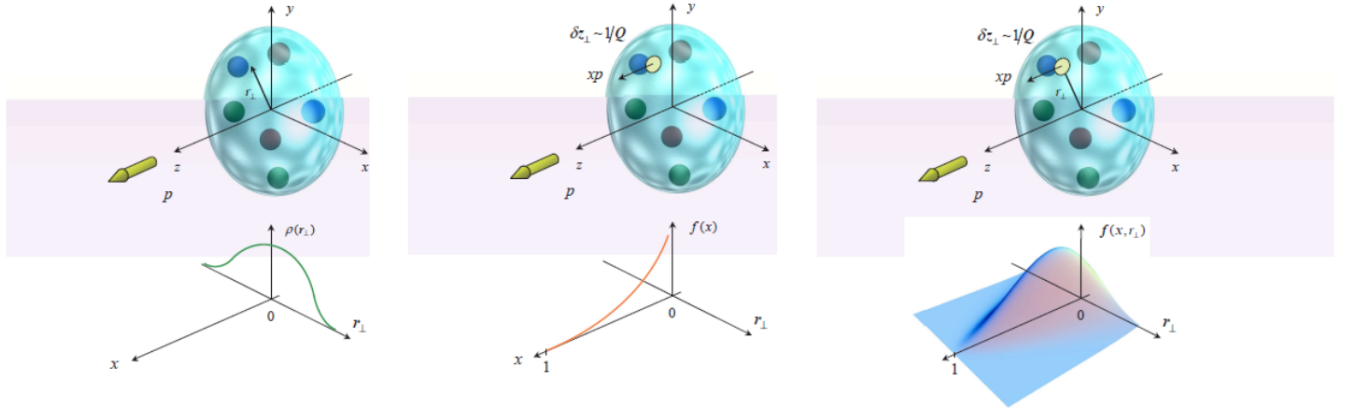
Jedn. (20) rekonstruira i Callan-Gross relaciju i Bjorkenovo skaliranje unutar kvark-partonskog modela, no također i povezuje strukturne funkcije s PDF-ovima. Međutim, vrlo brzo se uvidjelo da je ovakav model u kojem je proton vezano stanje tri tzv. *valentna kvarka* (engl. valence quarks) previše pojednostavljen. Same PDF-ove nije moguće analitički odrediti, no eksperimentalna mjerenja PDF-ova upućuju na to da je proton dinamički objekt koji uz tri valentna kvarka (uud) sadrži i „more” virtualnih kvarkova, antikvarkova i gluona, od kojih samo gluoni nose gotovo 50% ukupnog impulsa protona. Na slici (5) se mogu vidjeti četiri različita primjera izgleda PDF-ova.



Slika 5: (i) jedna točkasta čestica; (ii) tri statična kvarka od kojih svaki nosi po trećinu impulsa; (iii) tri kvarka koji međudjeluju i izmjenjuju impuls; (iv) interagirajući kvarkovi s uključenim dijagramima višeg reda. Preuzeto iz: [1]

2.5. Generalizirane partonske distribucije

Generalizirane partonske distribucije (engl. generalized parton distributions, GPDs) su funkcije s jedinstvenim svojstvima koja ih čine iznimno zanimljivima za proučavanje. Naime, GPD-ovi su povezani s drugim neperturbativnim objektima koji su važni pri razmatranju elektron-proton raspršenja, partonskim distribucijskim funkcijama i form faktorima. Dok partonske distribucijske funkcije i form faktori pružaju važan uvid, one nisu



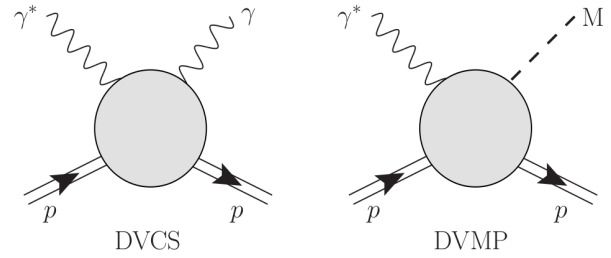
Slika 6: Probabilistička interpretacija form faktora, PDF-ova i generaliziranih partonskih distribucija za $\eta = 0$ u sustavu beskonačnog impulsa. Preuzeto iz: [2]

dovoljne kako bismo rekonstruirali potpunu sliku strukture protona. Zbog toga je uveden koncept GPD-ova koji obuhvaćaju i longitudinalnu distribuciju impulsa (PDF-ovi) i transverzalnu distribuciju naboja (form faktori) što efektivno daje trodimenzionalnu sliku protona. Veza između form faktora, PDF-ova i GPD-ova prikazana je na slici 6. Također, GPD-ovi su direktno povezani s matricnim elementima tenzora energije i impulsa za kvantnu kromodinamiku (*engl.* QCD) u bazi hadronskih stanja što je iznimno važno ako se prisjeti da je tenzor energije i impulsa najčešće ispitivan pomoću gravitacijskih interakcija. Zbog toga, GPD-ovi predstavljaju važnu sponu u određivanju tenzora energije i impulsa pomoću elektromagnetskih interakcija koje su mnogo izraženije, ali i jednostavnije za ispitati od gravitacijskih.

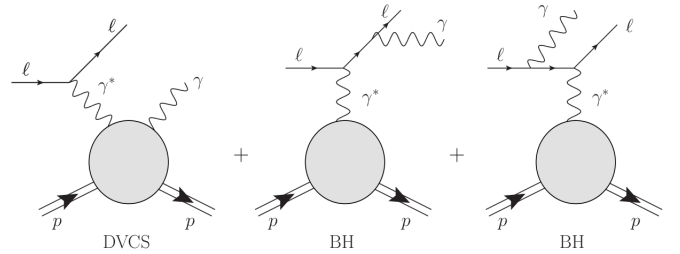
Vrlo rano u istraživanju GPD-ova se uvidjelo da je teorijski najčišći kanal za određivanje GPD-ova ekskluzivna elektroprodukcija realnog fotona ili mezona pomoću nukleonske mete, poput protona, pri velikom prijenosu impulsa. Dva procesa koji zadovoljavaju spomenute kriterije su *duboko virtualno komptonско raspršenje* (*engl.* Deeply Virtual Compton Scattering, DVCS) i *duboko virtualna produkcija mezona* (*engl.* Deeply Virtual Meson Production) koji su prikazani na slici 7. Važno je pritom napomenuti da je pristup GPD-ovima preko ovih dvaju procesa indirektan, odnosno ti procesi ne ovise direktno o GPD-ovima već njihovim integralima koje, za DVCS, nazivamo *komptonски form faktori* (*engl.* Compton Form Factors, CFFs).

Mjerenje DVCS-a se najčešće izvodi preko tzv. *leptoprodukcije realnog fotona*, što je prikazano na slici 8. Međutim, pojavljuje se i interferencija s tzv. Bethe-Heitler procesom koji ima jednako konačno stanje i eksperimentalno ga je nemoguće odvojiti od DVCS-a. Općeniti diferencijalni udarni presjek za leptoprodukciju realnog fotona glasi ([3]):

$$\frac{d^5\sigma}{dx_B dQ^2 dt |d\phi d\phi_S} = \frac{\alpha^3 x_B}{16\pi^2 Q^4 \sqrt{1+\varepsilon^2}} |\mathcal{T}|^2, \quad (21)$$



Slika 7: Prikaz DVCS-a i DVMP-a. Preuzeto iz: [3]



Slika 8: Leptoprodukcija realnog fotona prikazana kao koherentna superpozicija DVCS i Bethe-Heitler amplituda. Preuzeto iz: [3]

gdje je $t = (P_2 - P_1)^2$ tzv. Mandelstammova t -varijabla koja se može interpretirati kao prijenos impulsa, ϕ i ϕ_S su dva azimutalna kuta koja se mjere u odnosu na ravninu raspršenja leptona, $\varepsilon = 2x_B M/Q$ gdje je M masa mete, a \mathcal{T} je koherentna superpozicija DVCS i Bethe-Heitler amplituda:

$$|\mathcal{T}|^2 = |\mathcal{T}_{\text{BH}} + \mathcal{T}_{\text{DVCS}}|^2 = |\mathcal{T}_{\text{BH}}|^2 + |\mathcal{T}_{\text{DVCS}}|^2 + \mathcal{I}. \quad (22)$$

DVCS amplitudu $\mathcal{T}_{\text{DVCS}}$ je moguće rastaviti na, prethodno spomenute, komptonске form faktore (CFF-ove) koji se u vodećem redu perturbativne teorije QCD-a

moгу zapisati kao:

$$\mathcal{F}(\eta, t) = \sum_q e_q^2 \int_{-1}^{+1} dx \times \left[\frac{1}{\eta - x - i\varepsilon} - \frac{1}{\eta + x - i\varepsilon} \right] F^q(x, \eta, t); \quad (23)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}(\eta, t) = \sum_q e_q^2 \int_{-1}^{+1} dx \times \left[\frac{1}{\eta - x - i\varepsilon} + \frac{1}{\eta + x - i\varepsilon} \right] \tilde{F}^q(x, \eta, t), \quad (24)$$

gdje se jedn. (23) i (24) sumiraju po kvarkovskim okusima q , e_q je naboj kvarka okusa q , a F^q i \tilde{F}^q su željeni GPD-ovi za kvarkovski okus q . Također, u jedn. (23) i (24) se pojavljuje i parametar η koji se naziva *asimetrija* (engl. skewness) i definirana je kao ([3]):

$$\eta = -\frac{\Delta^+}{P^+}, \quad (25)$$

gdje je P 4-vektor ukupnog impulsa, a Δ 4-vektor prijenosa impulsa:

$$\begin{aligned} P &= P_2 + P_1; \\ \Delta &= P_2 - P_1, \end{aligned} \quad (26)$$

dok su P^\pm i Δ^\pm definirani kao:

$$a^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^0 \pm a^3), \quad a = P, \Delta. \quad (27)$$

S druge strane, Bethe-Heitler amplituda \mathcal{T}_{BH} je potpuno zadana dobro poznatim elastičnim form faktorima što onda omogućuje uvid i u realnu i imaginarnu komponentu CFF-ova putem interferencijskog člana \mathcal{I} .

Konačni izrazi za amplitude koje se pojavljuju u diferencijalnom udarnom presjeku u jedn. (21) glase ([3]):

$$|\mathcal{T}_{\text{BH}}|^2 = \frac{1}{x_B^2 t (1 + \varepsilon^2) \mathcal{P}_1(\phi) \mathcal{P}_2(\phi)} \times \left[\sum_{n=0}^2 c_n^{\text{BH}} \cos(n\phi) + s_1^{\text{BH}} \sin(\phi) \right]; \quad (28)$$

$$\mathcal{I} = \frac{-e_l}{x_B t y \mathcal{P}_1(\phi) \mathcal{P}_2(\phi)} \times \sum_{n=0}^3 [c_n^{\mathcal{I}} \cos(n\phi) + s_n^{\mathcal{I}} \sin(n\phi)]; \quad (29)$$

$$|\mathcal{T}_{\text{DVCS}}| = \frac{1}{Q^2} \times \sum_{n=0}^2 [c_n^{\text{DVCS}} \cos(n\phi) + s_n^{\text{DVCS}} \sin(n\phi)], \quad (30)$$

gdje je e_l naboj leptonskog snopa u jedinicama elementarnog naboja, a \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 dolaze od leptonskih propagatora u Bethe-Heitler amplitudi. Traženi CFF-ovi ulaze kvadratno u koeficijente c_n^{DVCS} i s_n^{DVCS} , linearno u $c_n^{\mathcal{I}}$ i $s_n^{\mathcal{I}}$, a uopće ne ulaze u koeficijente c_n^{BH} i s_1^{BH} . Ono što će se proučavati u ovom radu jest ponašanje nepouzdanosti vezanih uz koeficijente c_n i s_n iz kojih se onda propagacijom pogreške mogu odrediti nepouzdanosti CFF-ova, a samim time i GPD-ova dok se detaljniji pregled GPD-ova i CFF-ova može pronaći u literaturi [2] i [3].

3. TRETMAN POGREŠKE U MJERENJIMA

Srž ovog rada je, kako je i prethodno spomenuto, ispitivanje izraza za nepouzdanosti koeficijenata c_n i s_n jer se oni pojavljuju u jedn. (28)-(30) te su vrlo usko povezani s prethodno spomenutim komptonkim form faktorima (CFF-ovima), a samim time i željenim generaliziranim partonskim distribucijama (GPD-ovima).

Funkcija $f(\phi)$ je definirana kao:

$$f(\phi) = \sum_{k=0}^{c_{\text{max}}} c_k \cos(k\phi) + \sum_{k=0}^{s_{\text{max}}} s_k \sin(k\phi), \quad (31)$$

gdje svi koeficijenti c_k i s_k za koje $k > c_{\text{max}}, s_{\text{max}}$ iščezavaju. Eksperimentalnim mjerenjima su određene točke (ϕ_n, y_n) gdje je $n = 1, \dots, N$ indeks pojedine točke, ako se dobivenim točkama želi napraviti prilagodba funkcije $f(\phi)$ onda se primjenjuje tzv. *metoda najmanjih kvadrata* u kojoj se želi minimizirati veličina:

$$S = \sum_{n=1}^N [y_n - f(\phi_n)]^2, \quad (32)$$

Uvrštavanjem jedn. (31) u jedn. (32) dobiva se:

$$S = \sum_{n=1}^N \left[y_n - \sum_{k=0}^{c_{\text{max}}} c_k \cos(k\phi_n) - \sum_{k=0}^{s_{\text{max}}} s_k \sin(k\phi_n) \right]^2.$$

Koeficijent c_m određuje se iz gornje jednadžbe minimizacijom veličine S po koeficijentu c_m :

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial c_m} = 2 & \left[\sum_{n=1}^N y_n \cos(m\phi_n) - \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{c_{\text{max}}} c_k \cos(k\phi_n) \cos(m\phi_n) - \sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{s_{\text{max}}} s_k \sin(k\phi_n) \cos(m\phi_n) \right] = 0. \end{aligned}$$

Posljednji član u gornjem izrazu iščezava, odnosno:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{s_{\text{max}}} s_k \sin(k\phi_n) \cos(m\phi_n) = 0, \quad \forall m \in \{0, \dots, c_{\text{max}}\},$$

dok za drugi član vrijedi:

$$\sum_{n=1}^N \sum_{k=0}^{c_{\max}} c_k \cos(k\phi_n) \cos(m\phi_n) = \begin{cases} c_m N, & m = 0 \\ c_m N/2, & 1 \leq m \leq c_{\max} \end{cases}$$

Konačno, izraz za koeficijent c_m glasi:

$$c_m = \frac{r_m}{N} \sum_{n=1}^N y_n \cos(m\phi_n), \quad 0 \leq m \leq c_{\max}, \quad (33)$$

gdje je $r_0 = 1$, a $r_{m \geq 1} = 2$. Analogno se za koeficijente s_m dobiva:

$$s_m = \frac{2}{N} \sum_{n=1}^N y_n \sin(m\phi_n), \quad 1 \leq m \leq s_{\max}. \quad (34)$$

Jedn. (33) i (34) su analogni izraza za koeficijente u Fourierovom razvoju za diskretnu varijablu x . Također, može se vidjeti kako izrazi za koeficijente ne ovise o c_{\max} i s_{\max} .

Sada je potrebno razmotriti što se događa sa nepouzdanošću koeficijenata c_m i s_m ako je mjerenje opterećeno isključivo statističkim greškama. Greška za koeficijent c_m će tada biti:

$$\begin{aligned} \Delta c_m^2 &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial c_m}{\partial y_n} \right)^2 \Delta y_j^2 = \\ &= \frac{r_m^2}{N^2} \sum_{j=1}^N \left(\sum_{n=1}^N \frac{\partial y_n}{\partial y_j} \cos(m\phi_n) \right)^2 \Delta y_j^2 = \\ &= \frac{r_m^2}{N^2} \sum_{j=1}^N \cos^2(m\phi_j) \Delta y_j^2. \end{aligned}$$

Ako se pretpostavi da je $\Delta y_j = \Delta$ za svaki j dobiva se:

$$\Delta c_m^2 = \frac{r_m^2}{N^2} \Delta^2 \sum_{j=1}^N \cos^2(m\phi_j).$$

Koristeći izraz:

$$\sum_{j=1}^N \cos^2(m\phi_j) = \begin{cases} N/2, & m \geq 1; \\ N, & m = 0; \end{cases}$$

konačno se dobiva:

$$\begin{aligned} \Delta c_0 &= \Delta \sqrt{\frac{1}{N}}, & m = 0; \\ \Delta c_m &= \Delta \sqrt{\frac{2}{N}}, & m \geq 1. \end{aligned} \quad (35)$$

Analogno se dobije izraz za Δs_m :

$$\Delta s_m = \Delta \sqrt{\frac{2}{N}}, \quad m \geq 1. \quad (36)$$

Za sistematsku pogrešku je potrebno napraviti zasebnu analizu. Općenito, varijanca neke veličine je dana kao:

$$\sigma_x^2 = \langle (x - \bar{x})^2 \rangle, \quad (37)$$

gdje je \bar{x} očekivana vrijednost veličine x . Varijanca koeficijenta c_m će po jedn. (37) biti:

$$\sigma_{c_m}^2 = \langle (c_m - \bar{c}_m)^2 \rangle, \quad (38)$$

gdje je $c_m = c_m(y_1, \dots, y_n)$, a $\bar{c}_m = c_m(\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$. Ako se c_m razvije u Taylorov red oko njegove očekivane vrijednosti \bar{c}_m te se pritom zadrže samo prva dva reda razvoja dobiva se:

$$c_m = \bar{c}_m + \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i) \left. \frac{\partial c_m}{\partial y_i} \right|_{c_m = \bar{c}_m} \quad (39)$$

Zatim, ako se jedn. (39) uvrsti u jedn. (38) slijedi:

$$\begin{aligned} \sigma_{c_m}^2 &= \left\langle \left(\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y}_i) \left. \frac{\partial c_m}{\partial y_i} \right|_{c_m = \bar{c}_m} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \left\langle \sum_{i,j=1}^N (y_i - \bar{y}_i)(y_j - \bar{y}_j) \left. \frac{\partial c_m}{\partial y_i} \frac{\partial c_m}{\partial y_j} \right|_{c_m = \bar{c}_m} \right\rangle = \\ &= \sum_{i,j=1}^N \langle (y_i - \bar{y}_i)(y_j - \bar{y}_j) \rangle \left. \frac{\partial c_m}{\partial y_i} \frac{\partial c_m}{\partial y_j} \right|_{c_m = \bar{c}_m}. \end{aligned}$$

Koristeći definiciju kovarijance:

$$\text{cov}(X, Y) = \langle (X - \bar{X})(Y - \bar{Y}) \rangle \quad (40)$$

i izraz:

$$\frac{\partial c_m}{\partial y_i} = \frac{r_m}{N} \sum_{n=1}^N \frac{\partial y_n}{\partial y_i} \cos(m\phi_n) = \frac{r_m}{N} \cos(m\phi_i),$$

konačno se dobiva:

$$\sigma_{c_m}^2 = \frac{r_m^2}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \text{cov}(y_i, y_j) \cos(m\phi_i) \cos(m\phi_j). \quad (41)$$

gdje je $r_0 = 1$, a $r_{m \geq 1} = 2$. Analogno se može dobiti i izraz za s_m :

$$\sigma_{s_m}^2 = \frac{4}{N^2} \sum_{i,j=1}^N \text{cov}(y_i, y_j) \sin(m\phi_i) \sin(m\phi_j). \quad (42)$$

Sada, potrebno je razmotriti dva različita slučaja. Prvi slučaj je tzv. *normalizacijska greška*:

$$\langle y_i - \bar{y}_i \rangle = \Delta \bar{y}_i. \quad (43)$$

Kovarijanca je u tom slučaju:

$$\text{cov}(y_i, y_j) = \langle (\Delta \bar{y}_i)(\Delta \bar{y}_j) \rangle = \Delta^2 \bar{y}_i \bar{y}_j. \quad (44)$$

Uvrštavanjem jedn. (44) u jedn. (41) dobiva se:

$$\sigma_{c_m}^2 = \frac{r_m^2}{N^2} \Delta^2 \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cos(m\phi_i) \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \cos(m\phi_j),$$

što se korištenjem jedn. (33) može srediti u oblik:

$$\sigma_{c_m}^2 = \Delta^2 \bar{c}_m^2.$$

Naposlijetku, analogno se dobiva i za koeficijente s_m pa je konačni rezultat:

$$\sigma_{c_m} = \Delta \cdot \bar{c}_m, \quad m \geq 0; \quad (45)$$

$$\sigma_{s_m} = \Delta \cdot \bar{s}_m, \quad m \geq 1. \quad (46)$$

Iz jedn. (45) i (46) vidljivo je da standardna devijacija u slučaju normalizacijske greške uopće ne ovisi o broju izmjerenih točaka N te se stoga ne može eliminirati povećavanjem broja točaka.

Drugi slučaj je tzv. *modulirana normalizacijska greška*:

$$\langle y_i - \bar{y}_i \rangle = \Delta \cos(\phi_i) \bar{y}_i. \quad (47)$$

Za nju će kovarijanca glasiti:

$$\text{cov}(y_i, y_j) = \Delta^2 \cos(\phi_i) \cos(\phi_j) \bar{y}_i \bar{y}_j. \quad (48)$$

Analogno kao i prije dolazi se do izraza:

$$\begin{aligned} \sigma_{c_m}^2 &= \frac{r_m^2}{N^2} \Delta^2 \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cos(m\phi_i) \cos(\phi_i) \times \\ &\times \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \cos(m\phi_j) \cos(\phi_j), \end{aligned}$$

gdje je $r_0 = 1$, dok je $r_m = 2$ za $m \geq 1$. Za slučaj $m = 0$ slijedi:

$$\sigma_{c_0}^2 = \frac{1}{N^2} \Delta^2 \sum_{i=1}^N \bar{y}_i \cos(\phi_i) \sum_{j=1}^N \bar{y}_j \cos(\phi_j).$$

Koristeći jedn. (33) dobiva se:

$$\sigma_{c_0}^2 = \frac{1}{N^2} \Delta^2 \left(\frac{N}{2} \bar{c}_1 \right)^2.$$

Sređivanjem gornje izraza se naposljetku dobiva:

$$\sigma_{c_0} = \frac{\bar{c}_1}{2} \Delta. \quad (49)$$

Za slučaj $m \geq 1$ potrebno je upotrijebiti trigonometrijski identitet za produkt dva kosinusa:

$$\cos(m\phi_i) \cos(\phi_i) = \frac{1}{2} \cos((m-1)\phi_i) + \frac{1}{2} \cos((m+1)\phi_i).$$

Koristeći gornji izraz i jedn. (33) dobiva se:

$$\begin{aligned} \sigma_{c_m}^2 &= \frac{4}{N^2} \Delta^2 \left(\frac{N}{2r_{m-1}} \bar{c}_{m-1} + \frac{N}{2r_{m+1}} \bar{c}_{m+1} \right) \times \\ &\times \left(\frac{N}{2r_{m-1}} \bar{c}_{m-1} + \frac{N}{2r_{m+1}} \bar{c}_{m+1} \right). \end{aligned}$$

Konačno, ako se pretpostavi hijerarhija među koeficijentima, odnosno $c_0 \gg c_1 \gg c_2 \gg \dots$, mogu se zanemariti svi članovi koji sadrže c_{m+1} pa se gornji izraz pojednostavljuje u:

$$\sigma_{c_m}^2 = \frac{4}{N^2} \Delta^2 \left(\frac{N}{2r_{m-1}} \bar{c}_{m-1} \right)^2.$$

Naposlijetku, dobiva se izraz:

$$\sigma_{c_m} = \frac{\bar{c}_{m-1}}{r_{m-1}} \Delta, \quad m \geq 1. \quad (50)$$

Za koeficijente s_m , uz pretpostavljenu hijerarhiju koeficijenata, se analogno dobiva:

$$\sigma_{s_1} = \frac{\bar{s}_2}{2} \Delta; \quad (51)$$

$$\sigma_{s_m} = \frac{\bar{s}_{m-1}}{2} \Delta, \quad m \geq 2. \quad (52)$$

4. REZULTATI

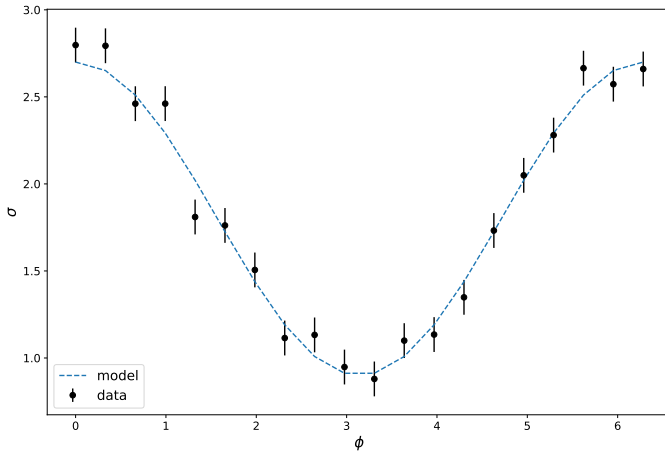
U ovom radu proučavan je jedan pojednostavljen, odnosno tzv. „toy-model” udarnog presjeka:

$$\sigma(\phi) = c_0 + c_1 \cos(\phi), \quad (53)$$

gdje su parametri c_0 i c_1 namješteni tako da budu bezdimenzionalni. Cilj rada bio je *a priori* definirane vrijednosti parametara ekstrahirati iz podataka generiranih Monte Carlo metodom. Kako bi se podaci mogli pouzdano ekstrahirati generira se mnoštvo tzv. *Monte Carlo replika* od kojih se svaka pojedina replika može shvatiti kao jedan niz mjerenja udarnog presjeka σ u ovisnosti o kutu raspršenja ϕ koji je opterećen nekom vrstom pogrešaka koje se javljaju u realnim eksperimentima. Tako se metoda Monte Carlo replika u neku ruku može shvatiti kao ponavljanje istog „eksperimenta” mnogo puta pri čemu se za svaku repliku radi prilagodba iz koje se onda ekstrahiraju parametri prilagodbe definirani u jedn. (53). Kao izvor nasumičnosti za generiranje Monte Carlo replika iskorištena je funkcija `random.random`¹ iz Python paketa `numpy` koja generira nasumične brojeve po normalnoj (Gaussovoj) distribuciji, dok je za prilagodbe korišten paket `iminuit`². Na slici 9 nalazi se primjer jedne Monte

¹ <https://numpy.org/doc/stable/reference/random/generated/numpy.random.randn.html>

² <https://iminuit.readthedocs.io/en/stable/>



Slika 9: Prikaz jedne Monte Carlo replike za podatke u kojima je prisutna statistička pogreška.

Carlo replike gdje su crnim točkama prikazane „izmjerene” vrijednosti, dok je plavom linijom naznačen izgled modela iz jedn. (53).

Prvo su, za dvadeset uniformno raspodijeljenih vrijednosti kuta ϕ_i između 0 i 2π , generirane vrijednosti σ_i kako bi se analizirali izrazi za statističke pogreške navedeni u jedn.(35):

$$\sigma_i = c_0^{\text{true}} + c_1^{\text{true}} \cos(\phi_i) + \Delta \cdot \epsilon(\phi_i), \quad \forall \phi_i, \quad (54)$$

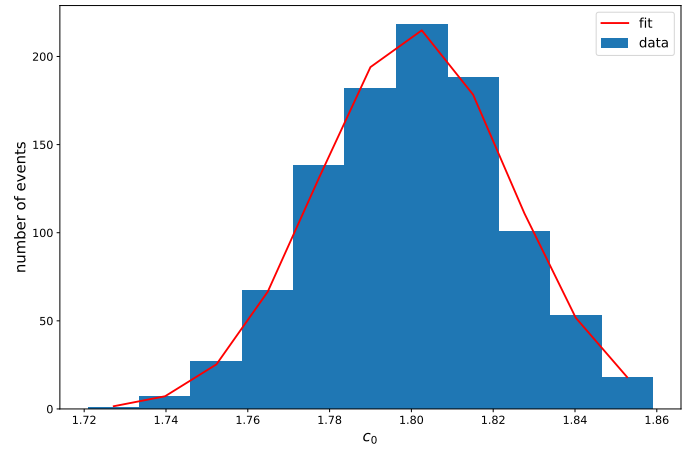
gdje je $\epsilon(\phi_i)$ nasumična vrijednost odabrana po normalnoj distribuciji sa standardnom devijacijom $\Delta = 0.1$, a parametri $c_0^{\text{true}} = 1.8$ i $c_1^{\text{true}} = 0.9$ su *a priori* definirani koeficijenti koji se smatraju „istinitima”. Sada se na ovu generiranu repliku napravila prilagodba te su uz pomoć prilagodbe određeni koeficijenti c_0 i c_1 koji najbolje opisuju generirane vrijednosti. Postupak generiranja ovakvih replika je ponovljen tisuću puta te je za svaki koeficijent c_0 i c_1 provjereno upada li u interval:

$$\begin{aligned} c_0^{\text{true}} - \Delta c_0 < c_0 < c_0^{\text{true}} + \Delta c_0; \\ c_1^{\text{true}} - \Delta c_1 < c_1 < c_1^{\text{true}} + \Delta c_1, \end{aligned}$$

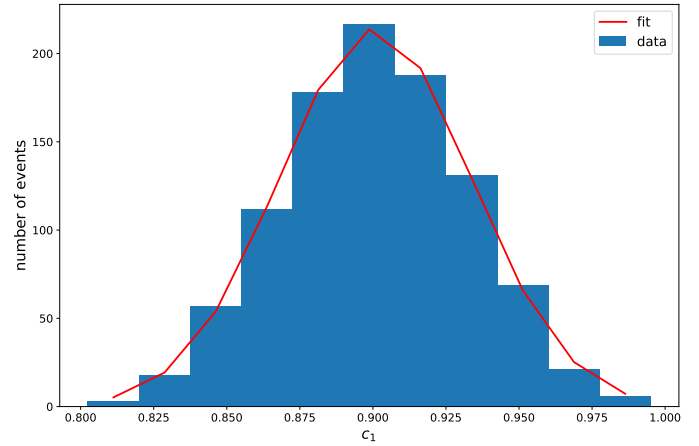
gdje su Δc_0 i Δc_1 definirani u jedn. (35). Dobiveno je da u interval upada $\approx 68\%$ koeficijenata dobivenih prilagodbom, što vrlo dobro odgovara očekivanju da se unutar jedne standardne devijacije Gaussove raspodjele nalazi $\approx 68.2\%$ vrijednosti. Također su od dobivenih vrijednosti napravljeni histogrami te je na njih prilagođena Gaussova funkcija što je prikazano na slikama 10 i 11. Vrijednosti dobivene iz prilagodbi Gaussiana su:

$$\begin{aligned} c_0 &= 1.80 \pm 0.02; \\ c_1 &= 0.90 \pm 0.03. \end{aligned}$$

Dobivene vrijednosti za pogreške razlikuju se za $\approx 10\%$ od onih koje se dobiju iz jedn. (35) što upućuje na to da navedena formule dobro opisuju situaciju u kojoj je mjerenje opterećeno statističkim pogreškama.



Slika 10: Prikaz histograma vrijednosti koeficijenata c_0 i pripadne prilagodbe za replike generirane iz jedn. (54).



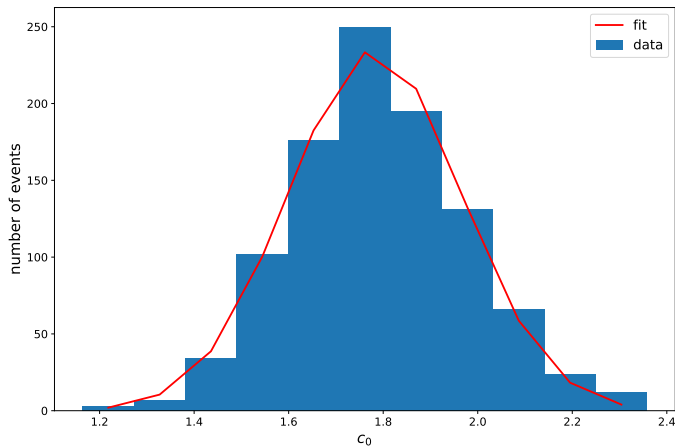
Slika 11: Prikaz histograma vrijednosti koeficijenata c_1 i pripadne prilagodbe za replike generirane iz jedn. (54).

Potom su za kuteve ϕ_i i iste parametre c_0^{true} i c_1^{true} , generirane vrijednosti σ_i po sljedećoj formuli:

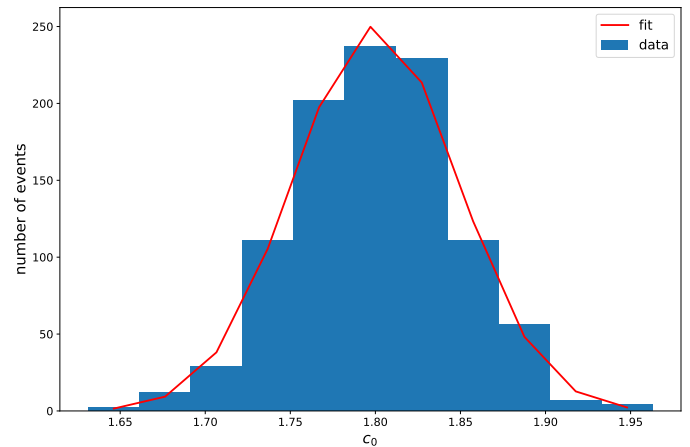
$$\sigma_i = [c_0^{\text{true}} + c_1^{\text{true}} \cos(\phi_i)] (1 + \Delta \cdot \epsilon), \quad \forall \phi_i, \quad (55)$$

gdje je ϵ nasumična vrijednost odabrana po normalnoj distribuciji sa standardnom devijacijom $\Delta = 0.1$, no sada je ta vrijednost jednaka za sve ϕ_i za razliku od prethodnog slučaja gdje je za svaki ϕ_i bila generirana nova nasumična vrijednost. Jedn. (55) služi za ispitivanje normalizacijskih pogrešaka jer su u ovom slučaju svi podaci pomaknuti za istu vrijednost te je ta vrijednost korelirana za svaki ϕ_i . Proveden je isti postupak generiranja replika kao i u prethodnom slučaju te su od koeficijenata c_0 i c_1 napravljeni histogrami na koje je napravljena prilagodba Gaussiana što je prikazano na slikama 12 i 13. Vrijednosti koje su dobivene iz prilagodbi su:

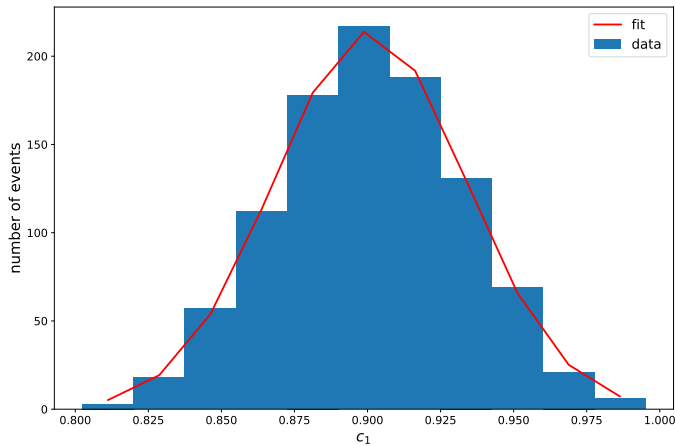
$$\begin{aligned} c_0 &= 1.8 \pm 0.2; \\ c_1 &= 0.89 \pm 0.09. \end{aligned}$$



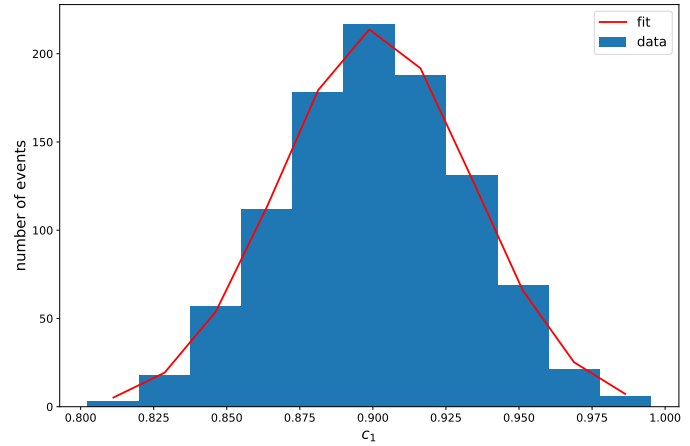
Slika 12: Prikaz histograma vrijednosti koeficijenta c_0 i pripadne prilagodbe za replike generirane iz jedn. (55).



Slika 14: Prikaz histograma vrijednosti koeficijenta c_0 i pripadne prilagodbe za replike generirane iz jedn. (56).



Slika 13: Prikaz histograma vrijednosti koeficijenta c_1 i pripadne prilagodbe za replike generirane iz jedn. (55).



Slika 15: Prikaz histograma vrijednosti koeficijenta c_1 i pripadne prilagodbe za replike generirane iz jedn. (56).

Uspoređujući dobivene vrijednosti nepouzdanosti s onima iz jedn. (45) dobiva se da je relativna razlika između teorijske vrijednosti i vrijednosti dobivene iz prilagodbe za koeficijent $c_0 \approx 10\%$ dok je za koeficijent $\approx 1\%$ što je izvrsno poklapanje teorije i eksperimenta te upućuje da jedn. (45) dobro opisuje slučaj u kojem u mjerenjima postoji normalizacijska pogreška.

Naposlijetku je isti napravljen isti postupak kao i u prethodna dva slučaja, no ovaj puta su vrijednosti σ_i određene po formuli:

$$\sigma_i = [c_0^{\text{true}} + c_1^{\text{true}} \cos(\phi_i)] (1 + \Delta \cos(\phi_i) \cdot \epsilon), \quad \forall \phi_i, \quad (56)$$

gdje je ϵ nasumična vrijednost odabrana po normalnoj distribuciji, $\Delta = 0.1$, a koeficijenti $c_0^{\text{true}} = 1.8$ i $c_1^{\text{true}} = 0.9$. Ova jednadžba služi za ispitivanje posljednje vrste greške razmatrane u ovom radu, a to je modulirana normalizacijska greška. Histogrami dobivenih koeficijenata c_0 i c_1 s pripadnim prilagodbama prikazani su na slikama 14 i 15. Iz prilagodbe su dobivene sljedeće vri-

jednosti:

$$c_0 = 1.80 \pm 0.05;$$

$$c_1 = 0.9 \pm 0.2.$$

Relativna razlika između teorijskih vrijednosti danih u jedn. (49) i (50) i vrijednosti dobivenih prilagodbom iznosi 10%. Dobivena razlika upućuje na to da izvedene formule za nepouzdanosti dobro opisuju „eksperimentalne” podatke.

5. ZAKLJUČAK

Fizika elektron-proton raspršenja se pokazala kao vrlo bogato i zanimljivo područje istraživanja u fundamentalnu strukturu protona, a samim time i ostalih nukleona. Generalizirane partonske distribucije u tom kontekstu služe kako bi objedinile prethodno razdvojene pojmove distribucije longitudinalnog impulsa, koji je opisan

partonskim distribucijskim funkcijama, i transverzalne distribucije naboja, koja je opisana form faktorima. U ovome se radu željelo rasvijetliti propagaciju pogreške pri eksperimentalnim mjerenjima dubokog virtualnog komptonskog raspršenja koji služi kao indirektan pristup GPD-ovima preko tzv. komptonskih form faktora. U tu svrhu su napravljene Monte Carlo replike modela udarnog presjeka definiranog u jedn. (52). Prvo je na podatke generirane u replikama dodana statistička pogreška te je za koeficijente dobivene iz prilagodbi modela na podatke iz replika napravljen histogram na koji je napravljena prilagodba Gaussiana. Iz prilagodbe su određene srednja vrijednost i standardna devijacija pojedinog koeficijenta te je ta standardna devijacija uspoređena sa vrijednošću dobivenom iz jedn. (35) pri čemu je dobivena relativna

razlika $\approx 10\%$. Zatim je na podatke iz replika dodana tzv. normalizacijska greška te je proveden isti postupak kao i prije. Dobivene standardne devijacije su uspoređene s vrijednostima određenim iz jedn. (44) te je za koeficijent c_0 dobivena relativna razlika $\approx 10\%$, dok za koeficijent c_1 relativna razlika iznosi $\approx 1\%$. Naposljetku je isti postupak primjenjen i na tzv. moduliranu normalizacijsku pogrešku te su uspoređene standardne devijacije određene iz prilagodbe Gaussove funkcije na podatke iz replika sa vrijednostima određenim iz jedn. (48) i (49) i dobivena je relativna razlika od $\approx 10\%$. Iz dobivenih rezultata se stoga može zaključiti da se teorijski opis za različite vrste pogrešaka dobro slaže s vrijednostima određenim iz prilagodbi na „eksperimentalne” podatke dobivene Monte Carlo metodom.

-
- [1] M. Thomson. *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press, 2013.
 [2] M. Cvitković. Proučavanje dubokog virtualnog komptonskog raspršenja pomoću strojnog učenja, 2020.
 [3] K. Kumerički, S. Liutti, and H. Moutarde. GPD phenomenology and DVCS fitting. *Eur. Phys. J. A*, 52:157, 2016.