Akcelerirani Lagranžijan i financijske opcije

Tomislav Miškić*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb
(Dated: 22. siječnja 2022.)

Sažetak

Dodatkom akceleriranog člana u Lagranžijan se uvodi stohastičnost u promatrani sustav. Analogni akcelerirani Hamiltonijan nije hermitski, stoga ne nosi fizikalni značaj što se tiče opisivanja prirodnih pojava no upravo se akcelerirani, stohastički član pokazuje primjeren za opisivanje socijalnih i ekonomski fenomena. U ovom seminaru promatramo općenito primjenu akceleriranog Lagranžijana u financijama, točnije u teoriji procjena vrijednosti financijskih opcija kroz formalizam Feynmanovih integrala po putovima. Motivirani dobrim rezultatima prilagodbi akceleriranog Lagranžijana na tržišne podatke, gdje se referiramo na radove B. E. Baaquiea iz referenci, promatramo općenito ponašanje nama zanimljive kompleksne grane rješenja akceleriranog Lagranžijana te uspoređujemo njeno načelno ponašanje s dva poznata modela ocjenjivanja financijskih opcija, Black-Scholesovim i Hestonovim modelom.

I. UVOD

Financijske opcije su tipovi monetarnih ugovora u kojemu se vlasniku ugovora daje za pravo, ali ne i obveza, da kupi ili proda određene dionice po fiksnoj cijeni do određenog datuma. Ukoliko se radi o Američkim opcijama vlasnik ugovora ima pravo iskoristiti opciju bilo kada do isteka ugovora, dok ukoliko se radi o Europskim opcijama, odnosno *vanilla* opcijama, opcija se iskorištava u vrijeme isteka ugovora. Postoje *call* i *put* opcije. Prva se odnosi na ugovor o mogućnosti kupnje, dok se druga odnosi na ugovor o mogućnosti prodaje. Financijske opcije se mogu koristiti kao sredstvo za smanjenje rizika gubitka vrijednosti dionice koju vlasnik ugovora želi prodati. Neka vlasnik određenih dionica misli da će vrijednost njegovih dionica pasti. On stupa u kontakt s osiguravajućom kućom te sklapa *put* opciju s njima gdje je on dužan njima platiti premiju ugovora, dok su oni dužni nadoplatiti do točno određenog dogovorenog iznosa za sve prodane dionice ukoliko cijena dionice vlasnika padne ispod dogovorenog iznosa. Iz navedenog primjera je očito da je premija na opciju uvelike uvjetovana dinamikom tržišta te između ostalog vremenom do isteka ugovora te spekulacijama onoga tko izdaje ugovor. Odrediti cijenu opcije s obzirom na sve poznate parametre ugovora i tržišta je glavni zadatak teorije financijskih opcija te se temelji na procjeni rizika rasta, odnosno pada cijene dionice nad kojom je opcija napisana.

Ovisnost Lagranžijana o akceleraciji uvodi stohastičnost u jednadžbe gibanja. Kao što je navedeno u sažetku, zbog nehermitičnosti akceleriranog Hamiltonijana, ovakvi sistemi nemaju fizikalnog smisla za opis prirodnih fenomena, no upravo se dodatak akceleriranog člana pokazuje ključnim za modeliranje socioloških i ekonomskih problema prema rezultatima iz literature B. E. Baaquie: *Quantum Field Theory for Finance and Economics*. Formalizam koji ćemo koristiti za opis dinamike sistema jesu Feynmanovi integrali po putovima. Dodatkom akceleriranog člana u Lagranžijan pokušavamo kvantnu proizvoljnost povezati sa stohastičnošću koja je prirodno ugrađena u Baaquie-Yang model akceleriranog Lagranžijana. Pokazuje se da je za račun amplitude prijelaza preko Feynmanovih integrala ključno poznavanje akcije te je stoga pripadna akcelerirana akcija izvedena na dva načina. Prvi, čisto kvantni Hamiltonijanski te drugi više semiklasični koji koristi akcelerirane Euler-Lagrange jednadžbe te uvođenje koordinate kao zbroj klasične koordinate i stohastičke varijable. Uvodi se kvantni prostor financijskih instrumenata gdje se evolucijom opcija određuje vrijednost opcije za dati trenutak pomoću amplitude prijelaza, odnosno jezgre evolucije.

II. RAZRADA PROBLEMA

Osnovni instrument procjene amplitude prijelaza iz početnog u konačno stanje sistema u formulaciji po integralima putova jest jezgra evolucije $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K}(x,\dot{x},x',\dot{x}';\tau) = \langle x',\dot{x}'|\, e^{-\tau H}\, |x,\dot{x}\rangle \tag{1}$$

gdje je u gornjoj jednadžbi napravljen prijelaz na Euklidsko vrijeme, što se pokazuje zgodnom transformacijom u teoriji polja. Intuicija za prijelaz te raspis osnovnih rezultata Feynmanovih integrala po putovima se nalazi u *Dodatku A*. Nas će specifično zanimati jezgra evolucije generirana akceleriranim Hamiltonijanom, odnosno Lagranžijanom:

$$H = -\frac{1}{2a}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - v\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\omega_1^2+\omega_2^2\right)v^2 + \frac{1}{2}\omega_1^2\omega_2^2 x^2 \tag{2}$$

Ono što valja imati na umu jest da gornji Hamiltonijan nije hermitski, što će se pokazati vrlo važnom informacijom u kasnijim računima. Akcelerirani Hamiltonijan dobivamo Legendrovom transformacijom akceleriranog Lagranžijana oblika:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(a\ddot{x}^2 + 2b\dot{x}^2 + cx^2\right) \tag{3}$$

* tmiskic.phy@pmf.hr

Poveznica između parametara ω_1, ω_2 i b, c jest:

$$b = \frac{1}{2}\left(\omega_1^2 + \omega_2^2\right) \tag{4}$$

$$c = \omega_1^2\omega_2^2 \tag{5}$$

Hamiltonijan H je pseudohermitski ukoliko postoji transformacija $\mathcal{Q}$ takva da:

$$e^{\mathcal{Q}/2} H e^{-\mathcal{Q}/2} = H_0 \tag{6}$$

gdje je H_0 hermitski. Za naš se akcelerirani Hamiltonijan može pokazati koristeći Hadamardovu lemu da je H_0 sustav dvaju nevezanih harmoničkih oscilatora. Pritom je transformacija $\mathcal{Q}$ dana s:

$$\mathcal{Q} = axv - b\frac{\partial^2}{\partial x \partial v} \tag{7}$$

te reproducira Hamiltonijan H_0:

$$H_0 = -\frac{1}{2\gamma}\frac{\partial^2}{\partial v^2} - \frac{1}{2\gamma\omega_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2 v^2 + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 x^2 \tag{8}$$

gdje su:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \gamma\omega_1^2\omega_2^2 \tag{9}$$

$$\sqrt{ab} = \ln\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\right) \tag{10}$$

Sve skupa Hamiltonijan H_0 možemo zapisati kao:

$$H_0 = H_x \otimes H_v \tag{11}$$

gdje su:

$$H_x = -\frac{1}{2\gamma\omega_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2\omega_2^2 x^2 \tag{12}$$

$$H_v = -\frac{1}{2\gamma}\frac{\partial^2}{\partial v^2} + \frac{\gamma}{2}\omega_1^2 v^2 \tag{13}$$

Koristeći gornje rezultate za jezgru evolucije dobivamo sljedeći izraz:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_i, v_i, x_f, v_f; \tau) = \int\int d\xi d\xi' d\eta d\eta' \ \langle x_f, v_f| \, e^{\mathcal{Q}/2} \, |\xi', \eta'\rangle \cdot \\ \cdot \ \langle \xi', \eta'| \, e^{-\tau H_0} \, |\xi, \eta\rangle \, \langle \xi, \eta| \, e^{-\mathcal{Q}/2} \, |x_i, v_i\rangle \end{aligned} \tag{14}$$

Koristeći jednadžbe (11) − (13) se gornji matrični elementi mogu rastaviti na matrične elemente u potprostoru koordinate i brzine što olakšava račune te se dobivaju sljedeći izrazi:

$$\begin{aligned} \langle x_f, v_f| \, e^{\mathcal{Q}/2} \, |\xi', \eta'\rangle = \frac{i}{2\pi}\gamma\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2} \cdot \\ \cdot \ \exp\left\{\mathcal{G}\left(x_f v_f + \xi'\eta'\right) - \mathcal{H}\left(x_f\eta' + \xi' v_f\right)\right\} \end{aligned} \tag{15}$$

gdje su $\mathcal{G}$ i $\mathcal{H}$ dani s:

$$\mathcal{G} = \gamma\omega_1^2 \tag{16}$$

$$\mathcal{H} = \gamma\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2} \tag{17}$$

Matrični elementi u potprostoru brzine i koordiante su dani s:

$$\begin{aligned} \langle \xi'| \, e^{-\tau H_x} \, |\xi\rangle = \sqrt{\frac{\gamma\omega_1^2\omega_2}{2\pi\sinh(\tau\omega_2)}} \cdot \\ \cdot \ \exp\left\{ - \frac{\gamma\omega_1^2\omega_2}{2\sinh(\tau\omega_2)}\left((\xi^2 + \xi^{2\prime})\cosh(\tau\omega_2) - 2\xi'\xi\right)\right\} \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} \langle \eta'| \, e^{-\tau H_v} \, |\eta\rangle = \sqrt{\frac{\gamma\omega_1}{2\pi\sinh(\tau\omega_1)}} \cdot \\ \cdot \ \exp\left\{ - \frac{\gamma\omega_1}{2\sinh(\tau\omega_1)}\left((\eta^2 + \eta^{2\prime})\cosh(\tau\omega_1) - 2\eta'\eta\right)\right\} \end{aligned} \tag{19}$$

Dobivene rezultate vraćamo natrag u jednadžbu (14) te dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_i, v_i, x_f, v_f; \tau) = \mathcal{N} e^{-\mathcal{G}(x_f v_f - x_i v_i)} \int d\xi' d\xi d\eta' d\eta \ \cdot \\ \cdot \ \exp\left\{ - \frac{\gamma}{2}\vec{X}^T \cdot \hat{\mathbf{M}} \cdot \vec{X} + \vec{J}^T \cdot \vec{X}\right\} \end{aligned} \tag{20}$$

Izrazi za normalizaciju $\mathcal{N}$, vektore $\vec{X}$ i $\vec{J}$ te matricu $\hat{\mathbf{M}}$ su dani u *Dodatku G*. Koristeći rezultat pokazan u *Dodatku C* možemo svesti gornji rezultat na sljedeći oblik:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x_i, v_i, x_f, v_f; \tau) = \frac{4\pi^2\mathcal{N}}{\gamma^2\sqrt{\det\hat{\mathbf{M}}}} \cdot \\ \cdot \ \exp\left\{ - \mathcal{G}(x_f v_f - x_i v_i) + \frac{1}{2\gamma}\vec{J}^T \cdot \hat{\mathbf{M}} \cdot \vec{J}\right\} \end{aligned} \tag{21}$$

Ukoliko iskoristimo rezultate pokazane u *Dodacima A* i *D*. Specifično se ovdje referiramo na izraz za jezgru evolucije preko integrala akcije iz *Dodatka A* te odnos akcije i klasične akcije iz *Dodatka D*, možemo klasičnu akciju $\mathcal{S}_C$, zapisati kao:

$$\mathcal{S}_C = -\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{4} A_{ij} X_i X_j \tag{22}$$

odnosno, raspisivanjem gornjeg izraza:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_C = -\frac{1}{2}A_{11}\left(x_i^2 + x_f^2\right) - \frac{1}{2}A_{22}\left(v_i^2 + v_f^2\right) - A_{14}\left(x_i v_f - \right. \\ \left. + x_f v_i\right) - A_{12}\left(x_i v_i - x_f v_f\right) - A_{13} x_i x_f - A_{24} v_i v_f \end{aligned} \tag{23}$$

Do analognih se rezultata za jezgru evolucije može doći na druge načine. U *Dodatku D* je dan alternativni semiklasični način na koji se mogu izvesti gornji rezultati za jezgru evolucije. U tome se izvodu odstupanje od klasične trajektorije uvodi preko stohastičke opservable ξ koja zadovoljava trivijalne rubne uvjete u koordinati i brzini u početnoj i konačnoj točki evolucije u konfiguracijskog prostora.

Europske *call* i *put* opcije su vrsta financijskog ugovora u kojem onaj koji posjeduje ugovor ima mogućnost kupiti ili prodati dionice po fiksnoj cijeni K, tzv. *strike price*, u ograničenom periodu. Cijena premije na takvu financijsku opciju je uvjetovana imovinom na kojoj je građena financijska opcija. Savršeni primjer *call* opcije bi bila npr. kupovina kuće. Pri kupovini se s prodavačem ulazi u ugovor po kojemu se dogovara cijena po kojoj će prodavač prodati kuću kupcu do točno određenog datuma neovisno o ponašanju tržišne cijene imovine. Uz navedenu cijenu se dogovara i premija kako bi se pokazala ozbiljnost u namjeri kupovine kuće. Premija bi odgovara cijeni financijske opcije te je uvjetovana vremenom do isteka ugovora, volatilnošću tržišta i sl. Primjer *put* opcije bi bilo osiguravanje cijena dionica koje kupac ugovora posjeduje, od rizika pada vrijednosti. Kupac ugovora plaća premiju te ukoliko cijena dionice padne ispod dogovorenog *Strike pricea* izdavač ugovora nadoplaćuje kupcu ugovora do dogovorene cijene. Glavni zadatak u teoriji financijskih opcija jest procijeniti premiju na financijsku opciju, što uvjetuje procjenjivanje rizika fluktuacija tržišne cijene imovine u vremenu do isteka ugovora.

Označimo *call* opciju s $C(t, S(t))$, gdje je T vrijeme isteka ugovora, a $S(t)$ vrijednost dionice. Vrijednost funkcije $C(t, S(t))$ u vrijeme isteka ugovora je jasna te se naziva *payoff function* $g(T)$:

$$C(T, S(T)) \equiv g(T) = \begin{cases} S(T) - K, & S(T) > K \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{24}$$

Analogno:

$$Put(T, S(T)) \equiv h(T) = \begin{cases} K - S(T), & K > S(t) \\ 0, & \text{inače} \end{cases} \tag{25}$$

gdje je $h(T)$ *payoff function* od *put* opcije.

S obzirom da je cijena dionice $S(t)$ pozitivno definitna veličina, uvodi se opservabla x takva da ona opisuje logaritamsku vrijednost dionice, odnosno:

$$S = e^x \geq 0 \tag{26}$$

Definiramo beskonaćnodimenzionalni nenormalizabilni linearni vektorski prostor $\mathcal{V}$ svih financijskih instrumenata. Financijski instrumenti su sve zamislive opservable koje ovise o varijabli x uvedenoj u gornjoj jednadžbi. Prostor je nenormalizabilan, jer nije moguće normalizirati vrijednost dionica, koje su glavni elementi prostora $\mathcal{V}$. Postavljamo slijedeće pretpostavke na naš vektorski prostor:

(a) Svi financijski instrumenti su elementi prostora stanja $\mathcal{V}$, uključujući cijenu opcije $C(t)$:

$$S(x) = \langle x|S\rangle = e^x \tag{27}$$

$$C(t, x) = \langle x|C, t\rangle \tag{28}$$

$$g(x) = \langle x|g\rangle \tag{29}$$

(b) Cijena opcije zadovoljava Black-Scholes-Schrödinger jednadžbu:

$$\partial_t |C, t\rangle = H |C, t\rangle \tag{30}$$

Izvedimo izraz za cijenu *call* i *put* opcije:

$$|C, t\rangle = e^{tH} |C, 0\rangle \tag{31}$$

$$|C, T\rangle = e^{TH} |C, 0\rangle \equiv |g\rangle \tag{32}$$

Iz jednadžbe (32) imamo:

$$|C, 0\rangle = e^{-TH} |g\rangle \tag{33}$$

onda koristeći jednadžbu (31) pišemo:

$$|C, t\rangle = e^{-(T-t)H} |g\rangle \tag{34}$$

odnosno:

$$C(t, x) = \langle x| e^{-(T-t)H} |g\rangle \tag{35}$$

Ubacivanjem jedinice u gornji izraz dobivamo:

$$C(x, \tau; K) = \int_{+\infty}^{+\infty} dx' \langle x| e^{-\tau H} |x'\rangle g(x') \tag{36}$$

te analogno za *put* opciju:

$$Put(t, x) = \int_{+\infty}^{+\infty} dx' \langle x| e^{-\tau H} |x'\rangle h(x') \tag{37}$$

Važno je za primijetiti da se u gornja dva izraza javlja jezgra evolucije $\mathcal{K}$ kao matrični element od $e^{-\tau H}$. Jezgra evolucije je amplituda prijelaza dionice iz e^x u $e^{x'}$ stanje tijekom vremena τ. Za poznavanje *call* i *put* opcije nam je važno poznavanje jezgre evolucije i *payoff* funkcije.

Kako bi teorija financijskih opcija bila slobodna od mogućnosti financijske arbitraže, Hamiltonijan sistema mora zadovoljavati Martingaleov uvjet. Arbitraža na tržištu je proces bezrizične zarade u kojemu određeni kupac kupi određene dionice po nekoj cijeni te ih zatim netom poslije proda na nakom drugom tržištu iskorištavajući blage fluktuacije u cijeni na drugim tržištima. U slobodnom govoru bi se Martingaleov uvjet mogao svesti na to da kockar koji ulazi u kockarnicu s određenom svotom novca u prosjeku mora izaći s istom tom svotom novca. Matematička formulacija i izvod Martingaleovog uvjeta se mogu naći u *Dodatku F*. Izvedimo kvantni Hamiltonijanski oblik Martingaleovog uvjeta koristeći rezultate iz *Dodatka F*. Uvodimo Martingaleov uvjet kao:

$$e^x = e^{-r\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \, \mathcal{K}(x, x'; \tau) e^{x'} \tag{38}$$

gdje je r bezrizična kamatna stopa. Gornju jednadžbu možemo prepisati u sljedećem obliku:

$$\langle x|S\rangle = \langle x|\, e^{-\tau H} \int_{+\infty}^{+\infty} dx' \; |x'\rangle \, \langle x'|S\rangle \tag{39}$$

U jednadžbi (39) prepoznajemo jedinicu te slijedi:

$$|S\rangle = e^{-\tau H} \, |S\rangle \tag{40}$$

odnosno:

$$H\,|S\rangle = 0 \tag{41}$$

Gornji je izraz ekvivalentan izrazu:

$$He^{x} = 0 \tag{42}$$

Nakon što smo izveli jednadžbu (42), odnosno Martingaleov uvjet, preostaje nam izgraditi Hamiltonijan takav da zadovoljava Martingaleov uvjet. Pogledavši uvjet, odmah je jasno da Hamiltonijan ne smije sadržavati članove koji ovise o koordinati, već samo o impulsu:

$$H = a + b \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{43}$$

Koeficijent a ćemo odrediti tako da sagledamo *put* opciju za koju dogovorena cijena divergira $K \to +\infty$, s obzirom da će se tada uvijek izvršiti opcija:

$$Put(x,t) = \langle x|\, e^{-\tau H}\, |h\rangle \xrightarrow[K \to +\infty]{} \langle x|\, e^{-\tau H}\, |K\rangle \tag{44}$$

U gornjoj jednadžbi stanje $|K\rangle$ je neovisno o x, zbog čega slijedi:

$$Put(x,t) = e^{-a\tau} K \tag{45}$$

Po principu izbjegavanja arbitraže trenutačna vrijednost *put* opcije mora biti dogovorena vrijednost K smanjena za bezrizičnu kamatnu stopu r, odnosno:

$$Put \to e^{-r\tau} K \tag{46}$$

Usporedbom zatim vidimo:

$$a = r \tag{47}$$

Da bi odredili parametar b pozivamo se na jednadžbu (42) te ju raspisujemo:

$$\left(r + b\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) e^{x} = 0 \tag{48}$$

Raspisom se dobiva:

$$b = \frac{\sigma^2}{2} - r \tag{49}$$

Sve skupa Hamiltonijan sada poprima oblik Black-Scholes Hamiltonijana:

$$H_{BS} = r + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) \cdot \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\sigma^2}{2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} \tag{50}$$

Bitno je za napomenuti kako je gornji Hamiltonijan nehermitski zbog linearnog impulsnog člana:

$$\frac{\partial}{\partial x}^{\dagger} = -\frac{\partial}{\partial x} \tag{51}$$

Evolucija financijskih opcija je dana Black-Scholes-Schrödinger jednadžbom koju sada možemo zapisati kao:

$$\partial_t C(x,\tau) = \frac{\sigma^2}{2}\partial_x^2 C(x,\tau) - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r \right) \partial_x C(x,\tau) - rC(x,\tau) \tag{52}$$

Nažalost, Black-Scholesov model ne daje pravilan opis financijskih opcija. Razlog je u tome što BS model pretpostavlja da jezgra evolucije ne ovisi o porastu vrijednosti imovine na kojoj se temelji ugovor u jedinici vremena već samo o njenoj vrijednosti. Navedeno se očituje u tome što se volatilnost u modelu uzima da je vremenski neovisna. Način na koji se popravlja model jest da se definira implicitna volatilnost preko tržišnih podataka koja je sada ovisna o τ, K i t.

Baaquie-Yangov model koristi kao podlogu akcelerirani Hamiltonijan iz jednadžbe (2), što znači da će evolucija sistema ovisiti o koordinati i brzini. Navedeno je bitna razlika jer Black-Scholes model uzima u obzir samo trenutnu vrijednost dionice, dok će Baaquie-Yangov model uzimati u obzir i promjenu vrijednosti u jedinici vremena. Sve prije uvedene i izvedene formule i dalje vrijede samo se trebaju prilagoditi. Izraz za cijenu *call* opcije postaje:

$$C(x(t), \dot{x}(t), \tau; K) = \int dx d\dot{x}\, \mathcal{P}(x, \dot{x}, x', \dot{x}'; \tau) g(x', \dot{x}'; K) \tag{53}$$

gdje je $\mathcal{P}$ sada normalizirana raspodjela koja se definira na sljedeći način:

$$\mathcal{P}(x, \dot{x}, x', \dot{x}'; K) = \frac{\mathcal{K}(x, \dot{x}, x', \dot{x}'; \tau)}{\int dx' d\dot{x}'\, \mathcal{K}(x, \dot{x}, x', \dot{x}'; \tau)} \tag{54}$$

Razlog zašto se raspodjela $\mathcal{P}$ definira kao normalizacija jezgre evolucije u BY modelu jest taj što BY Hamiltonijan nije Martingaleov odnosno:

$$H_{BY} e^{x} \neq 0 \tag{55}$$

Uvjetna vjerojatnost $\mathcal{P}(x, \dot{x}, x'; \tau)$ se dobiva integriranjem po $\dot{x}'$ opservabli. Navedeni se postupak provodi jer *payoff* funkcija ne ovisi o brzini $\dot{x}'$ pa se opservabla eliminira iz izraza. BY *call* opciju tada možemo zapisati kao:

$$C_{BY}(x(t), \dot{x}(t), \tau, K) = \int dx'\, \mathcal{P}_{BY}(x, \dot{x}, x'; \tau) \left[e^{x'} - K \right]_{+} \tag{56}$$

gdje indeks plus u gornjoj jednadžbi označava skraćeni izraz za argument funkcije u uglatim zagradama množen Heavisideovom *step* funkcijom istog argumenta:

$$\left[e^{x'} - K \right]_{+} = \left(e^{x'} - K \right) \cdot \Theta \left(e^{x'} - K \right) \tag{57}$$

Specifično opcije koje ćemo promatrati u sljedećem računu i primjeni Martingaleovog uvjeta jesu forex (FX) opcije, odnosno *foreign exchange* opcije na razmjene strane i domaće valute, obzirom na to da su najgeneralnije financijske opcije koje možemo promatrati te se lakim izvrjednjavanjem postižu rezultati vezani za *equity* opcije. Njihova se generalnost ističe u tome što su bezrizične kamatne stope domaće valute i strane valute različite, nazovimo ih r_f i r_d kao stranu i domaću kamatnu stopu. Martingaleov uvjet za forex opcije tada postaje:

$$e^{-r_f\tau}e^{x} = e^{-r_d\tau}\int_{+\infty}^{+\infty} dx'\,\mathcal{P}(x,\dot{x},x';\tau)e^{x'} \tag{58}$$

Integracijom jednadžbe (54) po $\dot{x}'$ opservabli se dobiva izraz za uvjetnu raspodjelu:

$$\mathcal{P}(x,v,x';\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2}}\cdot\exp\left\{-\frac{1}{2v^2}\Big(-x'+\alpha x+\xi v +(r_d-r_f)\tau-\frac{\nu^2}{2}\Big)^2\right\} \tag{59}$$

Da bi zadovoljili generalizirani Martingaleov uvjet (58) trebamo imati $\alpha = 1$ te $\xi = 0$, uspoređujući s lijevom stranom jednadžbe (58). Prilagođavajući model na tržišne podatke te gledajući ovisnost o različitim τ bi se moglo zaključiti kako su gornji uvjeti djelomično zadovoljeni. Parametar α konvergira u jedinicu kako $\tau \to 0$, dok parametar ξ je nula za jako male τ te zatim opet konvergira u nulu kako $\tau \to \infty$. Drugim riječima akcelerirani Hamiltonijan nije Martingaleov osim za jako male $\tau \approx 0$. Navedeno može biti posljedica postavki modela, no s druge strane također može ukazivati na nišu ponašanja tržišta u kojoj mogućnosti arbitraže postoje, samo su izrazito potisnute te čim se jedna otvori dolazi do raznih efekata koji je suzbijaju, ukoliko bi tada tržište evoluiralo po BY modelu. Kako bi pravilno mogli modelirati tržište na naš BY model moramo uvesti dodatna dva parametra, nazovimo ih λ i η. Navedeni parametri dobivaju smisao kroz pojam *tržišnog vremena* $z(t)$:

$$z(t) = \lambda\left(\frac{t}{\lambda}\right)^{\eta} \tag{60}$$

Smisao tržišnog vremena jest ocijeniti subjektivni pojam vremena trgovaca. Naime, s obzirom na to pod utjecajem kojih je informacija trgovac, drukčije može percipirati skalu vremena. Navedeno tržišno vrijeme je prijeko potrebno kako bi tržišna dinamika mogla biti dobro prilagođena BY modelom. Imajući to na umu radi se prijelaz s fizikalnog vremena t na tržišno vrijeme z.

Sada možemo sabrati sve rezultate ovog poglavlja kako bi napisali krajnji izraz za cijenu *call* opcije u BY modelu:

$$C_{BY}(x,\dot{x};\tau,K) = e^{-r_d\tau}\int_{+\infty}^{+\infty} dx'\,\mathcal{P}(x,x';\dot{x};\tau)\left[e^{x'}-K\right]_+ \tag{61}$$

$$C_{BY}(x,\dot{x};\tau,K) = e^{-r_f\tau}e^{\alpha x+\xi\dot{x}}N(d_+) - e^{-r_d\tau}KN(d_-) \tag{62}$$

gdje su $d_\pm$:

$$d_\pm = \frac{1}{v}\cdot\left(\alpha x+\xi\dot{x}-\ln\,(K)+(r_d-r_f)\,\tau\pm\frac{1}{2}v^2\right) \tag{63}$$

te je $N(x)$:

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} dz\,e^{-\frac{z^2}{2}} \tag{64}$$

Da bi reproducirali rezultat za *equity* opcije zahtjevamo $r_f = 0$. U narednom se poglavlju detaljnije promatra ponašanje triju grana akceleriranog modela te triju osnovnih modela od kojih polazimo, BS, Hestonovog i BY modela.

III. REZULTATI ANALIZE

Raspisivanjem izraza (54) te dodatnom integracijom po $\dot{x}'$ varijabli se dobiva izraz za normaliziranu uvjetnu raspodjelu vjerojatnosti $\mathcal{P}_{BY}(x,\dot{x},x';\tau)$. Sukladno očekivanju temeljenom na jednadžbi (23), dobiva se kao krajnji izraz Gaussijan, odnosno:

$$\mathcal{P}_{BY}(x,\dot{x},x';\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu^2(\tau)}}\cdot e^{-\frac{1}{2\nu^2}(x'-\mu(x,v))^2} \tag{65}$$

Drift i varijanca su određeni izrazima:

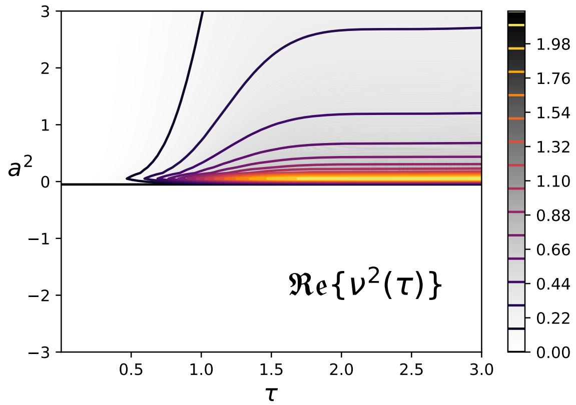
$$\nu(\tau) = \sqrt{\frac{M_{22}}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}} \tag{66}$$

$$\mu(x,v) = -\frac{M_{22}}{M_{11}M_{22}-M_{12}^2}\cdot\left[x\left(M_{13}+\frac{M_{12}M_{14}}{M_{22}}\right)+ v\left(M_{14}-\frac{M_{24}M_{12}}{M_{22}}\right)-2bj+asM_{12}\right] \tag{67}$$

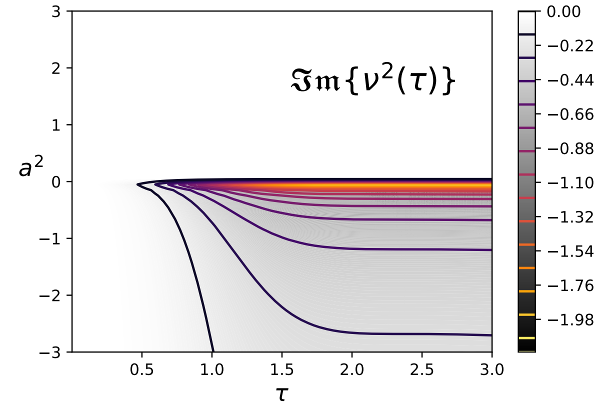
M komponente su detaljno raspisane u *Dodatku D*. Do gornjih se rezultata došlo po akciji danoj u jednadžbi (23) uz dva dodatka. Naime, radi općenitosti te mogućnosti promatranja što se događa sa sistemom ukoliko dodamo driftne članove u koordinati i brzini, nađena je uvjetna vjerojatnost za Lagranžijan oblika:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(a(\ddot{x}+s)^2+2b(\dot{x}+j)^2+cx^2\right) \tag{68}$$

gdje j i s predstavljaju driftne članove za koordinatu i brzinu te se pretpostavlja da su konstantni. Njihovo je ponašanje ukratko opisano nakon jednadžbe (59), no dalje iznosimo općenito ponašanje za generalizirani slučaj $s \neq 0$. Temeljeno na jednadžbi (103) tri grane ponašanja sistema po akceleriranom Lagranžijanu jesu kompleksna, kritična i realna, odnosno redom definirani izrazima



Slika 1. Ovisnost realnog dijela varijance BY uvjetne raspodjele vjerojatnosti o a^2 i τ, gdje je obavljena restrikcija parametara a, r, ζ na a^2 kroz ograničenje $r = \zeta = 1$, analogna opisu ispod jednadžbe (69).



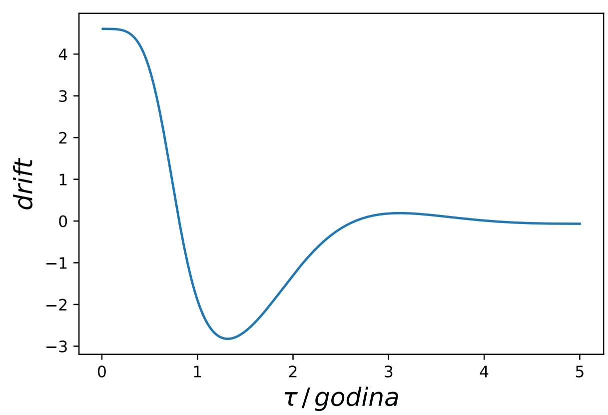
Slika 2. Ovisnost imaginarnog dijela varijance BY uvjetne raspodjele vjerojatnosti o a^2 i τ, gdje je obavljena restrikcija parametara a, r, ζ na a^2 kroz ograničenje $r = \zeta = 1$, analogna opisu ispod jednadžbe (69).

$b^2 < ac$, $b^2 = ac$, $b^2 > ac$. Promotrimo prvo kako izgleda varijanca u ovisnosti o τ. Radimo restrikciju s tri parametra a, r i ζ, na jednog radi jednostavnosti prikaza na način da postavimo ograničenje $r = \zeta = 1$. U tom slučaju parametar b postaje trivijalan, dok izraz ac postaje jednak $4a^2$. Tada ako se podsjetimo uvjeta za svaku granu imamo sljedeće uvjete:

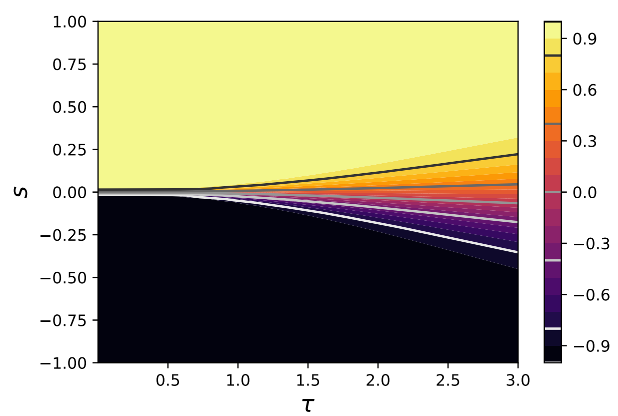
$$\text{grana rješenja} = \begin{cases} \text{kritična grana,} & a = 0 \\ \text{kompleksna grana,} & a \in \mathbb{R} \\ \text{realna grana,} & \mathfrak{Re}\{a\} = 0 \end{cases} \tag{69}$$

Gornja tri uvjeta najjednostavnije možemo sklopiti na istu os ukoliko sagledamo parametar a^2, koji je jednak, veći ili manji od nule za kritičnu, kompleksnu i realnu granu redom. Na *Slici 1.* se nalazi realni dio varijance u ovisnosti o a^2 i τ, dok se na *Slici 2.* nalazi imaginarni dio. Iz navedenih se grafova jasno vidi da realni dio varijance u kompleksnoj grani teži u nulu u limesu $\tau \to 0$, dok u limesu $\tau \to \infty$ teži u konstantu. Kao što bi i očekivali netrivijalni imaginarni dio varijance u fizikalno ostvarivoj grani rješenja nema smisla. Upravo do takvog zaključka možemo doći ukoliko sagledamo graf sa *Slike 2.* gdje se vidi da u $a^2 > 0$ intervalu imaginarni dio postaje trivijalan. U kritičnoj grani, odnosno u $a^2 = 0$, dolazi do divergencije varijance u realnom i imaginarnom dijelu. Temeljem prethodnih zaključaka u specifičnom slučaju restrikcije, koji je sam po sebi dovoljan da pokaže nevaljanost grana rješenja, zaključujemo kako realna i kritična grana zbog divergencija i imaginarnosti ne mogu predstavljati rješenja koja oponašaju tržište.

Tipični oblik driftnog člana za uređenu trojku parametara u kompleksnoj grani jest oblika koji je dan na *Slici 3.* Na navedenom se grafu vidi da driftni član u limesu $\tau \to \infty$ teži u nulu, dok u limesu $\tau \to 0$ teži u konstantu. Da bi sustav bio Martingalski prema jednadžbi (59) i



Slika 3. Ovisnost driftnog člana o τ za slučaj u kompleksnoj grani dan parametrima (a, r, ζ) = (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$).



Slika 4. Ovisnost driftnog člana o τ za slučaj u kompleksnoj grani dan parametrima (a, r, ζ) = (1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$).

razmatranjima ispod parametar α mora biti jednak jedinici, dok parametar ξ mora biti trivijalan. Trivijalnost parametra ξ eliminiramo kao mogući problem jer promatramo restrikciju na evoluciju dionica čija je početna brzina trivijalna, nadalje prema navedenom grafu u limesu $\tau \to 0$ drift teži u konstantu koja je upravo jednaka 4.60517018599, što odgovara $\ln(100)$, jer u svim razmatranjima uzimamo da je početna cijena dionice $S = 100\,\$$. Dakle uistinu u granici malih τ je zadovoljeno $\alpha \approx 1$.

Ukoliko pretpostavimo da netrivijalni driftni član brzine s ima smisla Martingaleov uvjet prema jednadžbi (67) zapisujemo kao:

$$\tilde{j} + \tilde{s} = -\frac{\nu^2(\tau)}{2} \tag{70}$$

uz prijašnja dva navedena uvjeta $\alpha = 1$ i $\xi = 0$. U gornjoj su jednadžbi varijable s tildom kratice iz jednadžbe (67) takve da se driftni član može zapisati kao:

$$\mu(x, \dot{x}; \tau) = \alpha x + \xi \dot{x} + \tilde{j} + \tilde{s} \tag{71}$$

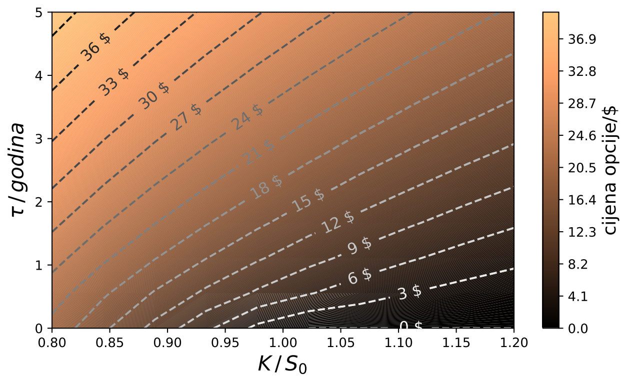
Koristeći ograničenje iz jednadžbe (71) možemo vidjeti kako određena zadana vrijednost parametra drifta brzine uvjetuje evolucije parametra koordinate. Navedena je ovisnost dana na *Slici 4.* te se jasno može vidjeti što je vrijeme do isteka ugovora manje to je veći skok oko $s = 0$, što je posljedica toga što je varijanca u kompleksnoj grani trivijalna u limesu $\tau \to 0$ te toga što $\tilde{s}$ u sebi ima još dodatnu komponentu M_{12} za razliku od $\tilde{j}$. Navedeni se driftni parametri preko jednadžbe (70) eliminiraju iz uvjetne raspodjele te se uklanja proizvoljnost iz konačnog izraza.

Iz navedenih se razmatranja vezanih za driftni član i varijancu može izvesti osnova problema kod numeričkog ocjenjivanja opcija evouliranih BY Hamiltonijanom. Ukoliko se uzimaju opcije takvog vremena do isteka ugovora da drift više nije jednak $\ln{(100)}$, moramo imati na umu da dolazi do mogućnosti arbitraže na tržištu koje evoluira po BY Hamiltonijanu. U suprotnom pretpostavimo da je τ približno trivijalan, tada varijanca postaje toliko mala da se u potpunosti isključuju mogućnosti naglih skokova dionice uzrokovanih egzogenim pobudama. Gornje zaključke valja imati na umu pri promatranju rezultata BY opcije te interpretaciji.

Modeli s kojima ćemo uspoređivati ponašanje BY evolucije jesu *Black-Scholesov* model i *Hestonov* model. Black-Scholesov model je model konstantne volatilnosti i stohastičke dionice. Model je definiran Langevinovom stohastičkom jednadžbom:

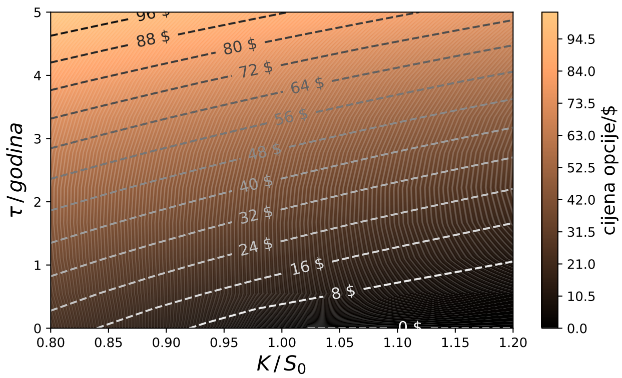
$$dS(t) = \phi S(t)dt + \sigma S(t)R(t)dt \tag{72}$$

gdje je $R(t)$ bijeli šum. BS model je zbog konstantne varijance po definiciji Wienerov proces s driftnim članom. Simulaciju BS opcije smo radili za 250 diskretiziranih koraka te 10^5 različitih generiranih putova dionice u vremenu za svaki uređeni par (K, τ). Domena smo uzimali do 5 godina u vremenu do isteka ugovora te 20% ispod i iznad početne cijene dionice od $100\,\$$, odnosno $D = [80\,\$, 120\,\$] \times [0\,god., 5\,god.]$, uz to da je svaki interval u Kartezijevom produktu domene diskretiziran na 10 jednakih intervala. Na *Slici 5.* se može vidjeti cijena *call* na dionicu čija je početna vrijednost $S_0 = 100\,\$$ te bezrizična kamatna stopa $r = 5\%$ i volatilnost $\sigma_{BS} = 0.2\,god.^{-1}$, što će biti identičan odabir kao i u razmatranjima vezanim za Hestonov model. Jasno se vidi na navedenom grafu kako cijena opcije divergira kako τ divergira, dok cijena postaje trivijalna što je K veći od S_0. Navedena oba limesa imaju smisla, limes divergirajućeg vremena je sam po sebi objašnjiv time što je ugovor na više vremena, duže se treba baviti s izvršavanjem ugovora te se ostavlja više vremena da osoba koja posjeduje opciju procijeni kakvo bi moglo biti ponašanje tržišta, nadalje gledajući drugi limes što je K veći to je manja šansa da će dionica završiti u trenutku $T = t_0 + \tau$ iznad te dogovorene vrijednosti K, štoviše u limesu $K \to \infty$ cijena mora biti nula. Nadalje posljednja stvar koja je više radi provjere je li došlo do greške u računima negdje jest kolika je cijena u $\tau = 0$. Naime cijena *call* opcije dogovorene cijene K, koja se izvršava u istom trenutku u kojem se potpisuje mora vrijediti $\max\{K - S(T), 0\}$ te svi različiti modeli se tu moraju slagati jer je to činjenica neovisna o tome kakvim Hamiltonijanom evoluiramo sistem.

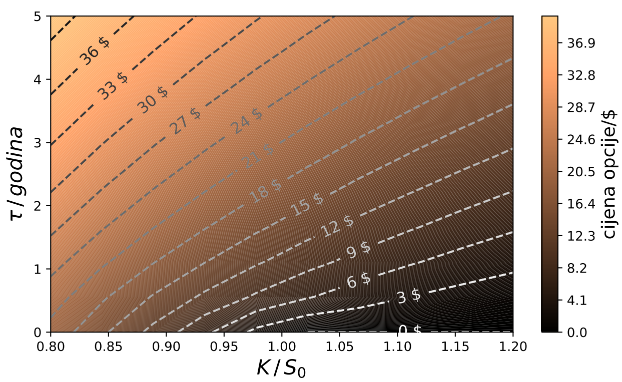


Slika 5. Ovisnost cijene *call* opcije s početnom vrijednošću $S_0 = 100\,\$$, volatilnosti $\sigma = 0.2\,god.^{-1}$, evoluirane BS modelom s bezrizičnom kamatnom stopom $r = 0.05$.

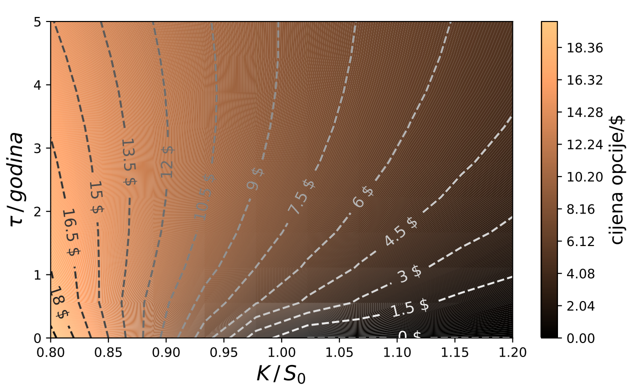
Hestonov model u stohastički dio u dionici također podrazumijeva i stohastičku volatilnost, odnosno varijancu. Uz stohastički dio se može uzimati da varijanca ima i driftni dio, no u tom bi slučaju morali pretpostaviti determinističku ovisnost generalnog ponašanja varijance. U našem ćemo se slučaju zadržati na čisto stohastičkoj varijanci za Hestonov model, gdje će Gaussijan biti centriran na $\sigma = 0.2 god.^{-1}$ kao i kod BS model. Drugim riječima, razlika između Hestonovog opisa i opisa s konstantnom volatilnošću koji smo imali u prethodnom paragrafu jest to što sada modeliramo volatilnost također kao stohastičku varijablu s netrivijalnom korelacijom prema Wienerovom procesu dionice S. Pokažimo vezu između bijelih šumova dionice i volatilnosti u slučaju kada je nji-



Slika 6. Ovisnost cijene *call* opcije s početnom vrijednošću $S_0 = 100\,\$$, evoluirane Hestonovim modelom s korelacijom dvaju Wienerovih procesa dionice i volatilnosti $\rho = 1$ te bezrizičnom kamatnom stopom $r = 0.05$.



Slika 7. Ovisnost cijene *call* opcije s početnom vrijednošću $S_0 = 100\,\$$, evoluirane Hestonovim modelom s korelacijom dvaju Wienerovih procesa dionice i volatilnosti $\rho = 0$ te bezrizičnom kamatnom stopom $r = 0.05$.



Slika 8. Ovisnost cijene *call* opcije s početnom vrijednošću $S_0 = 100\,\$$, evoluirane Hestonovim modelom s korelacijom dvaju Wienerovih procesa dionice i volatilnosti $\rho = -1$ te bezrizičnom kamatnom stopom $r = 0.05$.

hova korelacija ρ, $|\rho| \leq 1$:

$$W_t^{(2)} = \rho W_t^{(1)} + \sqrt{1-\rho^2} Z_t \tag{73}$$

$W_t^{(1)}$ je prvi Wienerov proces, $W_t^{(2)}$ je drugi te je Z_t normalna nasumična varijabla. Ukoliko je $\rho = \pm 1$ procesi su u potpunosti korelirani, ukoliko je $\rho = 0$, nisu uopće korelirani. Navedeno se vidi jednostavnim izvrjednjavanjem gornje jednadžbe.

$$V\left[W_t^{(2)}\right] = \rho^2 V\left[W_t^{(1)}\right] + \left(1-\rho^2\right) V\left[Z_t\right] \tag{74}$$

gdje je $V\left[\,\cdot\,\right]$ varijanca nasumične opservable. Sagledajmo kovarijancu $W_t^{(1)}$ i $W_t^{(2)}$:

$$Cov\left[W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right] = \rho Cov\left[W_t^{(1)}, W_t^{(1)}\right] +$$

$$+ \left(1-\rho^2\right)^{\frac{1}{2}} Cov\left[W_t^{(1)}, Z_t\right] \tag{75}$$

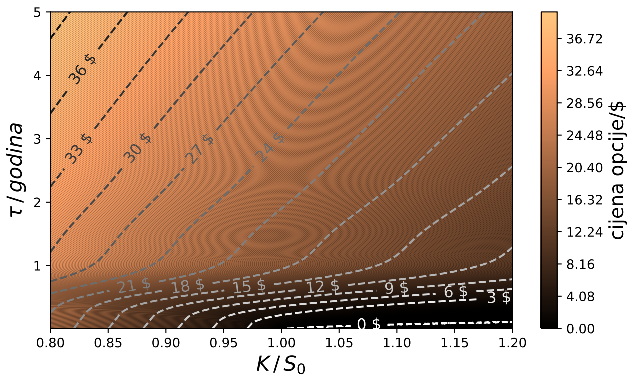
Kovarijanca varijable sa samom sobom je jednaka varijanci koja je jednaka t proteklom vremenu te vrijedi trivijalnost kovarijance $W_t^{(1)}$ i Z_t varijabli:

$$Cov\left[W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right] = \rho t \tag{76}$$

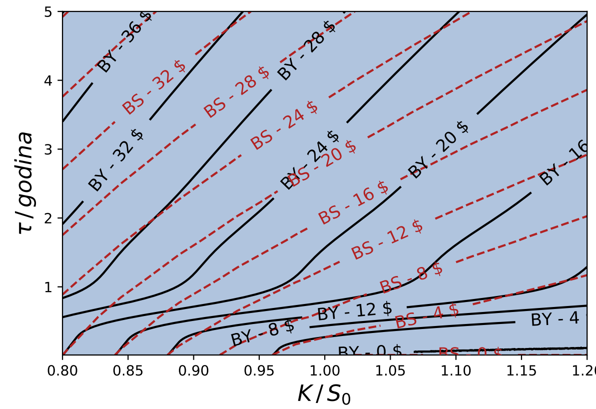
Koreliacija slijedi iz kovarijance i varijance kao:

$$Cor\left[W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right] = \frac{Cov\left[W_t^{(1)}, W_t^{(2)}\right]}{\sqrt{V\left[W_t^{(1)}\right]} \cdot \sqrt{V\left[W_t^{(1)}\right]}} = \frac{\rho t}{t} = \rho \tag{77}$$

Sada smo dakle ustanovili da Wienerovi procesi korelirani kao u jednadžbi (73) imaju korelaciju ρ kako je navedena u jednadžbi. Obzirom na to da je financijska opcija instrument uprosječenja ukoliko centriramo volatilnost oko vrijednosti volatilnosti u BS modelu dobivamo identičan konturni graf $C_H(K,\tau)|_{\rho=0}$ kao i na *Slici 5.*, po pretpostavci, koja se pokazuje ispravnom. Navedeni se rezultat može vidjeti na *Slici 7.* Na *Slici 8.* je prikazana ovisnost za zadanu korelaciju $\rho = -1$, dok je na *Slici 6.* prikazana ovisnost za slučaj $\rho = 1$. Bilo koje korelacije između vrijednosti 1, 0 ili -1, opisuju prijelaz s grafova sa *Slike 6.* na *Sliku 8.* Na *Slici 6.* se može vidjeti kako su cijene *call* opcije puno veće, nego one npr. na *Slici 7.* ili *5.* jer korelacija $\rho = 1$ znači da je Wienerova varijabla dionice identična u iznosu za svaki korak u vremenu kao i ona za volatilnost, što pak znači da svaka pozitivna promjena dionice uvjetuje još veću promjenu u sljedećem koraku, dok obratno svaka negativna promjena dionice uvjetuje još manju promjenu u sljedećem koraku. Navedeni komentar znači da postoji vjerojatnost da će tržište u volatilnosti biti još manje stabilno nego je bilo u početku pa s time dolazi i veća cijena na *call* opciju. Suprotno, na *Slici 8.* za jako mali K je cijena opcije veća što je manje vrijeme do isteka ugovora što je suprotno očekivanome



Slika 9. Ovisnost cijene *call* opcije s početnom vrijednošću $S_0 = 100\,\$$, evoluirane BY modelom definiranom uređenom trojkom kao $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ te bezrizičnom kamatnom stopom 0.05.

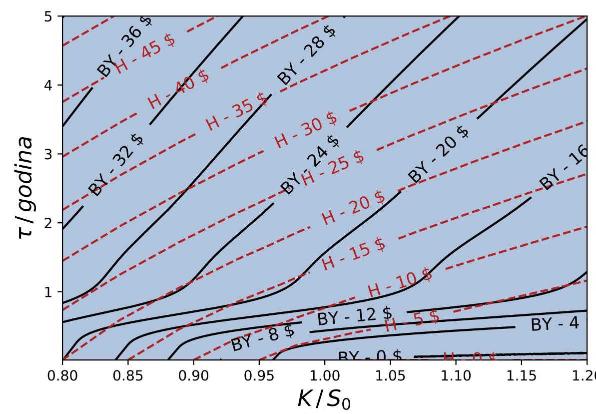


Slika 10. Usporedba ovisnosti cijene *call* opcije BY modela i BS modela. Volatilnost u BS modelu je jednaka $\sigma = 0.2\,god.^{-1}$ te je bezrizična kamatna stopa 0.05. Uređena trojka parametara BY modela je dana s $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

kada razmišljamo o tržištu. Nadalje, za određene vrijednosti K, takve da $K \lesssim S_0$, je cijena približno neovisna o vremenu isteka ugovora. Teško je ovakve opise pripisati nekom zamislivom stanju evolucije tržišta, no to ne znači da ne postoje specifični slučajevi ponašanja ili da će u budućnosti doći do takve promjene ponašanja da navedeno ocjenjivanje *call* opcije neće biti korisno.

BY *call* opciju ocjenjujemo numeričkom integracijom jednadžbe (56) tako da uprosječujemo po svim putovima koje generiramo uvjetnom raspodjelom iz jednadžbe (67). Sve postavke numeričkog procesa su jednake kao i kod BS i Heston simulacija te se uzima u obzir ista bezrizična kamatna stopa 0.05 te je uređena trojka parametara koja definira BY proces dana s $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. Na *Slici 9.* se može vidjeti $C_{BY}(K, \tau)$ ovisnost. Ono što je specifično za BY jest da nakon određenog vremena tržište prelazi u evoluciju koja nije Martinglaska što se vidi po tome što konture postaju približno pravci koji su paralelni. Valja primijetiti kako do promjene u ponašanju dolazi oko $\tau \approx 1\,god.$, što je otprilike vrijednost do koje možemo reći da je drift otprilike $\ln(100)$ te je vrijednost nakon koje dolazi do saturacije varijance u našem slučaju uređene trojke $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$. Na *Slikama 10. - 13.* možemo vidjeti konture cijene BY *call* opcije uspoređene s cijenom po BS modelu te Hestonovom modelu za tri slučaja korelacije, redom $\rho = 0.25, 1, -0.75$.

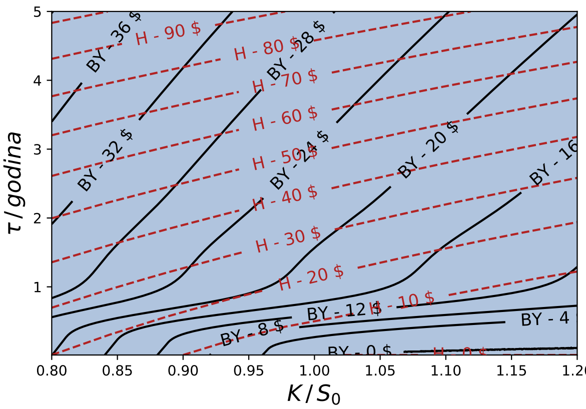
Kao što bi i očekivali u $\tau = 0$ sve konture konvergiraju jer je tada proizvoljnost u evoluciji dionice i volatilnosti ukinuta. Isključivši u obzir Hestonov model za korelaciju -1, BY model je jedini od modela koje tu promatramo za koji dolazi do izričite promjene ponašanja nakon što BY varijanca saturira, što je upravo i uzrok promjene ponašanja. Sa navedenih se slika može vidjeti kako se BY cijena u određenim intervalima otprilike slaže s ostalim modelima, gdje je naglasak ponajprije na BS model, odnosno Hestonov s trivijalnom korelacijom.



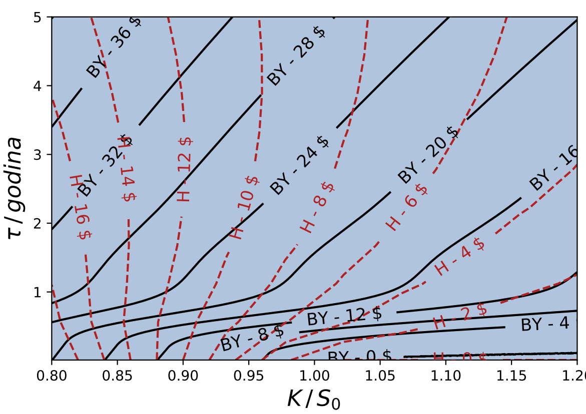
Slika 11. Usporedba ovisnosti cijene *call* opcije BY modela i Hestonovog modela. Korelacija u Hestonovom modelu je jednaka $\rho = 0.25$ te je bezrizična kamatna stopa 0.05. Uređena trojka parametara BY modela je dana s $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

IV. DISKUSIJA

U ovom se seminaru bavimo osnovnim razmatranjima na području ocjenjivanja financijskih instrumenata, specifično financijskih opcija, metodama kvantnih financija. Glavna je ideja odrediti jezgru evolucije koja je dana jednadžbom (1) te ju koristiti za kvantificiranje rizika pada *securityja*, odnosno dionice na kojoj je temeljena *call* opcija. Jezgru evolucije računamo metodama Feynmanovih integrala po putovima čija je osnovna ideja da su sve trajektorije u konfiguracijskom prostoru moguće, no da dolaze s amplitudom vjerojatnosti koja je dana eksponencijalom akcije modela. Stoga da bi odredili jezgru evolucije, najprije smo zadali Lagranžijan modela



Slika 12. Usporedba ovisnosti cijene *call* opcije BY modela i Hestonovog modela. Korelacija u Hestonovom modelu je jednaka $\rho = 1$ te je bezrizična kamatna stopa 0.05. Uređena trojka parametara BY modela je dana s $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.



Slika 13. Usporedba ovisnosti cijene *call* opcije BY modela i Hestonovog modela. Korelacija u Hestonovom modelu je jednaka $\rho = -0.75$ te je bezrizična kamatna stopa 0.05. Uređena trojka parametara BY modela je dana s $(a, r, \zeta) = (1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.

i iz njega odredili akciju. Lagranžijan pomoću kojega smo modelirali opcije jest *tzv.* akcelerirani Lagranžijan, dan u jednadži (3). Navedeni je Lagranžijan nefizikalan jer je analogni Hamiltonijan, dobiven Legendrovom transformacijom Lagranžijana nehermitski. Unatoč nefizikalnosti, model ima primjenu u socioekonomskim razmatranjima. Nas je specifično zanimala primjena u ekonofizici, ocjenjivanju financijskih opcija.

Jezgru evolucije smo izračunali na dva načina, tako da smo razvezali Hamiltonijan specifičnom transformacijom oblika iz jednadžbe (7) te ubacili potpun skup stanja i prointegrirali komponente odgovarajućih operatora. Navedeni smo rezultat također izveli na klasičan način tako da smo dodali klasičnoj koordinati stohastički dio koji zadovoljava trivijalne rubne uvjete u koordinati i brzini te izveli integraciju temeljem razmatranja o integralima po putovima iz *Dodatka A*.

Uveli smo vektorski prostor svih financijskih instrumenata te kroz zahtjev poštovanja Martingaleovog uvjeta izveli Hamiltonijan koji upravo odgovara Black-Scholes Hamiltonijanu, čime je pokazana njegova važnost u svijetu kvantitativnih financija. Na primjeru FX opcija koje su uvedene zbog općenitosti te zato što zahtjevom $r_f = 0$ uvijek možemo reproducirati standardne *equity* opcije, smo zaključili kako dodavanje dodatnih konstantnih driftnih članova u Lagranžijan nije proizvoljno već fiksirano Martingaleovim uvjetom. Ukoliko također dodamo driftni član u brzini tada imamo proizvoljnost u određivanju jednog parametra, no u izrazu za raspodjelu vjerojatnosti sve ostaje isto jer su oba izraza progutana fiksiranjem Martingaleovog uvjeta na raspodjelu vjerojatnosti.

Daljnjim razmatranjem uvjetne raspodjele vjerojatnosti za BY model smo zaključili kako model temeljen na akceleriranom Lagranžijanu ne daje Martingalsku evoluciju za sva različita vremena do isteka ugovora. Navedenom se problemu ne može doskočiti ni visokim stupnjem diskretizacije temporalne domene te promatranjem uvjetne vjerojatnosti za svaki sljedeći korak jer tada gubimo svu informaciju o specifičnoj BY varijanci te zato što teži u nulu kako $\tau \to 0$, što znači da ćemo imati proizvoljno mali skup generiranih putova te nećemo uzimati u obzir visokorizične putove koji upravo dižu cijenu opcije.

Akcelerirani Lagranžijan ima tri grane rješenja, od kojih samo kompleksna u limesima zadovoljava ponašanje koje tražimo od cijene opcije. Promotrili smo ponašanje driftnog člana BY Gaussijana te njegove varijance u ovisnosti o vremenu do isteka ugovora te o parametru a^2 specifično u slučaju kada je $r = \zeta = 1$. Izgenerirali smo cijene opcija sa sličnim postavkama pomoću BS i Hestonovog modela, koji se razlikuju do na korelirani Wienerov proces u volatilnosti kao i u dionici. Prikazali smo sve generirane cijene pomoću konturnog grafa ovisnosti cijene o dogovorenoj cijeni i vremenu do isteka ugovora, $C(K, \tau)$, za sva tri modela.

Na kraju smo uspoređivali ponašanje BS, Hestonovog te BY modela te objašnjavali pojedinosti u ponašanju svakog od njih. Iako BY moddel pokazuje diskretnu promjenu ponašanja što nije nužno očekivano, navedeni modeli općenito služe trgovcima kako bi došli do zaključka kolika bi otprilike trebala biti cijena opcije, u našem slučaju *call* opcije te se stoga prave provjere valjanosti modela moraju raditi prilagodbom na stvarne podatke s tržišta opcija.

V. ZAHVALE

Zahvaljujem se profesoru Matku Glunčiću što mi je omogućio da napišem seminar o ovoj jako zanimljivoj temi te kolegi Zlatku Posavcu zbog toga što mi je pomogao optimizirati kod za evoluciju dionice.

VI. DODATAK A: FEYNMAN INTEGRALI PO PUTOVIMA

Nalaženje jezgre evolucije jest centralni problem analize u glavnom dijelu teksta. Jedan od načina na koji se može odrediti jezgra evolucije, odnosno amplituda propagacije iz početnog u konačno kvantno stanje jest pomoću Feynmanovih path integrala. U sljedećem izvodu prelazimo s Minkowski vremena na Euklidsko vrijeme:

$$t_E = it_M \tag{78}$$

Navedena se transformacija pokazuje korisnom u određenim izvodima. Glavna ideja izvoda jest diskretizirati vremensku skalu te uzimati u obzir sve moguće međukorake koje kvantni sustav može zauzeti u svom putu od početnog do konačnog kvantnog stanja:

$$\mathcal{K}(x', x, \tau) = \langle x'| \, e^{-\tau H} \, |x\rangle \tag{79}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x', x, \tau) = \int \cdots \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \, \langle x'| \, e^{-\epsilon H} \, \cdot \\ \cdot \, |x_{N-1}\rangle \, \langle x_{N-1}| \, e^{-\epsilon H} \, |x_{N-2}\rangle \, \langle x_{N-2}| \ldots \langle x_1| \, e^{-\epsilon H} \, |x\rangle \end{aligned} \tag{80}$$

Uvedena veličina ϵ je diskretizirana skala vremena $\epsilon = \frac{\tau}{N}$. Nadalje koristimo vezu između jezgre evolucije i Lagranžijana:

$$\langle x'| \, e^{-\epsilon H} \, |x\rangle = \mathcal{N} \cdot e^{\epsilon \mathcal{L}} \tag{81}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(x', x, \tau) = \int \cdots \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \, e^{\epsilon \mathcal{L}(x_{N-1}, x', \epsilon)} \, \cdot \\ \cdot \, e^{\epsilon \mathcal{L}(x_{N-2}, x_{N-1}, \epsilon)} \ldots e^{\epsilon \mathcal{L}(x, x_1, \epsilon)} \end{aligned} \tag{82}$$

$$\mathcal{K}(x', x, \tau) = \int Dx \, e^{\, \epsilon \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}(x_{n+1}, x_n, \epsilon)} \tag{83}$$

gdje je Dx dan s:

$$\int Dx = \mathcal{N}^{N-1} \int \prod_{n=1}^{N-1} dx_n \tag{84}$$

U argumentu eksponencijale gornje jednadžbe možemo prepoznati sumaciju koja u limesu $\epsilon \to 0$ teži u integral Lagranžijana po vremenu:

$$\lim_{\epsilon \to 0} \epsilon \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \mathcal{L}(x_{n+1}, x_n, \epsilon) = \int_0^\tau dt \, \mathcal{L}(x, \dot{x}, t) \tag{85}$$

Gornji izraz prepoznajemo kao akciju $\mathcal{S}$ te pišemo:

$$\mathcal{K}(x', x, \tau) = \int Dx \, e^{\mathcal{S}} \tag{86}$$

Rezultat u Minkowski prostorvremenu možemo lako reproducirati iz gornjega na način da dodamo imaginarnu jedinicu u eksponencijalu akcije.

VII. DODATAK B: AKCELERACIJA I HAMILTONIJAN

U *Dodatku B* Provodimo postupak Legendreove transformacije akceleriranog Lagranžijana u akcelerirani Hamiltonijan. Akcelerirani Lagranžijan zadajemo analogno definiciji u glavnom tekstu kao:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \cdot \left(a\ddot{x}^2 + 2b\dot{x}^2 + cx^2 \right) \tag{87}$$

S obzirom na to da će nam bazu potpunih stanja sada definirati kvantni brojevi x koordinate i v brzine, jezgra evolucije poprima slijedeći oblik:

$$\mathcal{K}(x', x, v', v, \tau) = \int DxDv \; e^{\int dt \, \mathcal{L}(x,v,t)} \cdot \prod_t \delta(v(t) + \dot{x}(t)) \tag{88}$$

Koristeći integralni oblik delta funkcije gornji izraz poprima oblik:

$$\mathcal{K}(x', x, v', v, \tau) = \int DxDvD\lambda \, e^{\int dt \, \mathcal{L}_D(x,v,t)} \tag{89}$$

gdje je $\mathcal{L}_D$ dan s:

$$\mathcal{L}_D(x, v, t) = -\frac{1}{2} \cdot \left(a\dot{v}^2 + 2bv^2 + c^2 \right) + i\lambda(v + \dot{x}) \tag{90}$$

Računajući konjugirane impulse za x, v i λ te primjenjujući Legendreovu transformaciju:

$$H = \dot{x}p_x + \dot{v}p_v + \dot{\lambda}p_\lambda - \mathcal{L}_D \tag{91}$$

izvodimo akcelerirani Hamiltonijan:

$$H = -\frac{1}{2a} \cdot \frac{\partial^2}{\partial v^2} + b \cdot v^2 + \frac{c}{2} \cdot x^2 - v \cdot \frac{\partial}{\partial x} \tag{92}$$

VIII. DODATAK C

U *Dodatku C* izvodimo relaciju eksponencijale matričnog izraza koja se koristi pri računanju jezgre evolucije za akcelerirani Hamiltonijan. Pokažimo da vrijedi:

$$Z = \int dx_1 \ldots dx_N \; e^{\mathcal{S}} = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \hat{\mathbf{A}}}} \cdot e^{\frac{1}{2} \vec{J}^T \cdot \hat{\mathbf{A}} \cdot \vec{J}} \tag{93}$$

gdje je:

$$\mathcal{S} = -\frac{1}{2} \cdot \sum_{i,j=1}^{N} x_i A_{ij} x_j + \sum_i J_i x_i \tag{94}$$

Pretpostavimo da je $\hat{\mathbf{A}}$ simetrična i pozitivno definitna matrica. U tom slučaju možemo naći ortogonalnu matricu $\hat{\mathbf{M}}$ takva da je:

$$\hat{\mathbf{A}} = \hat{\mathbf{M}}^T \cdot diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \cdot \hat{\mathbf{M}} \tag{95}$$

Uvodimo $\vec{z}$ takav da vrijedi:

$$z_i = M_{i,j} x_j \tag{96}$$

$$\prod_{i=1}^{N} dz_i = \det \hat{\mathbf{M}} \cdot \prod_{i=1}^{N} dx_i \tag{97}$$

$$Z = \prod_{i=1}^{N} \int dz_i \; e^{-\frac{1}{2}\lambda_i z_i^2 + (\vec{J}\cdot\hat{\mathbf{M}}^T)_i z_i} \tag{98}$$

$$Z = \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda_i}} \, e^{\frac{1}{2\lambda_i}(\vec{J}^T\cdot\hat{\mathbf{M}}^T)_i(\vec{J}^T\cdot\hat{\mathbf{M}}^T)_i} \tag{99}$$

Umnožak po i prebacujemo u sumaciju unutar argumenta eksponencijale te se tada može pokazati sljedeća relacija:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\lambda_i} (\vec{J}^T \cdot \hat{\mathbf{M}}^T)_i (\vec{J}^T \cdot \hat{\mathbf{M}}^T)_i = \vec{J}^T \cdot \hat{\mathbf{A}}^{-1} \cdot \vec{J} \tag{100}$$

što reproducira početnu jednakost:

$$Z = \frac{(2\pi)^{N/2}}{\sqrt{\det \hat{\mathbf{A}}}} \cdot e^{\frac{1}{2}\vec{J}^T\cdot\hat{\mathbf{A}}\cdot\vec{J}} \tag{101}$$

IX. DODATAK D: JEZGRA EVOLUCIJE, IZVOD PO INTEGRALIMA PUTOVA

Uz kvantni pristup izvrjednjavanju jezgre evolucije akceleriranog Lagranžijana postoji i klasični pristup u kojem se uvodi stohastična varijabla ξ koja definira odstupanje od klasične trajektorije x_C dane Euler-Lagrange jednadžbama:

$$x = x_C + \xi \tag{102}$$

Jedna prednost izvoda po integralima putova jest ta što dobiveno rješenje za akciju $\mathcal{S}$ je valjano za sve grane rješenja, a ne samo za realnu granu što je svojstvo Hamiltonijanskog pristupa. Početni i konačni uvjeti za ξ i $\dot{\xi}$ su trivijalni kao što bi mogli i očekivati, s obzirom na to da klasična koordinata zadovoljava početne i konačne rubne uvjete. Jezgra evolucije uz novu notaciju postaje:

$$\mathcal{K}(x', v', x, v, \tau) = \int Dx \, e^{\mathcal{S}} = e^{\mathcal{S}_C} \int D\xi \, e^{\mathcal{S}_\xi} \tag{103}$$

$$\mathcal{K}(x', v', x, v, \tau) = \mathcal{N}(\tau) \cdot e^{\mathcal{S}_C(x',v',x,v,\tau)} \tag{104}$$

Normalizacija $\mathcal{N}(\tau)$ odgovara integralu eksponencijale akcije po stohastičnoj koordinati iz gornjeg izraza. U gornjim smo jednadžbama također koristili to da se ukupna akcija može rastaviti na zbroj akcije po klasičnoj koordinati te akcije po stohastičnoj koordinati. Dalje dajemo skicu izvoda navedene tvrdnje:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}\left[x_C + \xi\right] \tag{105}$$

$$\mathcal{S} = \int_0^\tau dt \, \left(a(\ddot{x}_C + \ddot{\xi})^2 + 2b(\dot{x}_C + \dot{\xi})^2 + c(x_C + \xi)^2 \right) \tag{106}$$

Ukupnu akciju $\mathcal{S}$ zapisujemo kao:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_C + \mathcal{S}_\xi + \mathcal{R} \tag{107}$$

Imajući na umu da rezidualni član $\mathcal{R}$ propada što ćemo ćemo sada pokazati:

$$\mathcal{S}_C = -\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \, \left(a\ddot{x}_C^2 + 2b\dot{x}_C^2 + cx_C^2 \right) \tag{108}$$

$$\mathcal{S}_\xi = -\frac{1}{2} \int_0^\tau dt \, \left(a\ddot{\xi}^2 + 2b\dot{\xi}^2 + c\xi^2 \right) \tag{109}$$

$$\mathcal{R} = -\int_0^\tau dt \, (a\ddot{x}_C\ddot{\xi} + 2b\dot{x}_C\dot{\xi} + cx_C\xi) \tag{110}$$

Parcijalnom integracijom te korištenjem rubnih uvjeta za stohastičku koordinatu se rezidualni član može svesti na sljedeći oblik:

$$\mathcal{R} = -\int_0^\tau dt \, \xi(t)(a \ddddot{x}_C - 2b\ddot{x}_C + cx_C) \tag{111}$$

Varijacijom akcije bi mogli izvesti modificirane akcelerirane Euler-Lagrange jednadžbe te bi navedenu jednadžbu mogli prepoznati u podintegralnom izrazu gornje jednadžbe, odnosno:

$$a \ddddot{x}_C - 2b\ddot{x}_C + cx_C = 0 \tag{112}$$

što vodi na zaključak:

$$\mathcal{R} = 0 \tag{113}$$

odnosno:

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_C + \mathcal{S}_\xi \tag{114}$$

Parcijalnom integracijom izraza za klasičnu akciju S_C se može doći do sljedećeg izraza:

$$\mathcal{S}_C = -\frac{1}{2} \sum_{I,J=1}^{4} x_I M_{IJ} x_J \tag{115}$$

gdje indeksi s velikim slovima I, J označavaju početnu i konačnu koordinatu i brzinu x_f, v_f, x_i i v_i. Komponente matrice $\hat{\mathbf{M}}$ možemo zapisati kao:

$$M_{IJ} = -\frac{\partial^2 \mathcal{S}_C}{\partial x_I \partial x_J} \tag{116}$$

Koristeći izraz za jezgru evolucije koji smo izveli u ovom dodatku te simetrije $\hat{\mathbf{M}}$ matrice, sve skupa možemo zapisati rezultat kao:

$$\mathcal{K}(x', v', x, v, \tau) = \mathcal{N}(\tau) \exp\Bigg\{ -\frac{1}{2}M_{11}(x'^2 + x^2) - \frac{1}{2}M_{22}(v'^2 + v^2) - M_{13}x'x - M_{24}v'v + M_{12}(xv - x'v')\Bigg\} \tag{117}$$

Koeficijente matrice $\hat{\mathbf{M}}$ možemo identificirati eksplicitnom integracijom Lagranžijana po vremenu:

$$M_{11} = \Lambda\Bigg\{2ar\zeta(r^2+\zeta^2)\left((-1 + e^{4r\tau})\zeta + 2e^{2r\tau r}\sin(2\tau\zeta)\right)\Bigg\} \tag{118}$$

$$M_{12} = -\Lambda\Bigg\{ -2a(1 + e^{4r\tau})r^2\zeta^2 + b\left(\zeta^2 + e^{4r\tau}\zeta^2 + - 2e^{2r\tau}(r^2 + \zeta^2) + 2e^{2r\tau}r^2(b + 2a\zeta^2)\cos(2\tau\zeta)\Bigg\} \tag{119}$$

$$M_{13} = -\Lambda 4ae^{r\tau}r\zeta(r^2 + \zeta^2)\Bigg\{(-1 + e^{2r\tau})\zeta\cos(\tau\zeta) + (1 + e^{2r\tau})r\sin(\tau\zeta)\Bigg\} \tag{120}$$

$$M_{14} = \Lambda\Bigg\{4ae^{r\tau}(-1+e^{2r\tau})r\zeta+(r^2+\zeta^2)\sin(\tau\zeta)\Bigg\} \tag{121}$$

$$M_{22} = -\Lambda\Bigg\{2ar\zeta(\zeta - \zeta e^{4r\tau} + 2re^{2r\tau}\sin(2\tau\zeta))\Bigg\} \tag{122}$$

$$M_{23} = -\Lambda\Bigg\{4ae^{r\tau}(-1+e^{2r\tau})r\zeta(r^2+\zeta^2)\sin(\tau\zeta)\Bigg\} \tag{123}$$

$$M_{24} = \Lambda\Bigg\{4ae^{r\tau}r\zeta\left(-(-1 + e^{4r\tau})\zeta\cos(\tau\zeta) + (1 + e^{2r\tau})r\sin(\tau\zeta)\Bigg\} \tag{124}$$

U gornjim definicijskim jednadžbama za matricu $\hat{\mathbf{M}}$ su uvedene supstitucije:

$$\Lambda = \frac{1}{\zeta^2 + e^{4r\tau}\zeta^2 - 2e^{2r\tau}(r^2 + \zeta^2) + 2r^2e^{2r\tau}\cos(2r\tau)} \tag{125}$$

$$r = \mathfrak{Re}\Bigg\{\sqrt{\frac{b}{a} + i\cdot\sqrt{\frac{c}{a} - (\frac{b}{a})^2}}\Bigg\} \tag{126}$$

$$\zeta = \mathfrak{Im}\Bigg\{\sqrt{\frac{b}{a} + i\cdot\sqrt{\frac{c}{a} - (\frac{b}{a})^2}}\Bigg\} \tag{127}$$

X. DODATAK E: STOHASTIČNA JEDNADŽBA I ITO KALKULUS

Glavni problem ovog dodatka seminaru je modelirati cijenu dionica $S(t)$ u vremenu stohastičnom jednadžbom. U tu svrhu se uvodi Langevinova jednadžba:

$$\frac{dS(t)}{dt} = \phi S(t) + \sigma S(t)R(t) \tag{128}$$

gdje je ϕ očekivana zarada, σ volatilnost te $R(t)$ bijeli šum. Volatilnost σ je mjera proizvoljnosti evolucije cijene dionice. Bijeli šum $R(t)$ zadajemo kao Gaussijanski bijeli šum trivijalnog očekivanja:

$$\langle R(t)\rangle = 0 \tag{129}$$

te korelacijske funkcije:

$$\langle R(t)R(t')\rangle = \delta(t - t') \tag{130}$$

Nakon diskretizacije temporalne domene $R(t) \to R_n$, R_n predstavlja Gaussijansku nasumičnu opservablu:

$$P(R_n) = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{2}R_n^2} \tag{131}$$

Drugim riječima R_n je Gaussijanska nasumična opservabla očekivanja nula te standardne devijacije $1/\sqrt{\varepsilon}$, što pišemo kao $N(0, 1/\sqrt{\varepsilon})$. Ukoliko I definiramo kao integral bijelog šuma:

$$I = \int_t^T dt'\, R(t') \tag{132}$$

može se pokazati da I također zadovoljava normalnu distribuciju s standardnom devijacijom $\sqrt{T-t}$:

$$I = N(0, \sqrt{T - t}) \tag{133}$$

Iz gornjih je jednadžbi zatim jasno da do vodećeg reda R_n mora imati sljedeću ovisnost o skali diskretizacije temporalne domene:

$$R_n^2 = \frac{1}{\varepsilon} + \mathcal{O}(\varepsilon^0) \tag{134}$$

Iz gornjeg rezultata bi mogli zaključiti da je do vodećeg reda bijeli šum deterministički i singularan. Promotrimo derivaciju proizvoljne funkcije vremena t i dionice $S(t)$:

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{f(t+\varepsilon, S(t+\varepsilon)) - f(t, S(t))}{\varepsilon} \tag{135}$$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\cdot\frac{dS}{dt} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\cdot\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 + \mathcal{O}\left(\sqrt{\varepsilon}\right) \tag{136}$$

Zbog singularne prirode bijelog šuma u kontinualnoj granici vremena slijedi:

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \sigma^2 S^2(t)R^2(t) + \mathcal{O}\left(\varepsilon^0\right) \tag{137}$$

$$\left(\frac{dS}{dt}\right)^2 = \frac{1}{\varepsilon}\sigma^2 S^2(t) \tag{138}$$

Ubacivanjem gornje jednakosti u jednadžbu za df/dt vidimo da će se skala diskretizacije ε skratiti te uzimanjem kontinualne granice dobivamo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial S}\cdot\frac{dS}{dt} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \tag{139}$$

Također možemo iskoristiti početnu Langevinovu jednadžbu te tada dobivamo:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \phi S(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial S} + \sigma S(t) R(t)\cdot\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2(t)\cdot\frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \tag{140}$$

Specifična funkcijska ovisnost vremena i vrijednosti dionice $f(t, S(t))$ koja će nas zanimati jest ona logaritamska:

$$x(t) = \ln\,(S(t)) \tag{141}$$

$$\frac{dx}{dt} = \phi - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma R(t) \quad \Big/ \int_t^T dt' \tag{142}$$

$$x(T) = x(t) + \left(\phi - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\int_t^T dt'\, R(t') \tag{143}$$

$$S(T) = S(t) e^{\left(\phi - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot N(0,1)} \tag{144}$$

Iz gornjih jednadžbi vidimo da je $x(t)$ nasumična Gaussijanska varijabla, dok je cijena dionice $S(t)$ logaritamska nasumična Gaussijanska varijabla.

XI. DODATAK F: MARTINGALEOV UVJET

Kako bi teorija financijskih opcija bila slobodna mogućnosti arbitraže, Hamiltonijan sistema mora zadovoljavati Martingaleov uvjet. Arbitraža na tržištu se može opisati kao proces u kojemu netko kupi određeni broj dionica te ih netom poslije proda na drugom tržištu, zaradivši iskorištavajući blage fluktuacije u cijeni na različitim tržištima. Drugim riječima, profit bez rizika. U slobodnom opisu Martingaleov uvjet možemo definirati na način da kockar koji ulazi u kockarnicu s $\mathcal{X}$ količinom novca u prosjeku mora izaći s istom tom količinom novca $\langle\mathcal{X}'\rangle = \mathcal{X}$. U sljedećem se izvodu Martingaleovog uvjeta pretpostavlja da je tržište *potpuno*. *Potpunost* tržišta se definira kroz tri svojstva: zanemariva cijena transakcijskog odnosa, savršena informiranost trgovaca te postojanje cijene svih imovina u svim mogućim stanjima tržišta. Pod savršena informiranost se misli da svaki sudionik tržišne razmjene posjeduje informaciju o cijenama svih imovina na tržištu. Može se pokazati da za tržište koje zadovoljava gornje pretpostavke postoji jedinstvena, bezrizična mjera vjerojatnosti za koju evolucija svih financijskih instrumenata zadovoljava Martingaleov uvjet.

Pretpostavimo da ispitanik posjeduje m financijskih instrumenata koji nose monetarnu vrijednost, s $\mu_i(t)$ driftnim brzinama, n bijelih šumova $R_j(t)$ koji nose svoje volatilnosti σ_j^i. Driftne brzine μ_i su analogon očekivane zarade ϕ iz prošlog poglavlja. Pozivamo se na Langevinovu jednadžbu iz prošlog poglavlja te sva navedena svojstva bijelog šuma $R_j(t)$:

$$\frac{dS_i(t)}{dt} = \mu_i(t) S_i(t) + S_i(t)\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^i(t) R_j(t) \tag{145}$$

Promotrimo portfolio osmišljen na način da trivijalizira sve stohastičke doprinose u gornjoj Langevinovoj jednadžbi te da njegova evolucija postane deterministička:

$$\Pi = \sum_{i=1}^{m}\theta_i S_i \tag{146}$$

gdje su gornji θ_i definirani na način da vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{m}\theta_i S_i \sigma_j^i = 0\,, \;\; \textit{za svaki } j \tag{147}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \sum_{i=1}^{m}\theta_i \mu_i S_i(t) \tag{148}$$

Drugim riječima zamišljeni portofolio opisuje determinističku evoluciju. Uvjetovanjem nepostojanja arbitražnih mogućnosti dolazimo do jednakosti:

$$\frac{d\Pi}{dt} = r\Pi = r\sum_{i=1}^{m}\theta_i S_i \tag{149}$$

gdje je r bezrizična kamatna stopa. U praksi ne postoje bezrizična ulaganja, tipični primjer ulaganja koje se smatra bezrizičnim jest ulaganje u tromjesečni *U.S. treasury bill* s obzirom da se smatra da postoji jedino proizvoljno mala vjerojatnost da će vlada S.A.D-a ući u stanje u kojem neće moći podmirivati svoje dugove. Definirajmo driftne brzine pomoću bezrizične kamatne stope i parametara λ_j kao:

$$\mu_i = r + \sum_{j=1}^{n}\lambda_j \sigma_j^i \tag{150}$$

Parametri λ_j su neovisni o vrijednosti instrumenata S_i:

$$\frac{dS_i(t)}{dt} = rS_i + S_i\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^i\left(R_j(t) + \lambda_j\right) \tag{151}$$

Bezrizičnu kamatnu stopu možemo eliminirati iz gornje jednadžbe tako da uvedemo supstituciju:

$$X_i(t) = S_i(t) e^{-\int_0^\tau ds\, r(s)} \tag{152}$$

$$\frac{dX_i(t)}{dt} = X_i(t)\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^i\left(R_j(t) + \lambda_j\right) \tag{153}$$

S obzirom na to da gornji član još uvijek sadrži driftni član neće biti zadovoljen Martingaleov uvjet. Da bi zadovoljili Martingaleov uvjet uvodimo nasumičnu opservablu $\rho(t)$:

$$\rho(t) = \exp\left\{-\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} ds\,\lambda_j(s)R_j(s) - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\int_0^{\tau} ds\,\lambda_j^2(s)\right\} \tag{154}$$

Varijabla $\rho(t)$ definirana na gornji način će zadovoljavati Martingaleov uvjet:

$$\langle\rho(t)\rangle = \rho(s)\,,\ \ s < t \tag{155}$$

Koristeći Itovo pravilo deriviranja:

$$\frac{d(fg)}{dt} = \frac{df}{dt}\cdot g + f\cdot\frac{dg}{dt} + \frac{df}{\sqrt{dt}}\cdot\frac{dg}{\sqrt{dt}} \tag{156}$$

možemo pokazati:

$$\frac{d\left(\rho(t)X_i\right)}{dt} = \rho(t)X_i\sum_{j=1}^{n}\left(\sigma_j^i - \lambda_j\right)R_j(t) \tag{157}$$

Traženjem očekivanja gornje jednadžbe cijela desna strana propada zbog trivijalnosti očekivanja bijelog šuma te slijedi da je očekivanje $\rho(t)X_i$ vremenski nepromjenjeno:

$$\langle\rho(t)X_i(t)\rangle = \rho(s)X_i(s)\,,\ \ s < t \tag{158}$$

Drugim riječima, $\rho(t)X_i$ je Martingaleova varijabla. Ubacivanjem $\rho(t)$ u definiciju bezrizične raspodjele možemo tvrditi da je X_i Martingaleova opservabla uz novu Martingaleovu bezrizičnu mjeru:

$$\langle\, e^{-\int_0^t ds\, r(s)}S_i(t)\,\rangle_M = e^{-\int_0^{t_*} ds\, r(s)}S_i(t_*)\,,\ \ t_* < t \tag{159}$$

XII. DODATAK G

U *Dodatku G* raspisujemo eksplicitni oblik normalizacije $\mathcal{N}$, vektora $\vec{X}$ i $\vec{J}$ te matrice $\hat{\mathbf{M}}$ iz jednadžbe (20):

$$\mathcal{N} = \left(\frac{i}{2\pi}\gamma\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}\right)^2\sqrt{\frac{\gamma\omega_1^2\omega_2}{2\pi\sinh\left(\tau\omega_2\right)}}\,\cdot \\ \cdot\sqrt{\frac{\gamma\omega_1}{2\pi\sinh\omega_1\tau}} \tag{160}$$

$$\vec{J} = \gamma\omega_1\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2}\begin{pmatrix} v_i \\ x_i \\ -v_f \\ -x_f \end{pmatrix} \tag{161}$$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} \tag{162}$$

$$\hat{\mathbf{M}} = \begin{pmatrix} \frac{\omega_1^2\omega_2\cosh\left(\omega_2\tau\right)}{\sinh\left(\omega_2\tau\right)} & -\omega_1^2 & -\frac{\omega_1^2\omega_2}{\sinh\omega_2\tau} & 0 \\ -\omega_1^2 & \omega_1\cosh\omega_1\tau & 0 & -\frac{\omega_1}{\sinh\left(\omega_1\tau\right)} \\ -\frac{\omega_1^2\omega_2}{\sinh\left(\omega_2\tau\right)} & 0 & \omega_1^2\omega_2\cosh\omega_2\tau & \omega_1^2 \\ 0 & -\frac{\omega_1}{\sinh\omega_1\tau} & \omega_1^2 & \omega_1\cosh\omega_1\tau \end{pmatrix} \tag{163}$$

Kompleksnost gornjih izraza govori o složenosti računa u izvrjednjavanju jezgre evulucije na kvantni Hamiltonijanski način ili na alternativni semiklasični način po integralima putova uz uvođenje stohastičke opservable.

[1] Belal E. Baaquie: "Quantum Field Theory for Finance and Economics"
[2] Belal E. Baaquie: "Quantum Finance"
[3] Belal E. Baaquie: "Path Integrals and Hamiltonians"
[4] John C. Hull: "Options, Futures, and Other Derivatives"
[5] Belal E. Baaquie 1, L.C. Kwek and M. Srikant: "Simulation of Stochastic Volatility using Path Integration: Smiles and Frowns"
[6] B.E. Baaquie, M. Yu, Option price and market instability, Physica A (2016), http://dx.doi.org/10.1016/j.physa.2016.11.080
[7] Belal Ehsan Baaquie, Yang Cao: "Option volatility and the acceleration Lagrangian"