Disperzijske relacije iz nekomutativne geometrije te primjena i učinak na razliku u vremenu dolaska fotona različitih energija

mentor: dr. sc. Anđelo Samsarov
student: Lovro Šaravanja
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Sadržaj

U ovom radu motiviran je i dan formalizam za proučavanje fizikalnih efekata nekomutativne geometrije. Dani formalizam se sastoji od deformacije simetrijske strukture prostorvremena, pri čemu je simetrijska struktura opisana Hopfovom algebrom nad univerzalnom omotačkom algebrom. Deformacija se provodi Drinfel'dovim zakretanjem te se nadalje analiziraju efekti zakretanja na algebru diferencijalnih formi, kao jedne od reprezentacijskih algebri Hopfove algebre. Definira se valna jednadžba s pomoću Laplace-Beltrami operatora te uz pomoć aproksimacija dolazi do disperzijskih relacija te u konačnici do fizikalno mjerljivog efekta - razlike u vremenu dolaska fotona različitih energija iz udaljenog događaja.

1 Motivacija

Vjeruje se da uvođenje nekomutativnosti na prostor vrijeme u vidu relacija tipa:

$$[x^\mu, x^\nu] = \kappa F^{\mu\nu}(x)$$

predstavlja jedan od mogućih puteva ka rješenju procijepa između kvantne fizike i teorije relativnosti. No takve relacije na prvu predstavljaju izazove što tehničke, što konceptualne prirode s obzirom na to da na prvu uopće nije jasno što komutator uopće geometrijski predstavlja.

Kao ilustratorni primjer posljedica nekomutativnosti često se navodi klasični fazni prostor na kojem su sve koordinate nezavisne dok se ne uvedu komutacijske relacije na kanonske impulse i koordinate. Potonje relacije predstavljaju prijelaz u kvantnu mehaniku te zahtijevaju reviziju osnovnih pojmova kao npr. koordinate postaju operatori. No moguća je i drugačija interpretacija kvantne mehanike pri kojoj nije potreban konceptualni skok sa prostora funkcija na faznom prostoru u operatorsku algebru. Takav geometrijski pristup polazi od opažanja da se geometrija neke mnogostrukosti M može jednostavno promatrati na algebri glatkih funkcija dane mnogostrukosti $C^\infty(M)$ te se nekomutativnost upravo razmatra na toj razini. U kontekstu početnih relacija to bi značilo da funkcije $x^\mu \in C^\infty(M)$ koje svakoj točki mnogostrukosti pridjeljuju μ-tu koordinatu, ne komutiraju. Nekomutativnost moguće je provesti redefiniranjem samog umnoška između dvaju funkcija, a to će se tek provesti deformiranjem simetrijske strukture prostor vremena.

Da bi se deformirala simetrijska struktura prvo je potrebno precizno definirati što se točno misli pod simetrijama kako bi se znalo koja svojstva moraju biti zadržana. Za potrebe ovog rada bit će dani već dijelom specijalizirani zahtjevi dok će se neki samo grubo navesti, detaljnije analize moguće je naći u [11][5][3]. Pod simetrijama smatrat će se transformacije koje djeluju na neku unitalnu asocijativnu algebru[1] $\mathcal{A}$, npr. $C^\infty(M)$. Transformacije će biti označene sa T_i, elementi algebre sa f, g i h dok će djelovanje dane transformacija biti dano tzv. akcijom $\triangleright : T \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$. Osnovni zahtjevi su[2]:

$$\begin{gathered} T_1 \triangleright T_2 \triangleright f = (T_1 T_2) \triangleright f \\ T_1 \triangleright T_2 \triangleright T_3 \triangleright f = (T_1 T_2) \triangleright T_3 \triangleright f = T_1 \triangleright (T_2 T_3) \triangleright f \\ T \triangleright fgh = T \triangleright (fg)h = T \triangleright f(gh) \\ T \triangleright 1 = \epsilon(T) \end{gathered} \qquad \begin{gathered} \mathbf{1} \triangleright f = f \\ T \triangleright fg = (T_{(1)} \triangleright f)(T_{(2)} \triangleright g) \\ T \triangleright 1f = T \triangleright f1 = T \triangleright f \end{gathered}$$

$T_{(1,2)}$ označavaju transformacije zapisane u Sweedlerovoj notaciji[3] koje su pridružene transformaciji T preko koprodukta $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$

Također dodatno se definira antipod S koji se može shvatiti kao *generalizacija* inverza[4]. U slučaju da antipod svakoj transformaciji pridružuje inverznu, onda skup transformacija sa kompozicijom čini grupu. Dodatni zahtjev da parametarski prostor čini mnogostrukost te da su antipod i kompozicija kontinuirane operacije ekvivalentan je zahtjevu da je grupa transformacija Lieva. U tom slučaju strukturu transformacija

[1] Vidi Dodatak A
[2] Postoji mogućnost da su dani zahtjevi reducibilni, no ovako definirani zahtjevi mogu se direktno povezati s aksiomima Hopfove algebre, vidi Dodatak A
[3] Vidi Dodatak A
[4] Vidi Dodatak A

pogodno je promatrati u pridruženoj Lievoj algebri $\mathfrak{g}$ ili još bolje njenoj univerzalnoj omotačkoj algebri $U(\mathfrak{g})$[5]. Univerzalna omotačka algebra predstavlja proširenje Lieve algebre do unitalne asocijativne algebre te se raniji zahtjevi nad transformacijama mogu prirodno prevesti na elemente omotačke algebre. Tako npr. drugi uvjet za djelovanje jedinice se ne može prikazati u Lieveoj algebri. U slučaju prevođenja simetrijske strukture nad transformacijama u strukturu na omotačkoj algebri tada navedena struktura postaje Hopfova algebra[6] i predstavlja općenitiji izričaj ranije navedenih zahtjeva. Spomenuta preslikavanja se u nedeformiranom slučaju kanonski definiraju kao:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x, \quad x \in \mathfrak{g}$$

pri čemu je definicije moguće prirodno proširiti sa Lieve algebre na čitavu omotačku algebru.

Stoga se radi deformacija Hopfove algebre na univerzalnoj omotačkoj algebri na način da je nova struktura također Hopfova algebra. Posebnu klasu deformacija, koje se uobičajeno koriste, čine Drinfel'dova zakretanja koja dodatno čuvaju svojstvo kvazitriangularnosti[7] Hopfovih algebri [4].

Dakle deformacija algebre funkcija ili općenitije diferencijalnih formi se provodi tako da se navedene algebre shvate kao reprezentacije Hopfove algebre nad univerzalnom omotačkom algebrom koja se deformira Drinfel'dovim zakretanjem. Time se operacije, a samim tim i množenje, nad funkcijama odnosno diferencijalnim formama mijenjaju.

2 Drinfel'dovo zakretanje Hopfove strukture i posljedice na algebru diferencijalnih formi

Kao što je navedeno Drinfel'dovo zakretanje deformira Hopfovu algebru te će se početna Hopfova algebra označavati s $(U(\mathfrak{g}), m, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ dok će se deformirana označavati sa $(U(\mathfrak{g})^{\mathcal{F}}, m^{\mathcal{F}}, \eta^{\mathcal{F}}, \Delta^{\mathcal{F}}, \epsilon^{\mathcal{F}}, S^{\mathcal{F}})$. Postupak deformiranja provodi se deformacijom koalgebraske strukture $(U(\mathfrak{g})^{\mathcal{F}}, \Delta^{\mathcal{F}}, \epsilon^{\mathcal{F}})$ na način da se pomoću invertibilnog elementa $\mathcal{F} \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ definira novi koprodukt:

$$\Delta^{\mathcal{F}}(\mathfrak{g}) = \mathcal{F}\Delta(\mathfrak{g})\mathcal{F}^{-1}$$

Posljedično kroz aksiome Hopfove algebre deformiraju se i ostala preslikavanja te se da ispravno naslutiti da će deformacija koalgebre imati posljedice samo na koprodukt i antipod dok će produkt i jedinica ostati jednaki dok će kojedinica ostati nedeformirana. Također, produkt i jedinica neće se promijeniti. Drugim riječima $U(\mathfrak{g})^{\mathcal{F}}$ ako se promatra kao algebra bit će ekvivalentna algebri $U(\mathfrak{g})$. Pored zahtjeva da je $\mathcal{F}$ invertibilan također mora zadovoljavati relacije [11]:

$$(\mathcal{F} \otimes \mathbf{1})(\Delta \otimes \mathrm{id})\mathcal{F} = (\mathbf{1} \otimes \mathcal{F})(\mathrm{id} \otimes \Delta)\mathcal{F}$$

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id})\mathcal{F} = \mathbf{1} = (\mathrm{id} \otimes \epsilon)\mathcal{F}$$

Navedeni zahtjevi osiguravaju da se sačuva unitalnost i asocijativnost deformiranih reprezentacijskih algebri kao što je algebra diferencijalnih formi [11].

2.1 Reprezentacijska algebra na primjeru algebre diferencijalnih formi $\Omega^{\mathcal{F}}$

Algebra diferencijalnih formi predstavlja generalizaciju realne vektorske analize na mnogostrukosti. Među diferencijalne forme spadaju objekti kao što su funkcije (0-forme), vektori (1-forme) i viši tenzori. Diferencijalne forme dodatno su opremljene operacijama $(\mathrm{d}, *, \wedge)$ pri čemu $(\Omega, \wedge)$ čini unitalnu asocijativnu algebru dok operacije d i $*$ realiziraju operacije analogne derivacijama u vektorskoj analizi[8]. Na potprostoru 0-formi $\wedge$ se reducira na standardno množenje pa je podalgebra 0-formi ekvivalentna algebri glatkih funkcija.

Nadalje moguće je definirati akciju neke simetrijske grupe, odnosno pripadne univerzalne omotačke algebre[9], na algebru diferencijalnih formi te potom odraditi deformaciju. Jedan od zahtjeva kompatibilnosti između Hopfove algebre i njene reprezentacije dan je zahtjevom:

$$x \triangleright X \wedge Y = (x_{(1)} \triangleright X) \wedge (x_{(2)} \triangleright Y) \qquad x \in U(\mathfrak{g}); \;\; X, Y \in \Omega$$

U slučaju kada je x element Lieve algebre, tada se navedena relacija reducira na standardno Leibnizovo pravilo, čime se manifestira djelovanje elemenata Lieve algebre kao derivacija.

[5]Vidi Dodatak B

[6]Vidi Dodatak A

[7]Zahtjev kvazitriangularnosti direktno je povezan sa zahtjevom svojevrsne komutativnosti pri množenju reprezentacija Hopfove algebre [11]

[8]Za opširnije o diferencijalnim formama vidi [7]

[9]Pretpostavlja se da je grupa Lieva

S obzirom na to da je pri deformaciji promijenjen način pridruživanja $\Delta(x) = x_{(1)} \otimes x_{(2)}$, tada slijedi da se mora transformirati i produkt na razini reprezentacijske algebre. Naravno to je uvjetovano time da je akcija ostala nepromijenjena tj. operacija $\triangleright$ ne ovisi o unutarnjoj strukturi simetrije već obratno. Može se pokazati da za deformirani produkt tada vrijedi:

$$X \wedge_\star Y = (\overline{f}^\alpha \triangleright X) \wedge (\overline{f}_\alpha \triangleright Y)$$

pri čemu $\wedge$ označava produkt prije deformacije te $\mathcal{F}^{-1} = \overline{f}^\alpha \otimes \overline{f}_\alpha \in U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$.

Posljedično na funkcije, to se prevodi u produkt:

$$f \star g = (\overline{f}^\alpha \triangleright f) \cdot (\overline{f}_\alpha \triangleright g)$$

pri čemu je $\cdot$ nedeformirano množenje, odnosno množenje po tockama. Bitna razlika u odnosu na nedeformirani produkt, jest da ovakav produkt nije općenito komutativan.

Korisno je primijetiti da se navedeni postupak deformacije produkta $\wedge$ može primijeniti na veliku većinu produkata. Deformacijom dobiva se deformirana algebra diferencijalnih formi te se označava sa $\Omega^{\mathcal{F}}$

Nadalje, djelovanje linearnih operatora na reprezentacijskoj algebri može se deformirati na kanonski način tako da vrijedi:

$$\Phi(X) \longrightarrow \Phi^{\mathcal{F}}(X) := (\overline{f}^\alpha \triangleright \Phi)(\overline{f}_\alpha \triangleright X)$$

pri čemu za bilo koji $x \in U(\mathfrak{g})$; $\Phi, \Psi, \mathrm{id}_{\Omega^{\mathcal{F}}} \in \mathrm{End}_{\Omega^{\mathcal{F}}}$ te $X \in \Omega^{\mathcal{F}}$ vrijedi:

$$(x \triangleright \Phi)(X) = x_{(1)} \triangleright (\Phi(S(x_{(2)}) \triangleright X))$$

što za sobom povlači [11]:

$$x \triangleright (\Phi\Psi) = (x_{(1)} \triangleright \Phi)(x_{(2)} \triangleright \Psi)$$

$$x \triangleright \mathrm{id}_{\Omega^{\mathcal{F}}} = \epsilon(x)\mathrm{id}_{\Omega^{\mathcal{F}}}$$

čime se pokazuje da se i algebra linearnih operatora nad nekom reprezentacijskom algebrom može smatrati reprezentacijom.

Dakle deformirano djelovanje linearnih operatora dano je izrazom:

$$\Phi^{\mathcal{F}}(X) := \overline{f}^\alpha_{(1)} \triangleright \Phi[S(\overline{f}^\alpha_{(2)})\overline{f}_\alpha \triangleright X]$$

2.2 Deformacija operatora d i $*$

Nedeformirani operatori d i $*$ mogu se definirati zahtjevom da za bilo koju r-formu $\omega = \frac{1}{r!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \in \Omega_r$ vrijede izrazi [7]:

$$\mathrm{d}\omega = \frac{1}{r!}\partial_\nu \omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\mathrm{d}x^\nu \wedge \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r} \in \Omega_{r+1}$$

$$*\omega = \frac{\sqrt{|g|}}{r!(m-r)!}\omega_{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}\epsilon^{\mu_1\mu_2\ldots\mu_r}{}_{\nu_{r+1}\ldots\nu_m}\mathrm{d}x^{\nu_{r+1}} \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x^{\nu_m} \in \Omega_{m-r}$$

pri čemu je ϵ totalno antisimetrični operator te dodatno vrijedi $\epsilon_{12\ldots m} = 1$ pri čemu je m dimenzija mnogostrukosti.

Može se pokazati da operator $\mathrm{d}^{\mathcal{F}}$ općenito komutira s akcijom simetrijske grupe na mnogostrukost te slijedi da će operator biti invarijantan na deformaciju, tj. $\mathrm{d}^{\mathcal{F}} = \mathrm{d}$. Dodatno za $\alpha, \beta \in \Omega^{\mathcal{F}}$ vrijedi [8]:

$$\mathrm{d}(\alpha \wedge_\star \beta) = \mathrm{d}\alpha \wedge_\star \beta + (-1)^{r_\alpha}(\alpha \wedge_\star \mathrm{d}\beta)$$

pri čemu r_α označava red diferencijalne forme α.

Izraz za deformirani Hodgeov operator $*^{\mathcal{F}}$ ne može se pojednostaviti, no moguće je pokazati da za $\omega \in \Omega^{\mathcal{F}}$ te $f \in \Omega_0^{\mathcal{F}}$ vrijedi [8]:

$$*^{\mathcal{F}}(\omega \star f) = *^{\mathcal{F}}(\omega) \star f$$

3 κ-prostorvrijeme

κ-Minkowski prostorvrijeme predstavlja najznačajniji primjer nekomutativnog prostorvremena te je definiran s [9]:

$$x^0 \star x^j - x^j \star x^0 = \frac{i}{\kappa} x^j \qquad x^j \star x^i - x^i \star x^j = 0$$

uz metriku $\eta = diag(-1, 1, 1, 1)$.

Nadalje ako se uzme zakrivljeno prostorvrijeme tada komutacijske relacije definiraju κ-prostorvrijeme.

Postoje različite metode realizacije ovakve algebre, ali u ovom radu će se iskoristiti dosada izloženi postupak deformacije simetrijske algebre, pri čemu će se za grupu simetrija uzeti konformalna grupa prostorvremena Conf$(1,3)$ [10]. Konformalna algebra $\mathfrak{conf}(1,3)$ vektorski je prostor razapet generatorima $P_\mu, M_{\mu\nu}, D, K_\mu$ pri čemu vrijede iduće komutacijske relacije:

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\sigma} M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma} M_{\mu\rho})$$

$$[M_{\mu\nu}, P_\sigma] = i(\eta_{\nu\sigma} P_\mu - \eta_{\mu\sigma} P_\nu)$$

$$[M_{\mu\nu}, K_\sigma] = i(\eta_{\nu\sigma} K_\mu - \eta_{\mu\sigma} K_\nu)$$

$$[D, P_\mu] = iP_\mu$$

$$[D, K_\mu] = -iK_\mu$$

$$[K_\mu, P_\nu] = 2i(\eta_{\mu\nu} D - M_{\mu\nu})$$

dok svi ostali komutatori iščezavaju.

Akcija navedenih generatora na prostor funkcija dana je s reprezentacijom [10]:

$$M_{\mu\nu} = i(x_\mu \partial_\nu - x_\nu \partial_\mu)$$

$$P_\mu = -i\partial_\mu$$

$$K_\mu = -i(2x_\mu x^\nu \partial_\nu - x_\nu x^\nu \partial_\mu)$$

$$D = -ix^\mu \partial_\mu$$

Nadalje za realizaciju željene nekomutativne strukture dovoljno će biti promatrati Poincare-Weylovu podalgebru ($\mathfrak{pw}$) koja je generirana elementima $P_\mu, M_{\mu\nu}, D$.

Drifel'dovo zakretanje bit će dano s [9]:

$$\mathcal{F} = \exp{(D \otimes \sigma)} \qquad \sigma = \ln{(1 + \frac{1}{\kappa} P_0)}$$

dok je inverz dan sa [9]:

$$\mathcal{F}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (iD)^n \otimes \sigma^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iD)^{\underline{n}}}{n!} \otimes \left(\frac{1}{\kappa} P_0\right)^n$$

pri čemu za pokratu vrijedi $X^{\underline{n}} := X(X-1)...(X-(n-1))$.

Prezentacije radi izračunat će se umnošci funkcija x^i i x^0.

$$x^0 \star x^i = x^0 x^i + (x^\mu \partial_\mu x^0)(\frac{-i}{\kappa} \partial_0 x^i) + ... = x^0 x^i$$

$$x^i \star x^0 = x^i x^0 + (x^\mu \partial_\mu x^i)(\frac{-i}{\kappa} \partial_0 x^0) + ... = x^0 x^i - \frac{i}{\kappa} x^i$$

Lako se pokaže da viši redovi nemaju doprinos te dodatno da sve *prostorne* funkcije komutiraju. Time se upravo impliciraju definicijske relacije κ-prostorvremena.

[10] Za ovako definiran nekomutativni prostor nije moguće ostvariti pogodno Drinfel'dovo zakretanje unutar Poincareove univerzalne omotačke algebre [9]

3.1 Algebra diferencijalnih formi na κ-prostorvremenu

Olakotna okolnost pri računima je činjenica da vrijedi:

$$P_0(\mathrm{d}x^\mu) = 0$$

što je posljedica komutativnosti operatora d i akcije Hopfove algebre. Ta relacija povlači da se svi produkti koji za desni član imaju $\mathrm{d}x^\mu$ reduciraju na nedeformirane produkte. Indukcijom se nadalje može pokazati da za bilo koju formu $\omega \in \Omega^{\mathcal{F}}$ vrijedi:

$$\omega = \alpha \star \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r} = \alpha \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}$$

Također zbog desne linearnosti operatora $*^{\mathcal{F}}$ korisna relacija je [9]:

$$\alpha \star \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r} = \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r} \star \frac{1}{(1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^r}\alpha$$

koja se može dobiti rješavanjem jednadžbe:

$$f \star \mathrm{d}x^\mu = \mathrm{d}x^\mu \star g$$

te daljnjim poopćenjem indukcijom na više forme.

Općenito djelovanje operatora $*^{\mathcal{F}}$ može biti zapisano kao:

$$\begin{aligned}
*^{\mathcal{F}}[f \star \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r}] &= *^{\mathcal{F}}[\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r} \star (1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{-r} f] \\
&= *^{\mathcal{F}}[\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r}] \star (1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{-r} f \\
&= *[\mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{\mu_r}] \star (1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{-m+r}(1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{m-2r} f \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} g^{\mu_1\nu_1}...g^{\mu_r\nu_r}\epsilon_{\nu_1\nu_2...\nu_m}\mathrm{d}x^{\nu_{r+1}} \wedge ... \wedge \mathrm{d}x^{\nu_m} \\
&\quad \star (1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{-m+r}(1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{m-2r} f \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} g^{\mu_1\nu_1}...g^{\mu_r\nu_r} \star \epsilon_{\nu_1\nu_2...\nu_m}\mathrm{d}x^{\nu_{r+1}} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_m} \\
&\quad \star (1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{-m+r}(1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{m-2r} f \\
&= \frac{\sqrt{|g|}}{(m-r)!} g^{\mu_1\nu_1}...g^{\mu_r\nu_r} \star (1-\frac{i}{\kappa}\partial_0)^{m-2r} f \star \epsilon_{\nu_1\nu_2...\nu_m}\mathrm{d}x^{\nu_{r+1}} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_m}
\end{aligned}$$

dok se djelovanje operatora d trivijalno može dati kao:

$$\mathrm{d}[f \star \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r}] = \partial_\nu f \star \mathrm{d}x^\nu \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_1} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_2} \wedge_\star ... \wedge_\star \mathrm{d}x^{\mu_r}$$

3.2 Valna jednadžba na κ-deformiranom prostorvremenu

Postoji više različitih pristupa valnoj jednadžbi $\Box\phi = 0$. Kao npr. d'Alambertov operator može se shvatiti kao centar Poincareove univerzalne omotačke algebre, kao generalizacija Laplaciana na prostor-vremenu ili kao Laplace-Beltrami operator $\Box = (\mathrm{d} + *\mathrm{d}*)^2$.[11]. Može se pokazati da svi pristupi kroz deformaciju vode na istu valnu jednadžbu [9] te će se u ovom radu koristiti pristup preko Laplace-Beltramijevog operatora. Nadalje radi jednostavnosti promatrat će se samo skalarna valna jednadžba te će se disperzijske relacije na skalarnom polju interpolirati i na fotonsko polje.

Nadalje trivijalno se pokaže da za skalarno polje, tj. 0-forme, vrijedi:

$$\Box^{\mathcal{F}}\phi = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{d} *^{\mathcal{F}} \mathrm{d}\phi = 0$$

[11] Možda je bolje reći da su ovo različiti tehnički pristupi istom operatoru

Eksplicitni račun glasi :

$$\begin{aligned}
\mathrm{d} *^{\mathcal{F}} \mathrm{d}\phi &= \mathrm{d} *^{\mathcal{F}} [\partial_\mu \phi \star \mathrm{d}x^\mu] \\
&= \mathrm{d}[\frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu} \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4}] \\
&= \mathrm{d}[\frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu}] \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4} \\
&\quad + \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu} \star \mathrm{d}[(1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4}] \\
&= \partial_\sigma[\frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu}] \star \mathrm{d}x^\sigma \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4} \\
&\quad + \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu} \star \partial_\sigma[(1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi] \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^\sigma \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4} \\
&= \partial_\sigma[\frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu}] \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^3 \partial_\mu \phi \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^\sigma \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4} \\
&\quad + \frac{\sqrt{|g|}}{3!} g^{\mu\nu} \star \partial_\sigma[(1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi] \star \epsilon_{\nu\nu_2\nu_3\nu_4} \mathrm{d}x^\sigma \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_2} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_3} \wedge_\star \mathrm{d}x^{\nu_4} \\
&= \left[\partial_\nu[\sqrt{|g|} g^{\mu\nu}] \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^3 \partial_\mu \phi + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \star \partial_\nu[(1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi]\right] \star \mathrm{d}x^1 \wedge_\star \mathrm{d}x^2 \wedge_\star \mathrm{d}x^3 \wedge_\star \mathrm{d}x^4
\end{aligned}$$

čime se valna jednadžba svodi na:

$$\partial_\nu[\sqrt{|g|} g^{\mu\nu}] \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^3 \partial_\mu \phi + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \star \partial_\nu[(1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi] = 0$$

Nadalje u jednadžbu dodaje se član koji predstavlja vezanje skalarnog polja i gravitacijskog polja $\Box - \xi R = 0$ te je za izbor $\xi = \frac{D-2}{4(D-1)}$ jednadžba konformalno invarijantna [8][6]. Time jednadžba pri kanonskoj operatorskoj deformaciji postaje:

$$\partial_\nu[\sqrt{|g|} g^{\mu\nu}] \star (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^3 \partial_\mu \phi + \sqrt{|g|} g^{\mu\nu} \star \partial_\nu[(1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^2 \partial_\mu \phi] - \xi (1 - \frac{i}{\kappa}\partial_0)^4 \left[\left[\frac{1}{\sqrt{|g|}}\right]^{-1} \star R \star \phi\right] = 0$$

pri čemu vrijedi $[f]^{-1} \star f = f \star [f]^{-1} = 1$.

Ako je f funkcija od x^0 tada u prvom redu vrijedi:

$$[f]^{-1} = \frac{1}{f}\left(1 - \frac{i}{\kappa} x^0 \left(\frac{f'}{f}\right)^2\right) + O(1/\kappa^2)$$

U radu [8] razmatrane su drugačije korekcije uslijed vezanja skalarnog i gravitacijskog polja te će se pokazati da su razlike u korekcijama zanemarive, odnosno da korekcije koje sadržavaju Riccijev skalar ne doprinose značajno disprezijskim relacijama.

4 Razlika u vremenu dolaska fotona različitih energija

Prirodan slijed je riješiti ranije dobivenu valnu jednadžbu te vidjeti postoje li mjerljive razlike u odnosu na *nedeformiranu* valnu jednadžbu.

Koristit će se FLRW metrika u kojoj vrijedi $\sqrt{|g|} = a(t)^3$ te $g_{\mu\nu} = diag(-1, a(t)^2, a(t)^2, a(t)^2)$.[12]

S obzirom na to da je dana jednadžba komlicirana te ju je već teško riješiti i u nedeformiranom slučaju, iskorištava se činjenica da pri svim realnim vrijednostima energije vrijedi $\omega = k >> \dot{a}/a \sim t^{-1}$.[13]

U nedeformiranom slučaju dobiva se rješenje jednadžbe:

$$\phi = \frac{1}{a} \exp\left(ik\eta - i\mathbf{kx}\right)$$

pri čemu vrijedi $\eta = \int_0^{x^0} \frac{\mathrm{d}x'}{a(x')}$ i navedeni parametar se naziva konformalno vrijeme.

[12] Vidi Dodatak C
[13] Vidi Dodatak C

Prirodan odabir ansatza će biti:

$$\phi = \frac{1}{a}\exp\left(ik\eta + \frac{i}{\kappa}F(t) - i\mathbf{kx}\right) = \frac{1}{a}\exp\left(ik\eta + \frac{i}{\kappa}F(t)\right) \star \exp -i\mathbf{kx}$$
$$= \frac{1}{a}\exp ik\eta\left(1 + \frac{i}{\kappa}F(t)\right) \star \exp -i\mathbf{kx}$$

Uvrštavajući ansatz u valnu jednadžbu te odbacivanjem članova oblika $\dot{a}/a$ i $\ddot{a}/a$ osim u slučaju kada pored sebe sadrže i x^0 dobiva se:

$$\ddot{F} + \frac{2ik}{a}\dot{F} - \frac{2ik^3}{a^3}x^0\frac{\dot{a}}{a} - \frac{k^2}{a^2}x^0\frac{\ddot{a}}{a} = 0$$

čime se unutar navedene aproksimacije dobiva rješenje dano sa:

$$F(x^0) = -\int^{x^0}\frac{k^2}{a^2}x'\frac{\dot{a}}{a}\mathrm{d}x'$$

Korsino je za primjetiti da unutar navedene aproksimacije ne doprinose članovi koji sadrže Riccijev skalar, odnosno nije bitno kako je definirano vezanje sa gravitacijskim poljem.
Rješenje valne jednadžbe stoga se može zapisati kao:

$$\phi = \frac{1}{a}\exp\left(if_k(x^0) - i\mathbf{kx}\right) \qquad f_k(x^0) = \int_0^{x^0}\frac{k}{a}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{a}}{a^2}kx'\right)\mathrm{d}x'$$

te će disperzijske relacije stoga biti:

$$\omega_k = \frac{\partial f_k}{\partial x^0} = \frac{k}{a}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{\dot{a}}{a^2}kx^0\right)$$

Ako se brzina shvati kao $v = \frac{\Delta x_s}{\Delta x^0}$ pri čemu je x_s položaj stacionarne točke vala tada slijedi da u slučaju kada je val dan superpozicijom ravnih valova sa disperzijom ω_k da će brzina biti dana sa:

$$\mathbf{v} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega_{\mathbf{k}} = \partial_0\nabla_{\mathbf{k}}f_{\mathbf{k}}(x^0)$$

odnosno iznosom će biti jednaka:

$$v = \frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{2kx^0\dot{a}}{a^2}\right)$$

Različite brzine putovanja valnih paketa otvaraju mogućnost eksperimentalne provjere danih relacija i procjenu slobodnog parametra κ. U slučaju događaja koji je emitirao dva fotona, pri čemu je jedan niskoenergetski, moguće je izračunati razliku u vremenu njihovog dolaska preko jednakosti:

$$\int_{t_e}^{t_a}\frac{\mathrm{d}x}{a} = \int_{t_e}^{t_a+\Delta t}\frac{1}{a}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\frac{2kx\dot{a}}{a^2}\right)\mathrm{d}x$$

pri čemu t_e, t_a i Δt predstavljaju vremena emisije, apsorpcije te razliku u vremenu dolaska fotona. Dane jednadžbe govore da će niskoenergetski foton u vremenu $t_a - t_a$ prijeći jednak put kao i foton koji putuje u vremenu $t_a + \Delta t - t_e$ pri čemu je razlika u vremenu određena razlikom u energijama.

Može se pokazati da će stoga razlika u vremenu dolaska fotona različitih energija u prvom redu računa biti dana sa [8]:

$$\Delta t = \frac{2ka(t_a)}{\kappa}\int_{t_e}^{t_a}\frac{x\dot{a}}{a^3}\mathrm{d}x = \{a(t_a) = 1\} = 2\frac{k}{\kappa}\int_{t_e}^{t_a}\frac{x\dot{a}}{a^3}\mathrm{d}x$$

Uzimajući u obzir da je relevantna skala za parametar a skala starosti svemira[14] moguće je reskalirati integrand čime on postaje bezdimenzionalan i može se očekivati da neće u bitnome doprinositi redu veličine ukupnog izraza. Odnosno:

$$\int_{t_e}^{t_a}\frac{x\dot{a}}{a^3}\mathrm{d}x \sim t_0\int_0^1\frac{x\dot{a}(t_0x)}{a(t_0x)^3}\mathrm{d}x \sim t_0$$

[14] Vidi Dodatak C

Dakle za red veličine razlike u vremenu dolaska fotona može se uzeti da vrijedi:

$$\ln \frac{\Delta t}{s} = \ln \frac{k}{\kappa} + \ln \frac{t_0}{s}$$

Ako se uzme da je valni vektor $k \sim 10^{12}\mathrm{m}^{-1}$, da je $1/\kappa$ proporcionalan sa Planckovom duljinom $l_p \sim 10^{-35}\mathrm{m}$ te da je starost svemira $t_0 \sim 10^{18}\mathrm{s}$, za razliku u vremenu dolaska fotona se dobiva:

$$\ln \frac{\Delta t}{s} \sim -5$$

odnosno dovoljno precizno mjerenje i poznavanje kozmoloških procesa omogućuje eksperimentalnu provjeru nekomutativnosti geometrije.

Zaključak

Pokazano je da će nekomutativnost prostora inducirati netrivijalne disperzijske relacije skalarnog polja što se interpoliralo i na fotonsko polje. Netrivijalne disperzijske relacije uzrokuju i ovisnost brzine fotona o njihovoj energiji što omogućuje eksperimentalno testiranje dane teorije. Nadalje pokazalo se da efekt može biti *značajan* u slučaju udaljenih kozmičkih događaja i visokoenergetskih fotona, odnosno da će se moći mjeriti razlika u vremenu dolaska fotona od udaljenog događaja u μs.

Dodatak A: Hopfova algebra[15]

Da bi se definirala Hopfova algebra prvo je potrebno definirati pojmove algebre, koalgebre i bialgebre.

Unitalna asocijativna algebra $\mathcal{A}$ je $\mathbb{K}$-modul[16] na kojem su definirani bilinearni produkt $m : \mathcal{A} \otimes \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ i linearno skalarno množenje $\eta : \mathbb{K} \to \mathcal{A}$ takvi da vrijedi:

$$m \circ (m \otimes \mathrm{id}) = m \circ (\mathrm{id} \otimes m)$$

$$m \circ (\eta \otimes \mathrm{id}) = \mathrm{id} = m \circ (\mathrm{id} \otimes \eta)$$

U radu će se koristiti konvencija:

$$ab := m(a \otimes b) \quad \alpha a := m(\eta(\alpha) \otimes a)$$

za $a, b \in \mathcal{A}$ i $\alpha \in \mathbb{K}$.

Koalgebra je $\mathbb{K}$-modul na kojem su definirana linearna preslikavanja zvana koprodukt $\Delta : \mathcal{A} \to \mathcal{A} \otimes \mathcal{A}$ i kojedinica $\epsilon : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ takvi da vrijedi:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$$

$$(\epsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \epsilon) \circ \Delta$$

U radu će se koristiti tzv. Sweedlerova konvencija za koprodukt, tj. s obzirom na to da će općenito koprodukt nekog elementa biti suma više članova skraćeno će se zapisivati:

$$\Delta(a) = \sum_i a^i_{(1)} \otimes a^i_{(2)} = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$$

Bialgebra $\mathcal{A}$ je ujedno algebra i koalgebra pri čemu za svaki $a, b \in \mathcal{A}$ vrijedi:

$$\Delta(ab) = \Delta(a)\Delta(b), \quad \epsilon(ab) = \epsilon(a)\epsilon(b), \quad \Delta(\mathbf{1}) = \mathbf{1} \otimes \mathbf{1}, \quad \epsilon(\mathbf{1}) = 1$$

Hopfova algebra je bialgebra na kojoj je definirano linearno preslikavanje $S : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ takvo da vrijedi:

$$m \circ (S \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \eta \circ \epsilon = m \circ (\mathrm{id} \otimes S) \circ \Delta$$

Može se pokazati da je ovako dano preslikavanje antihomomorfizam tj. vrijedi:

$$S(ab) = S(b)S(a)$$

[15]Definicije preuzete iz [1]

[16]$\mathbb{K}$-modul se razlikuje od vektorskog polja nad $\mathbb{F}$ u tome što je $\mathbb{K}$ prsten dok je $\mathbb{F}$ polje ($\mathbb{K}/0$ nema zahtjev za egzistencijom multiplikativnog inverza bilo kojeg elementa)

Dodatak B: Univerzalna omotačka algebra i pridružena kanonska Hopfova algebra

Slobodno govoreći univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ predstavlja najveću moguću konstrukciju nad danom Lievom algebrom $\mathfrak{g}$ na takav način da je $U(\mathfrak{g})$ unitalna i asocijativna. Postoji više metoda konstrukcije. Univerzalna omotačka algebra se može definirati kao[17]:

$$U(\mathfrak{g}) = \text{span}\{x_1^n x_2^m x_3^l ... | x_i \in \mathfrak{g}\}$$

pri čemu za prudukt između članova Lieve grupe vrijedi da je linearan, asocijativan te dodatno da vrijedi:

$$x_i x_j - x_j x_i = [x_i, x_j] = \sum_k C_{ijk} x_k$$

Prije same konstrukcije Hopfove algebra potrebno je navesti *univerzalno svojstvo* [1] univerzalne omotačke algebre. Za svako linearno preslikavanje $\phi : \mathfrak{g} \to \mathcal{A}$ takvo da vrijedi:

$$\phi([x_i, x_j]) = \phi(x_i)\phi(x_j) - \phi(x_j)\phi(x_i)$$

postoji jedinstven homomorfizam $\tilde{\phi} : U(\mathfrak{g}) \to \mathcal{A}$ takav da vrijedi $\tilde{\phi}(x_i) = \phi(x_i)$.

Navedeno svojstvo je izuzetno korisno u tome što je za konstrukciju linearnih homomorfizama nad $U(\mathfrak{g})$ dovoljno samo definirati linearna preslikavanja nad $\mathfrak{g}$ koja se preko univerzalnog svojstva jedinstveno proširuju nad čitavu omotačku algebru.

Stoga se može zaključiti[18] da postoji jedinstvena Hopfova struktura nad $U(\mathfrak{g})$ takva da vrijedi:

$$\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x, \quad \epsilon(x) = 0, \quad S(x) = -x, \quad x \in \mathfrak{g}$$

Ovako definirana algebra predstavlja kanonski primjer Hopfove algebre.

Dodatak C: Korisne informacije o FLRW metrici

Za osnovnu pretpostavku kozmologije može se uzeti da je svemir homogen i izotropan na velikim skalama, relevantnim za evoluciju svemira. Takva pretpostavka povlači za sobom da će metrika prostorvremena biti dana FLRW metrikom [12] te će se dodatno, jednostavnosti radi, u ovom radu koristiti prostorno ravna metrika. Time se dobiva $g_{\mu\nu} = diag(-1, a(t)^2, a(t)^2, a(t)^2)$ pri čemu je $a(t)$ *faktor skaliranja* te se uzima da je u sadašnjem trenutku dan sa $a(t_0) = 1$ odnosno $c = 1$. Jednostavno se može izračunati determinanta metrike $\det(g) = a^6$ te Riccijev tenzor i skalar [12]:

$$R_{00} = -3\frac{\ddot{a}}{a}$$
$$R_{ii} = \left(2\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right) g_{ii}$$
$$R = 6\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\ddot{a}}{a}\right)$$

Iz Friedmanovih jednadžbi [12] moguće je zaključiti da će vrijednosti $(\dot{a}/a)^2$ i $\ddot{a}/a$ biti približnog reda veličine što povlači da će i Riccijev skalar biti reda veličine približnog $(\dot{a}/a)^2$. Kroz daljnje analize i mjerenja zaključeno je da je u sadašnjem trenutku parametar $H_0 := \dot{a}/a$ reda veličine $10^{-18}s^{-1}$ odnosno da je obrnuto proporcionalan starosti svemira [12][2]. Drugačije rečeno, relevantna skala za promjene u parametru $a(t)$ jest skala starosti svemira.

Reference

[1] Konrad Schmüdgen Anatoli Klimyk. *Quantum Groups and Their Representations*. Springer Berlin, Heidelberg, 1997.

[2] *Astrophysical Constants and Parameters*. https://pdg.lbl.gov/2023/reviews/contents_sports.html. accessed: 21.1.2024.

[17] Uobičajeno se $U(\mathfrak{g})$ drugačije definira te se do ovoga oblika dolazi tek nakon primjene Poincare-Brikhoff-Witt teorema

[18] S obzirom na to da je S antihomomorfizam potrebno je uvesti pomoćnu algebru kako bi se primijenili navedeni argumenti

[3] A. P. Balachandran. *Group Theory and Hopf Algebras: Lectures for Physicists.* World Scientific, 2010.

[4] Giorgia Fortuna. "Co-Poisson Hopf Algebras, Deformation Theory of Co-Poisson Hopf Algebras and Quantum Groups".

[5] Nikola Herceg. "Hopfove algebre u fizici". MA thesis. PMF Sveučilišta u Zagrebu, 2021.

[6] Ted Jacobson. "Introduction to Quantum Fields in Curved Spacetime and the Hawking Effect". In: *arXiv:gr-qc/0308048v3* (2004).

[7] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics, Second Edition.* Graduate student series in physics. Taylor & Francis.

[8] Anna Pachoł Paolo Aschieri Andrzej Borowiec. "Dispersion relations in κ-noncommutative cosmology". In: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* (2021).

[9] Anna Pachoł Paolo Aschieri Andrzej Borowiec. "Observables and dispersion relations in κ-Minkowski spacetime". In: *Journal of High Energy Physics* (2017).

[10] David Senechal Philippe Di Francesco Pierre Mathieu. *Conformal Field Theory.* Springer, 1997.

[11] Thomas Weber. "Braided Commutative Geometry and Drinfel'd Twist Deformations". PhD thesis. Universita degli Studi di Napoli Federico II, 2019.

[12] Steven Weinberg. *Cosmology.* Oxford university Press, 2008.