Samosila i gravitacijski valovi

Maja Milas
mentor: izv. prof. dr. sc. Ivica Smolić
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Sažetak

Proučavamo problem samosile u kontekstu opće teorije relativnosti. Opće je prihvaćeno da MiSaTaQuWa jednadžbe daju dobar opis gibanja ”malog tijela”, ali se u njihovim izvodima nameću razne *ad hoc* pretpostavke. U ovom seminaru pokušavamo napraviti rigorozan izvod korekcije na geodezik za malo tijelo u prvom redu perturbativnog pristupa. Koristimo metodu usporedbe asimptotskih razvoja koja promatra prostorvrijeme u prirodnom i skaliranom limesa te pretpostavlja postoje područja u kojem su oba asimptotska razvoja zadovoljena.

1 Uvod

1.1 Opća teorija relativnosti

Albert Einstein poznat je po fotoelektričnom efektu, konstantnoj brzini svjetlosti i još mnogo toga, a jedno od njegovih najvažnijih otkrića je teorija gravitacije, tj. opća teorija relativnosti (OTR). Kao što Maxwellove jednadžbe objašnjavaju nastajanje elektromagnetskih polja kao posljedicu struja i naboja, Einsteinova jednadžba (1) opisuje zakrivljenost prostorvremena za zadanu materiju i energiju koja se nalazi u njemu.

$$R_{\mu\nu} - \tfrac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu} \tag{1}$$

Jednadžbu (1) matematički možemo interpretirati kao poopćenje Poissonove jednadžbe za Newtonov potencijal $\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho$. U tom slučaju, gravitacijski potencijal zamjenjuje metrika $g_{\mu\nu}$ koja opisuje zakrivljenost prostorvremena, a gustoću materije ρ tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$. Ulogu derivacije preuzima Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$ (dobiven kontrakcijom Riemmanovog tenzora $R^{\rho}{}_{\sigma\mu\nu}$ u kojem su sadržane prve i druge derivacije metrike), a $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ je Riccijev skalar koji još nazivamo i ’skalarnom zakrivljenosti’.[1] Ipak, temeljne ideje Newtonove i Einsteinove teorije gravitacije potpuno se različite. U OTR-u, tvar i energija zakrivljuju prostor, a zakrivljeni prostor uvjetuje gibanje stvari i materije. Drugim riječima, gravitacijska sila postaje fundamentalno svojstvo prostora. [10]

[1] Službeno se u jednadžbu dodaje i član $\Lambda g_{\mu\nu}$, gdje je Λ kozmološka konstanta, ali za potrebe ovog razmatranja pretpostavljamo da je $\Lambda = 0$.

Einsteinovu jednadžbu možemo tretirati kao svojevrstan problem početnih uvjeta. U praksi je međutim tu jednadžbu vrlo teško riješiti bilo analitički bilo numerički pa često pribjegavamo aproksimativnim metodama. Jedna od čestih metoda je linearizacija Einsteinove jednadžbe opisana u potpoglavlju 1.3.

1.2 Samosila i gravitacijski valovi

Kao posljedica Einsteinovog modela gravitacije, pojavljuje se tzv. koncept *samosile*. Zamislimo li da tijelo stvara gravitacijsko polje u svim točkama prostora, samosila je povratna sila tog polja na tijelo, tj. sila kojom tijelo indirektno djeluje samo na sebe.

Promotrimo npr. sustave dviju orbitirajućih crnih rupa u kojima je jedna puno masivnija od druge. Takvi se sustavi nazivaju "extreme-mass-ratio-inspiral" sustavi ili, skraćeno, EMRI-ji. Mala crna rupa orbitira u potencijalu velike te, budući da i sama zakrivljuje prostorvrijeme, stvara perturbaciju na taj potencijal. Zbog toga se na malu crnu rupu pojavljuje dodatna sila, gravitacijska samosila, koja uzrokuje spiraliranje i zračenje gravitacijskih valova. Povratna reakcija (eng. *back-reaction*) emitiranih gravitacijskih valova modificira orbitu manje crne rupe na vremenskoj skali puno duljoj od orbitalngo perioda pa kažemo da je spiraliranje adijabatsko. Gravitacijski val koji tako nastaje u sebi sadrži informacije o prostorvremenu crne rupe pa bi stoga bio savršen eksperiment za ovakve sustave [9].

Iako je ideja jednostavna, uključivanje efekata samosile u jednadžbe gibanja nije trivijalan zadatak. Lako je vidjeti da problemi nastaju već pokušamo li uvrstiti aproksimaciju točkastog tijela - zbog singularnosti polja u točki tijela dobivamo nefizikalna ponašanja.[2]

1.3 Aproksimacija točkastog tijela i linearizacija Einsteinove jednadžbe

Opće je poznato da je gibanje tijela konačne veličine komplicirano jer takav opis ovisi o detaljima sastava, ali i o unutarnjoj dinamici tijela. U praksi se često koristi aproksimacija čvrstog tijela, no ona nije prihvatljiva u relativistici. Početna bi ideja bila, kao što je često u ostalim teorijama, pokušati s jednostavnom aproksimacijom točkaste čestice, ali može se pokazati da takav pristup nema smisla u OTR-u. Einsteinova jednadžba nije linearna pa sustavi s točkastim izvorom nemaju dobro definirana rješenja.

Pogledajmo manifestaciju ovog problema na jednostavnom primjeru [9]. Promotrimo tijelo mase m koji se giba u prostorvremenu puno veće skale $\mathcal{L} \gg m$ (u EMRIjima, $\mathcal{L}$ može biti masa velike crne rupe). Sada razvijamo metriku sustava $g_{\mu\nu}$ u granici $m/\mathcal{L} \to 0$ i dobivamo

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \epsilon h^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 h^{(2)}_{\mu\nu} + O(\epsilon^3)$$

gdje smo uključili ϵ kao formalni parametar u razvoju. $\eta_{\mu\nu}$ je ovdje pozadinska metrika, a $h^{(n)}_{\mu\nu}$ opisuju gravitacijske perturbacije uzrokovane malim tijelom. Metrika mora

[2] Koncept samosile prisutan je i u elektromagnetizmu što je opisano u dodatku A.

zadovoljavati Einsteinovu jednadžbu $G_{\mu\nu}[g] = 8\pi T_{\mu\nu}$ gdje je $G_{\mu\nu}[g]$ Einsteinov tenzor pa dobivamo

$$G_{\mu\nu}[g] = G_{\mu\nu}[\eta] + \epsilon\delta G_{\mu\nu}[h^{(1)}] + \epsilon^2(\delta G_{\mu\nu}[h^{(2)}] + \delta^2 G_{\mu\nu}[h^{(1)}]) + O(\epsilon^3)$$

gdje je $\delta G(n)_{\mu\nu}[h^{(n)}]$ linearan u $h^{(n)}_{\mu\nu}$, a $\delta^2 G_{\mu\nu}[h^{(1)}]$ sadrži članove oblika $\partial h^{(1)}_{\mu\nu}\partial h^{(1)}_{\alpha\beta} + h^{(1)}_{\mu\nu}\partial^2 h^{(1)}_{\alpha\beta}$. Neka je u ovom slučaju tenzor energije i impulsa također aproksimiran točkastom česticom $T_{\mu\nu} = \epsilon T^{(1)}_{\mu\nu} + \epsilon^2 T^{(2)}_{\mu\nu} + O(\epsilon^3)$. Do prvog reda u ϵ nema problema i dobivamo lineariziranu Einsteinovu jednadžbu za točkasti izvor

$$\delta G_{\mu\nu}[h^{(1)}] = 8\pi T^{(1)}_{\mu\nu}\ . \tag{2}$$

Međutim, pogledamo li drugi red u ϵ vidimo da perturbacija $h^{(2)}_{\mu\nu}$ sadrži kvadratne kombinacije $h^{(1)}_{\mu\nu}$ u $\partial^2 G_{\mu\nu}$ koje se generalno ponašaju $\propto m^2/r^4$ u blizini čestice

$$\delta G_{\mu\nu}[h^{(2)}] = 8\pi T^{(2)}_{\mu\nu} - \delta^2 G_{\mu\nu}[h^{(1)}]\ .$$

Dobiveni singularitet nije integrabilan niti dobro definiran kao distribucija pa zaključujemo da ovako definirana jednostavna pretpostavka točkaste čestice nije dobra. Teorije koje se bave problemom samosile nastoje poopćiti pojam točkaste čestice, tj. reducirati tijelo na nekoliko vanjskih svojstava (poput mase, spina i sl.) te izbjeći reprezentaciju tenzora energije i impulsa preko delta funkcija.

1.4 MiSaTaQuWa jednadžbe

U pokušaju rješavanja prethodno opisanih problema, razvijaju se razne teorije. Trenutno najbolji opis gibanja "malog tijela" u općoj teoriji relativnosti daju MiSaTaQuWa jednadžbe koje uzimaju u obzir prvi red korekcije zbog efekta samosile. Dobivamo ih tako da iskoristimo relaciju (2) iz prošle cjeline te zapišemo tenzor energije i impulsa kao točkasti izvor mase M u koordinatama (t, x^i)

$$G^{(1)}_{ab}[h](t, x^i) = 8\pi M u_a(t) u_b(t) \frac{\delta^{(3)}(x^i - z^i(t))}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}$$

gdje su oznake iste kao i ranije s tim da je u^a 4-brzina na svjetskoj liniji γ definiranoj s $x^i(t) = z^i(t)$, a τ je vlastito vrijeme duž γ. Međutim, ova jednadžba nema rješenja za negeodetska gibanja pa ne možemo kao rezultat očekivati korekciju na geodezik. Biramo Lorentzov baždarni uvjet (uz $h = h_{ab}g^{ab}$)

$$\nabla^b \tilde{h}_{ab} = 0, \qquad \tilde{h}_{ab} \equiv h_{ab} - \tfrac{1}{2} h g_{ab} \tag{3}$$

tako da prethodna jednadžba postaje

$$\nabla^c \nabla_c \tilde{h}_{ab} - 2R^c{}_{ab}{}^d \tilde{h}_{cd} = -16\pi M u_a(t) u_b(t) \frac{\delta^{(3)}(x^i - z^i(t)}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}\ . \tag{4}$$

Kako bi dobili negeodetska gibanja, moramo relaksirati uvjet (3). Posljedično, rezultantne jednadžbe perturbacije metrike nisu ekvivalentne lineariziranim Einsteinovim jednadžbama. Očekujemo da će odstupanja od geodezika biti mala te da Lorentzov uvjet neće biti jako narušen pa možemo tvrditi da će dobivena jednadžba biti "približno ekvivalentna" Einsteinovoj. Drugi problem relacije (4) je da su pripadna rješenja singularna na svjetskoj liniji analogno elektromagnetskom problemu.

Unatoč matematičkim poteškoćama, prihvaćeno je da se, zanemarimo li spin i više multipole, gibanje dovoljno malog tijela može opisati rješavanjem jednadžbe (4) uz

$$u^b \nabla_b u^a = -\tfrac{1}{2}(g^{ab} + u^a u^b)(2\nabla_d h^{tail}_{bc} - \nabla_b h^{tail}_{cd})\big|_{z(\tau)} u^c u^d \tag{5}$$

gdje je

$$h^{tail}_{ab}(x) = M \int_{-\infty}^{\tau_{ret}^{-}} \left(G^{+}_{aba'b'} - \frac{1}{2} g_{ab} G^{+c}_{ca'b'} \right)(x, z(\tau')) u^{a'} u^{b'} d\tau' \ .$$

$G^{+}_{aba'b'}$ je retardirana Greenova funkcija za jednadžbu (4) normalizirana faktorom -16π, a τ_{ret}^{-} ukazuje na to da se integracija vrši samo po kratkom dijelu retardiranog vremena (tj. unutar svjetlosnog stošca, detalji u [6]).

Jednadžbe (4) i (5), poznate kao MiSaTaQuWa jednadžbe, izvedene su na različite načine. Ipak, u izvodima ovih jednadžbi i dalje se koristi puno *ad hoc* pretpostavki pa one ne daju potpuno zadovoljavajući teorijski opis. Zajednička pretpostavka svim izvodima je prethodno opisana "relaksacija Lorentzovog baždarenja".

1.5 Usporedba asimptotskih razvoja

Alternativni pristup MiSaTaQuWa jednadžbama koji su uveli Mino, Sasaki i Tanaka u [4] je tzv. metoda usporedbe asimptotskih razvoja (eng. *matched asymptotic expansion*). Promotrimo glatku jednoparametarsku familiju metrika $g_{ab}(\lambda)$ takvu da opisuje prostorvrijeme tijela (ili crne rupe) koje se skuplja u nulu kako $\lambda \to 0$. Ideja je napraviti razvoj u dva asimptotska područja - bliskom i dalekom. U bliskom području (eng. *near-zone*) metrika odgovara metrici tijela s korekcijom od pozadinskog prostorvremena. U dalekom području (eng. *far-zone*) metrika odgovara pozadinskom prostorvremenu s malom korekcijom od tijela. Glavna je pretpostavka da postoji dio prostorvremena u kojem su oba oblika metrike primjenjiva te ih možemo usporediti. Takva usporedba u konačnici daje jednadžbe gibanja tijela.

Cilj ovog seminara je pogledati rigorozan matematički izvod jednadžbi gibanja uključujući doprinose gravitacijske samosile. Takav izvod dati će vrlo općenitu jednadžbu za korekciju na svjetsku liniju γ u prvom redu računa smetnje. Preciznije, pokazat ćemo da je, do prvog reda u λ, korekcija na gibanje opisana vektorskim poljem Z^i koje opisuje infinitezimalni pomak do nove svjetske linije. Glavni rezultat seminara je jednadžba gibanja za Z^i

$$\frac{d^2 Z^i}{dt^2} = \frac{1}{2M} S^{kl} R_{kl0}{}^{i} - R_{0j0}{}^{i} Z^j - \left(h^{tail\ i}{}_{0,0} - \frac{1}{2} h^{tail}{}_{00}{}^{,i} \right) \tag{6}$$

gdje M odgovara masi, a S spinu tijela. h^{tail} odgovara onom iz 1.4. Također, aproksimacija točkaste čestice biti će direktna posljedica ovog izvoda, a ne jedna od pretpostavki. Drugim riječima, pokazat ćemo kako se pravilno tretira točkasta aproksimacija. Dobiveni rezultati vrijede za sva tijela (ili crne rupe) te ne ovise o izboru baždarenja.

Ovakvim rigoroznim izvodom izbjegavamo *ad hoc* pristupe i nezadovoljavajuće pretpostavke opisane u prethodnom tekstu. Analogna se metoda može koristiti za izvod samosile u elektromagnetizmu kao što je opisano u [8].

2 Rigorozan izvod gravitacijske samosile

U ovoj je cjelini dan pregled glavnih ideja i koraka opisanih u [7]. Glavne pretpostavke i rezultati su dani rigorozno, ali su neki tehnički postupci preskočeni zbog sažetosti.

2.1 Notacija i konvencije

U daljnjem tekstu grčki indeksi $\mu, \nu, ...$ označavaju komponente 4-vektora i tenzora. Latinski indeksi $i, j, ...$ označavaju prostorne komponente, a indeks 0 vremensku komponentu. Latinske indekse $a, b, ...$ koristimo za označavanje apstraktnih prostornovremenskih indeksa. Metrika Minkowskog η_{ab} koristi konvenciju $(-1, 1, 1, 1)$ te koristimo jedinice u kojima je $c = 1$.

Za funkcije i tenzore oblika $f(\lambda, x^\mu)$ pretpostavljamo da su "zajednički glatke" (eng. *jointly smooth*) u obje varijable, tj. da su im glatke sve pojedinačne i miješane derivacije.

2.2 Pretpostavke

Promotrimo glatku, jednoparametarsku familiju metrika $g_{ab}(\lambda)$ u kojoj se prisutno tijelo (ili crna rupa) skaliraju u dimenzije nula na samosličan način, tj. tako da i veličina i masa tijela budu proporcionalni λ. U granici $\lambda \to 0$, tijelo se skuplja u svjetsku liniju γ.

Limes jednoparametarske familije metrika $g_{ab}(\lambda)$ ovisi o načinu identifikacije točaka na mnogostrukosti [2]. Tu identifikaciju možemo zadati biranjem koordinata x^μ za svaki λ te identifikacijom točaka iste koordinatne vrijednosti. Ovaj se postupak može demonstrirati na primjeru jednoparametarske familije metrika izgrađene iz Schwarzschild-de Sitterove metrike

$$ds^2(\lambda) = -\left(1 - \frac{2M_0\lambda}{r} - C_0 r^2\right)dt^2 + \left(1 - \frac{2M_0\lambda}{r} - C_0 r^2\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \qquad (7)$$

gdje promatramo samo dio prostorvremena za koji je $r > \lambda R_0$ (za neki konstantan $R_0 > 2M_0$). Ova metrika opisuje vanjsko gravitacijsko polje sferičnog tijela ili crne rupe mase λM_0. Kako $\lambda \to 0$, dimenzija i masa tijela se približavaju nuli. Izaberemo li sada za identifikaciju koordinate (t, r, θ, φ) u kojima je zadana jednadžba (7), u limesu $\lambda \to 0$ dobivamo de Sitterovo prostorvrijeme

$$ds^2(\lambda = 0) = -(1 - C_0 r^2)dt^2 + (1 - C_0 r^2)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega^2 \ .$$

S druge strane, možemo uzeti limes i tako da za proizvoljno vrijeme t_0 prvo uvedemo skalirane koordinate $\bar{t} \equiv (t - t_0)/\lambda$ i $\bar{r} \equiv r/\lambda$ i skaliranu metriku $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}} \equiv \lambda^{-2} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$ tako da je

$$d\bar{s}^2(\lambda) = -\left(1 - \frac{2M_0}{\bar{r}} - C_0\lambda^2\bar{r}^2\right)d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2M_0}{\bar{r}} - C_0\lambda^2\bar{r}^2\right)^{-1} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \qquad \bar{r} > R_0$$

Sada u limesu $\lambda \to 0$ dobivamo Schwarzschildovu metriku za M_0

$$d\bar{s}^2(\lambda = 0) = -\left(1 - \frac{2M_0}{\bar{r}}\right)d\bar{t}^2 + \left(1 - \frac{2M_0}{\bar{r}}\right)^{-1} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 d\Omega^2 \qquad \bar{r} > R_0 \ .$$

Potaknuti prethodnim primjerom, namećemo općenite uvjete na pretpostavljenu jednoparametarsku familiju metrika $g_{ab}(\lambda)$:

(i) Postoji *prirodni limes*: $g_{ab}(\lambda)$ je takva da postoje koordinate x^α takve da je $g_{\mu\nu}(\lambda, x^\alpha)$ glatka u (λ, x^α), barem za $r > \lambda\bar{R}$ (gdje je $r \equiv \sqrt{x_i x^i}$, a $\bar{R}$ konstanta). Za svaki λ i $r > \lambda\bar{R}$, $g_{ab}(\lambda)$ je rješenje vakuumske Einsteinove jednadžbe. Nadalje, $g_{\mu\nu}(\lambda = 0, x^\alpha)$ je glatka u x^α, uključujući $r = 0$ te je za $\lambda = 0$ krivulja γ definirana s $r = 0$ vremenskog tipa.[3]

(ii) Postoji *skalirani limes*: Za svaki t_0, definiramo

$$\bar{t} \equiv (t - t_0)/\lambda \qquad \bar{x}^i \equiv x^i/\lambda$$

te je metrika $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda; t_0; \bar{x}^\alpha) \equiv \lambda^{-2} g_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda; t_0; \bar{x}^\alpha)$ glatka u $(\lambda; t_0; \bar{x}^\alpha)$ za $\bar{r} \equiv r/\lambda > \bar{R}$.

Sada ćemo pokazati da prethodna dva uvjeta ne određuju potpuno jednoparametarsku familiju metrika koju tražimo. Definiramo pomoćne varijable α i β

$$\alpha \equiv r \qquad \beta \equiv \lambda/r \tag{8}$$

te vidimo da će β biti u rasponu $0 \leq \beta \leq 1/\bar{R}$. Neka je f komponenta $g_{ab}(\lambda)$ te je ona sada, u standardnim sferičnim koordinatama, funkcija $(\alpha, \beta, t, \theta, \varphi)$. Prirodni limes sada možemo opisati kao limes $\beta \to 0$ za neki $\alpha > 0$, a skalirani limes odgovara limesu $\alpha \to 0$ za neki $\beta > 0$. Fiksiramo li (t, θ, φ), iz pretpostavki (i) i (ii) slijedi

- (i) $\to$ za fiksni $\alpha > 0$, komponenta f je glatka u β, uključujući $\beta = 0$
- (i) $\to$ za $\beta = 0$, f je glatka u α uključujući $\alpha = 0$
- (ii) $\to$ za fiksni $\beta > 0$, f je glatka u α

[3] Mogli smo, alternativno, pretpostaviti da "unutarnji prostor" ($r \leq \lambda\bar{R}$) ispunjava materija koja zadovoljava dominantan energetski uvjet, ali iz toga bi se također moglo pokazati da je γ vremenskog tipa.

Dakle, možemo zaključiti da je za fiksirane (t, θ, φ) komponenta metrike f dobro definirana u $(\alpha, \beta) = 0$ te da je glatka u α duž ”α-osi” ($\beta = 0$). Međutim, naše pretpostavke (i) i (ii) ne govore ništa o kontinuiranosti ni glatkosti f kad $(\alpha, \beta) \to 0$ iz ostalih smjerova. Takvo ponašanje može dovesti do nepoželjnih divergencija metrike u slučajevima kada i r i λ teže u nulu, ali različitim brzinama pa $r/\lambda \to \infty$. U takvim bi se metrikama posljedično moglo dogoditi da komponente u limesu ne teže u iste vrijednosti pa bi se pojavilo tzv. ”ispupčenje” u zakrivljenosti. S ciljem uklanjanja ovakvog ponašanja, namećemo još jedan uvjet.

(iii) Uvjet uniformnosti: Svaka komponenta $g_{ab}(\lambda)$ u koordinatama x^μ je glatka funkcija u svim varijablama.

Uvjeti (i)-(iii) čine cjelokupan skup pretpostavki koje određuju $g_{ab}(\lambda)$. Važno je napomenuti da ove pretpostavke na zadaju nikakve restrikcije na metriku za $r < \lambda\bar{R}$ te da taj dio prostora može biti ispunjen bilo kakvom običnom materijom ili crnom rupom. Budući da velike vrijednosti koordinate r nisu relevantne u ovom razmatranju, potrebno je da uvjeti budu zadovoljeni za $r < K$, gdje je K neka konstanta.

Sada možemo napraviti korespondenciju definiranih pojmova s pojmovima iz metode usporedbe asimptotskih razvoja. Osvrnemo li se na terminologiju iz 1.5, pretpostavka postojanja prirodnog limesa odgovara postojanju ”dalekog područja”, a pretpostavka skaliranog limesa postojanju ”bliskog područja”. Uvjet uniformnosti omogućit će postojanje dijela prostorvremena u kojem će oba ova razvoja biti valjana.

2.3 *Posljedice pretpostavki*

Asimptotski ravna pozadina

Promotrimo posljedice prethodnih pretpostavki. Zbog uvjeta uniformnosti, komponente familije metrika $g_{ab}(\lambda)$ glatke su u varijablama (α, β) u $(0, 0)$ pa možemo koristiti Taylorov razvoj do konačnih redova N i M

$$g_{\mu\nu}(\lambda; t, r, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \alpha^n \beta^m (a_{\mu\nu})_{nm}(t, \theta, \varphi) + O(\alpha^{N+1}) + O(\beta^{M+1}) \ .$$

Uvrštavanjem α i β iz (8) te pojednostavljivanjem izraza dobivamo

$$g_{\mu\nu}(\lambda; t, r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{M} \lambda^m \sum_{n=0}^{N} r^{n-m} (a_{\mu\nu})_{nm}(t, \theta, \varphi) \ . \tag{9}$$

Izraz (9) odgovara razvoju $g_{ab}(\lambda)$ u dalekom području. Na sličan način možemo napraviti i Taylorov razvoj $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}$

$$\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda; t_0; \bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{N} \sum_{m=0}^{M} \lambda^n \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^{m-n} (a_{\mu\nu})_{nm}(t_0 + \lambda\bar{t}, \theta, \varphi) \tag{10}$$

pri čemu koristimo svojstva metrike izvedena u [7]. Razvijamo i koeficijente $(a_{\mu\nu})_{nm}$ oko $\bar{t} = 0$ uz pokratu

$$(b_{\mu\nu})_{nmp} \equiv \frac{1}{p!}\frac{\partial^p}{\partial t^p}(a_{\mu\nu})_{nm}\Big|_{t=t_0}. \tag{11}$$

Grupiranjem sumacija dobivamo izraz za razvoj $g_{ab}(\lambda)$ u bliskom području

$$\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda; t_0; \bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = \sum_{q=0}^{N+P} \lambda^q \sum_{p=0}^{min(q,P)} \sum_{m=0}^{M} \bar{t}^p \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^{m-q+p} (b_{\mu\nu})_{(q-p)mp}(t_0; \theta, \varphi). \tag{12}$$

Iz (12) vidimo da za pozadinsku metriku ($\lambda = 0$) dobivamo

$$\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda = 0; t_0; \bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{M} \left(\frac{1}{\bar{r}}\right)^{m} (a_{\mu\nu})_{0m}(t_0; \theta, \varphi) \tag{13}$$

gdje smo iskoristili $(b_{\mu\nu})_{0m0} = (a_{\mu\nu})_{0m}$. U (13) nema ovisnosti o $\bar{t}$ te postoje samo negativne potencije $\bar{r}$ pa zaključujemo da pozadinska skalirana metrika $\bar{g}_{ab}(\lambda = 0)$ opisuje stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme.

Geodezik i aproksimacija točkaste čestice

Sada želimo pokazati da svjetska linija γ koja se pojavljuje u (i) mora biti geodezik pozadinske metrike $g_{ab}(\lambda = 0)$ te da, do prvog reda u λ, $g_{ab}(\lambda)$ odgovara metrici točkaste čestice.

Zapišimo prvo razvoj u dalekom području do prvog reda u λ.

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\lambda) =& (a_{\alpha\beta})_{00}(t) + (a_{\alpha\beta})_{10}(t,\theta,\varphi) r + O(r^2) \\ &+ \lambda\left[(a_{\alpha\beta})_{01}(t,\theta,\varphi)\frac{1}{r} + (a_{\alpha\beta})_{11}(t,\theta,\varphi) + O(r)\right] + O(\lambda^2), \qquad r > 0 \end{aligned}$$

Može se pokazati (detalji u [7]) da bez gubitka općenitosti možemo izborom koordinata metriku izraziti kao metriku Minkowskog ($\eta_{\alpha\beta}$) s korekcijom do prvog reda u λ. Biramo Fermijeve normalne koordinate (dodatak B) i dobivamo

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + O(r) + \lambda h_{\alpha\beta} + O(\lambda^2), \qquad h_{\alpha\beta} = \frac{c_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi)}{r} + O(1)\,. \tag{14}$$

$h_{\alpha\beta}$ je sada $O(\lambda)$ dio metrike odgovoran za perturbaciju. Prema (i), $g_{ab}(\lambda)$ je vakuumsko rješenje Einsteinove jednadžbe za svaki λ ($r > \lambda\bar{R}$). Slijedi da je za svaki $r > 0$, h_{ab} rješenje lineariziranih Einsteinovih jednadžbi, tj.

$$G^{(1)}_{ab}[h_{cd}] = -\frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b h^c_c - \frac{1}{2}\nabla^c\nabla_c h_{ab} + \nabla^c\nabla_{(b}h_{a)c} = 0 \qquad r > 0$$

gdje je ∇_a operator derivacije za $g_{ab}(\lambda = 0)$ te se podizanje i spuštanje indeksa vrši s pozadinskom metrikom $g_{ab}(\lambda = 0)$. Možemo definirati distribuciju $T_{ab} \equiv G^{(1)}_{ab}[h_{cd}]/8\pi$

koju interpretiramo kao 'izvor' perturbacije metrike (14). Daljnjim matematičkim postupkom i primjenom lineariziranog Bianchijevog identiteta ($\nabla^a G^{(1)}_{ab} = 0$) dobivamo

$$T_{ab} = M u_a u_b \frac{\delta^{(3)}(x^i)}{\sqrt{-g}} \frac{d\tau}{dt}. \tag{15}$$

U prethodnom je izrazu M konstanta (nazivamo ju *masom* čestice), a u^a 4-brzina svjetske linije γ koja mora biti geodezik ako je $M \neq 0$. $\delta^{(3)}(x^i)$ je "koordinatna delta funkcija", tj. $\int \delta^{(3)}(x^i) d^3 x^i = 1$.

Ukratko, pokazali smo da za jednoparametarsku familiju metrika $g_{ab}(\lambda)$ perturbacija h_{ab} (u dalekom području, do prvog reda u λ) odgovara rješenju Einsteinove jednadžbe pri čemu je izvor točkasta čestica opisana relacijom (15). Dakle, točkasti izvor nije pretpostavka već posljedica ove analize te dolazi prirodno kao prva aproksimacija malih tijela.

2.4 Opis gibanja do prvog reda u λ

U prethodnom smo dijelu pokazali da se tijelo do nultog reda u λ giba po geodeziku pozadinskog prostorvremena $g_{ab}(\lambda = 0)$. Sada želimo dodati korekciju na to gibanje do prvog reda u λ (u dalekom području).

Prisjetimo se da smo osnovne pretpostavke zadali na dijelu prostorvremena za koji je $r > \lambda \bar{R}$. Promotrimo li slučajeve u kojima je $\lambda > 0$, događa se da u okolini γ metrika ne mora biti dobro definirana niti određena nametnutim uvjetima. Iz tog razloga nije sasvim jasno značenje 'perturbativne korekcije' za $\lambda > 0$. Ako je u nultom red gibanje opisano svjetskom linijom γ definiranom s $x^i(t) = 0$, u prvom redu želimo korekciju oblika

$$x^i(\lambda, t) = \lambda Z^i(t) + O(\lambda^2) \ . \tag{16}$$

Kada tražimo korekciju, zapravo trebamo prostorni dio vektorskog polja Z^a, definiranog duž γ, kojim je opisan infinitezimalni pomak u odnosu na svjetsku liniju. Z^0 nije fizikalno relevantna veličina pa možemo jednostavno pisati $Z^0 = 0$ tako da je Z^a ortogonalan na 4-brzinu u^a u pozadinskoj metrici $g_{ab}(\lambda = 0)$.

Primijetimo da će Z^a i pripadne jednadžbe gibanja ovisiti o izboru baždarenja h_{ab} iz (14). To možemo direktno vidjeti primijenimo li glatku baždarnu transformaciju na koordinate

$$x^\mu \to \hat{x}^\mu = x^\mu - \lambda A^\mu(x^\nu) + O(\lambda^2) \ . \tag{17}$$

Može se pokazati da za ovakvu transformaciju vrijedi

$$h_{\mu\nu} \to \hat{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + 2\nabla_{(\mu} A_{\nu)} \ .$$

Nova svjetska linija će sada analogno biti oblika $\hat{x}^i(\lambda, t) = \hat{z}^i(\lambda, t)$ [5] gdje je

$$\hat{z}^i(t) = z^i(t) - \lambda A^i(t, x^j = 0) + O(\lambda^2)$$

pa se Z^a, u slučaju da opisuje isto perturbirano gibanje, transformira kao

$$Z^i(t) \to \hat{Z}^i(t) = Z^i(t) - A^i(t, x^j = 0). \tag{18}$$

Dakle, da bi sačuvali baždarnu invarijantnost moramo promatrati par $(h_{ab}, Z^a(t))$.

Pokazali smo da za svaki t_0, familija metrika $\bar{g}_{\bar{\mu}\bar{\nu}}(\lambda = 0; t_0; \bar{x}^\alpha)$ opisuje stacionarno, asimptotski ravno prostorvrijeme. Iz tog razloga, ona ima dobro definirane multipolne momente mase i kutne količine gibanja koji karakteriziraju prostorvrijeme. Ti multipolni momenti ovise o izboru konformalnog faktora, tj. o izboru "ishodišta". [3] Biramo konformalni faktor $\Omega = 1/\bar{r}^2$ za definiciju svih multipola što odgovara izboru ishodišta $\bar{r} = 0$. U [7] je pokazano da se izborom takvog konformalnog faktora postiže da baždarna transformacija (17) postavlja maseni dipolni moment u nulu. Također se pokazuje da se nove koordinate $\hat{\bar{x}}^i$ u bliskom području za koje maseni dipolni moment iščezava mogu se interpretirati kao 'tjelesno centrirane' koordinate do nultog reda u λ, a da ishodiše $\hat{x}^i = 0$ u koordinatama dalekog područja možemo interpretirati kao centar mase do prvog reda u λ. Uzevši u obzir prethodne napomene, možemo definirati korekciju na geodezik na sljedeći način:

Prvo, biramo prigodne koordinate x^μ, do nultog reda u λ, za pozadinsko prostorvrijeme opisano $g_{ab}(\lambda = 0)$ (ponovno biramo Fermijeve normalne koordinate). Nadalje, definiramo koordinate x^μ do prvog reda u λ izborom prigodnog baždarenja za h_{ab} (ovdje ćemo koristiti Lorentzovo baždarenje[4]). Potom uvodimo baždarnu transformaciju (17) i zahtijevamo da transformacija A^μ bude takva da dipolni moment mase za $\bar{g}_{ab}(\lambda, t_0)$ iščezava za svaki t_0. Budući da je položaj centra mase tijela u novim koordinatama $\hat{z}^i(t) = 0$, prva perturbativna korekcija $Z^a(t)$ dana je sa

$$Z^i(t) = A^i(t, x^j = 0) \; . \tag{19}$$

Z^a će, naravno, ovisiti o konkretnom izboru familije metrika, ali za sada želimo samo izvesti univerzalne relacije koji zadovoljava $Z^a(t)$ uz pretpostavke (i)-(iii). Takve bi relacije dale zakon gibanja točkastih čestica koji u prvom redu uključuje efekte samosile.

Skica matematičkog postupka

Ostatak računa je samo skiciran jer je vrlo tehničke prirode, a fokus je na glavnim rezultatima i zaključku. Pretpostavljamo da je $M \neq 0$. Također, biramo Fermijeve normalne koordinate x^μ tako da do prvog reda u λ perturbacija $h_{\mu\nu}$ zadovoljava Lorentzovo baždarenje. Rješavamo lineariziranu Einsteinovu jednadžbu koristeći Hadamardove razvoje kao u [4] te dobivamo razvoj metrike do prvog reda u λ

[4] Lorentzovo baždarenje: $\nabla^a(h_{ab} - \frac{1}{2}h g_{ab}) = 0$

$$g_{\alpha\beta}(\lambda;t,x^i) = \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{B}_{\alpha i\beta j}(t)x^i x^j + O(r^3) + \lambda\bigg(\frac{2M}{r}\delta_{\alpha\beta} + h^{tail}_{\alpha\beta}(t,0) + h^{tail}_{\alpha\beta i}(t,0)x^i + M\mathcal{R}_{\alpha\beta}(t,x^i) + O(r^2)\bigg) + O(\lambda^2)\ .$$

$\mathcal{B}$ i $\mathcal{R}$ su tenzori čije su komponente funkcije koordinata i Riemannovog tenzora, a h^{tail} tenzori dani integralima retardiranih Greenovih funkcija (relacije (65)-(69) u [7]). Superskript *tail* označava da se integral odnosi samo na kratak interval retardiranog vremena (unutar svjetlosnog stošca) kako ne bi uračunali efekte odlazećih gravitacijskih valova.

Ipak, da bi odredili doprinose gravitacijske samosile na gibanje γ do prvog reda u λ, morat ćemo dobiti izraz za metriku do drugog reda u λ. Točnije, rješavamo Einsteinovu jednadžbu

$$G^{(1)}_{ab}[j] = -G^{(2)}_{ab}[h,h]$$

za $j_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\partial^2 g_{\mu\nu}/\partial\lambda^2|_{\lambda=0}$ te ponovno koristimo Lorentzovo baždarenje. Sada dobivamo metriku do $O(\lambda^2)$

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta}(\lambda;t,x^i) &= \eta_{\alpha\beta} + \mathcal{B}_{\alpha i\beta j}(t)x^i x^j + O(r^3) \\ &+ \lambda\bigg(\frac{2M}{r}\delta_{\alpha\beta} + h^{tail}_{\alpha\beta}(t,0) + h^{tail}_{\alpha\beta i}(t,0)x^i + M\mathcal{R}_{\alpha\beta}(t) + O(r^2)\bigg) \\ &+ \lambda^2\bigg(\frac{M^2}{r^2}(-2t_\alpha t_\beta + 3n_\alpha n_\beta) + \frac{2}{r^2}P_i(t)n^i\delta_{\alpha\beta} + \frac{1}{r^2}t_{(\alpha}S_{\beta)j}(t)n^j \\ &+ \frac{1}{r}K_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi) + H_{\alpha\beta}(t,\theta,\varphi) + O(r)\bigg) + O(\lambda^3) \end{aligned} \tag{20}$$

gdje su K, H i S nepoznati tenzori. Za S vrijedi $S_{0i} = 0$ te je $t_\alpha \equiv \delta_{\alpha 0}$, a $n^i \equiv x^i/r$.

Sada možemo iskoristiti postupak opisan na kraju prethodnog odjeljka. Promatramo glatku koordinatnu transformaciju

$$\hat{x}^\mu = x^\mu - \lambda A^\mu(x^\nu) + O(\lambda^2)$$

te zahtijevamo da transformacija A^μ bude takva da maseni dipolni moment metrike $\bar{g}_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}(\lambda,t_0)$ iščezava za svaki t_0. Uvrštavamo direktno u (20) i dobivamo izraz za metriku do drugog reda za daleko područje, a pomoću izraza (9)-(12) i metriku za blisko područje. (Izrazi (80) i (84) u [7]). Konačno, zahtijevamo da obje ove metrike budu rješenja Einsteinove jednadžbe (sada gledamo u bliskom području):

$$G^{(1)}_{ab}[\bar{g}^{(2)}] = -G^{(2)}_{ab}[\bar{g}^{(1)},\bar{g}^{(1)}]$$

Nakon iscrpnog matematičkog postupka u kojem eliminiramo različite članove zbog simetrija i trnjenja u beskonačnosti, u konačnici dobivamo jednadžbu gibanja za A^{μ}

$$A_{i,00} = \frac{1}{2M} S^{kl} R_{kl0i} - R_{0j0i} A^{j} - \left(h^{tail}_{i0,0} - \frac{1}{2} h^{tail}_{00,i} \right)$$

što se, uzmemo li u obzir (19) iz prethodne cjeline, svodi na

$$\frac{d^2 Z^i}{dt^2} = \frac{1}{2M} S^{kl} R_{kl0}{}^{i} - R_{0j0}{}^{i} Z^{j} - \left(h^{tail\ i}{}_{0,0} - \frac{1}{2} h^{tail}{}_{00}{}^{,i} \right) . \tag{21}$$

Ovdje je $Z^i(t)$ korekcija prvog reda na geodezik γ pozadinskog prostorvremena te smo reproducirali jednadžbu (6) iz uvoda.

Možemo primijetiti da je prvi član s desne strane "spinska sila" (Papapetrou [1]), a drugi član je iz jednadžbe devijacije geodezika te se pojavljuje zato što se perturbirana svjetska linija ne poklapa s pozadinskom svjetskom linijom. Treći član dolazi od gravitacijske samosile koji se manifestira kao regularizirana gravitacijska sila od vlastitog polja čestice.

3 Zaključak

Glavni rezultat ovog rada je jednadžba gibanja (21) za vektor pomaka Z^i koji daje korekciju na geodezik u prvom redu perturbativnog računa. Rigoroznim tretmanom samosile, reproducirali smo rezultate ranijih teorija koristeći isključivo pretpostavke (i)-(iii). Važno je napomenuti da ovaj pristup ne daje dobar globalni vremenski opis gibanja bez obzira na izbor λ zato što se lokalne korekcije na gibanje akumuliraju u vremenu. Jedna mogućnost bi bila pokušati "zalijepiti" više takvih rješenja te na taj način pokušati konstruirati svjetsku liniju koja daje točan opis gibanja čestice za dulje vremenske intervale. U granici puno takvih spojenih dijelova, očekuje se da se rješenje može opisati jednom samo-konzistentnom diferencijalnom jednadžbom koja bi dala dobru aproksimaciju gibanja dok god je *lokalno* (u vremenu) blisko geodetskom. Još uvijek nije nađen rigorozan način za dobivanje ovakve jednadžbe te se za sustave koji rade na konačnim vremenskim skalama (poput EMRI-ja) i dalje koriste MiSaTaQuWa jednadžbe [7].

A Problem samosile u elektromagnetizmu

Kako bi demonstrirali problem samosile u elektromagnetizmu, koristimo primjer iz [9]. Promotrimo ubrzavajući točkasti naboj q u ravnom prostorvremenu u nerelativističkom slučaju. Statičan bi točkasti naboj stvarao Coulombov potencijal te bi se, u slučaju testnog naboja, gibao pod utjecajem Lorentzove sile

$$m \frac{d^2 \vec{z}}{dt^2} = \vec{F}_{ext} \equiv q(\vec{E}_{ext} + \vec{v} \times \vec{B}_{ext})$$

gdje je $\vec{v} = d\vec{z}/dt$. Međutim, ako naboj više ne tretiramo kao testni te u obzir uzmemo promjene polja kao posljedicu akceleracije naboja, dobivamo Abraham-Lorentz jednadžbu gibanja

$$m\frac{d^2\vec{z}}{dt^2} = \vec{F}_{ext} + \frac{2}{3}\frac{q}{m^2}\frac{d\vec{F}_{ext}}{dt} \tag{22}$$

u kojoj je drugi član doprinos samosile. Samosila je u ovom slučaju *disipativna* te se izgubljena energija zrači u obliku elektromagnetskih valova, a ta emisija zračenja uzrokuje povratnu silu na naboj.

Jednadžba (22) može se generalizirati za relativistički slučaj te dobivamo Abraham-Lorentz-Dirac jednadžbu.

$$m\frac{D^2 z^\mu}{d\tau^2} = F^\mu_{ext} + \frac{2}{3}\frac{q^2}{m}(\delta^\mu_\nu + u^\mu u_\nu)\frac{DF^\nu_{ext}}{d\tau}$$

gdje je $F^{ext}_\mu \equiv qF^{ext}_{\mu\nu}u^\nu$ kovarijantni oblik Lorentzove sile, τ vlastito vrijeme, $u^\mu \equiv dz^\mu/d\tau$ 4-vektor brzine, a $D/d\tau \equiv u^\mu\nabla_\mu$ kovarijantna derivacija duž svjetske linije.

Kod modela elektromagnetske samosile pojavljuju se slični problemi kao u gravitacijskom slučaju te se također mogu tretirati metodom usporedbe asimptotskih razvoja. Rigorozniji izvod uz korištenje ove metode može se naći u [8].

B Fermijeve normalne koordinate

Da bi konstruirali Fermijeve normalne koordinate u točki x koja je u okolini svjetske linije γ, tražimo jedinstvene prostorne geodezike β koji prolaze točkom x i ortogonalno sijeku γ. Neka je točka sjecišta $\bar{x} \equiv z(\tau)$ gdje je τ vlastito vrijeme. Tenzorima u $\bar{x}$ pridružujemo indekse $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$... Fermijeve normalne koordinate u točki x definirane su kao

$$\hat{x}^0 = \tau, \qquad \hat{x}^a = -e^a_{\bar{\alpha}}(\bar{x})\sigma^{\bar{\alpha}}(x,\bar{x}), \qquad \sigma_{\bar{\alpha}}(x,\bar{x})u^{\bar{\alpha}}(\bar{x}) = 0\ .$$

Posljednja relacija određuje $\bar{x}$ zahtjevom da je $-\sigma^{\bar{\alpha}}$ (tangentni vektor od β u $\bar{x}$) ortogonalan na $u^{\bar{\alpha}}$ (tangentni vektor od γ) [6].

Literatura

[1] Achille Papapetrou. „Spinning test-particles in general relativity. I”. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences* 209.1097 (1951.), str. 248–258.

[2] Robert Geroch. „Limits of spacetimes”. *Communications in mathematical Physics* 13 (1969.), str. 180–193.

[3] Robert Geroch. „Multipole moments. II. Curved space”. *Journal of Mathematical Physics* 11.8 (1970.), str. 2580–2588.

[4] Yasushi Mino, Misao Sasaki i Takahiro Tanaka. „Gravitational radiation reaction to a particle motion”. *Physical Review D* 55.6 (1997.), str. 3457.

[5] Leor Barack i Amos Ori. „Gravitational self-force and gauge transformations”. *Physical Review D* 64.12 (2001.), str. 124003.

[6] Eric Poisson. *A relativist’s toolkit: the mathematics of black-hole mechanics*. Cambridge university press, 2004. Pogl. 7, 9.3.

[7] Samuel E Gralla i Robert M Wald. „A rigorous derivation of gravitational self-force”. *Classical and Quantum Gravity* 25.20 (2008.), str. 205009.

[8] Samuel E Gralla, Abraham I Harte i Robert M Wald. „Rigorous derivation of electromagnetic self-force”. *Physical Review D* 80.2 (2009.), str. 024031.

[9] Leor Barack i Adam Pound. „Self-force and radiation reaction in general relativity”. *Reports on Progress in Physics* 82.1 (2018.), str. 016904.

[10] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.