Prepared for submission to JHEP

Generalizacija Yang-Millsove teorije

Zlatko Posavec

Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Bijenička 32, Zagreb

Abstract: Polovicom 20. stoljeća, C. N. Yang i R. L. Mills iznose, motivirani modelom elektrodinamike kao U(1) baždarne teorije, model SU(2) baždarne teorije promatrajući izospinsku simetriju. Iako je ta simetrija pokazana nedostatnom, sam model koji su Yang i Mills iznijeli je uspješno opisivao teorije s neabelovim grupama simetrija te se koristi kao baza za ostale neabelove baždarne teorije, glavni primjer koje je kvantna kromodinamika. Kasnije, pojavom teorije struna, 70. godina prošlog stoljeća, M. Kalb i P. Ramond objavljuju generalizaciju elektrodinamike na dvodimenzionalnoj teoriji struna u kojoj je baždarno polje bila 2-forma. Od tada postojala su nastojanja generalizacije Yang-Mills teorije na diferencijalne forme viših stupnjeva. Brojni pokušaji generalizacije su podbacili dobivajući uvjete koji su tražili da baždarna grupa bude abelova. Jedna metoda koja se čini kao pogodan kandidat za definiciju takvih neabelovih baždarnih teorija se pojavila prijelazom stoljeća razvojem teorije kategorija u matematici, konkretnije, pojava viših kategorija. U ovom radu se iznosi standarda formulacija Yang-Millsove teorija u diferencijalnoj geometriji preko koneksija na glavnim G-svežnjevima, vrši se kategorifikacija strukture svežnja te se na primjeru 2-kategorija reprezentacijom transportnog funktora trivijalnog 2-svežnja preko po putevima uređenih eksponenata računaju tenzori jačine odgovarajućih baždarnih polja kao i njihove varijacije pri infinitezimalnim baždarnim transformacijama.

Sadržaj

1 Uvod u Yang-Millsovu teoriju **1**
1.1 Standardna Yang-Millsova teorija 1

2 Kategorifikacija Yang-Millsove teorije **4**

3 Prelazak na više kategorije **9**
3.1 2-teorija 9

4 Zaključak **12**

1 Uvod u Yang-Millsovu teoriju

Motivirani uspjehom elektrodinamike kao U(1) baždarne teorije polja, C. N. Yang i R. L. Mills razvijaju polovicom 20. stoljeća formalizam baždarnih teorija baziranih na neabelovim grupama baždarnih transformacija. U njihovom radu [1], Yang i Mills promatraju izospinsku simetriju kod izotopa te uvode novo baždarno polje kao realizacija takve simetrije. Iako se ta simetrija kasnije ispostavila kao nedostatna, sam matematički model koji su uveli Yang i Mills se pokazao iznimno uspješnim pri uvođenju kvantne kromodinamike, a posljedično i standardnog modela te se koristi kao baza za konstrukciju neabelovih baždarnih teorija. Naravno, od vremena originalnog članka do danas došlo je do značajnih pomaka u formalizmu teorije, te je potrebno iznijeti polaznu točku ovog rada, a to su Yang-Millsove teorije u formalizmu diferencijalne geometrije.

1.1 Standardna Yang-Millsova teorija

U formalizmu diferencijalne geometrije, proširenjem teorije na općenite glatke mnogostrukosti na kojima neće nužno postojati jedinstvena karta koja prekriva cijelu mnogostrukost, dolazi do potrebe za definiranjem globalnog objekta koji će sadržavati sve potrebne informacije na cijeloj mnogostrukosti. U slučaju Yang-Millsove teorije baždarno polje je definirano kao koneksija na glavnom svežnju nad baznom mnogostukosti. Za početak se uvode osnovne definicije ovih objekata.

Definicija 1.1. *Neka su P i M glatke mnogostrukosti, G Liejeva grupa te $\triangleleft : P \times G \to P$ slobodna i tranzitivna desna G-akcija na P. Za P kažemo da je glavni G-svežanj ako postoji glatka surjekcija $\pi : P \to M$ takva da je $\pi^{-1}(\{p\}) \cong G$ za svaki $p \in P$. Preslikavanje π se naziva projekcijom, prostori $\pi^{-1}(\{p\})$ vlakna, a mnogostrukost M bazna mnogostrukost.*

Izomorfnost između vlakana i G u gornjoj definicije je izomorfnost topoloških prostora. Na vlaknima ne postoji jedinstven odabir bazne točke pa ona nemaju strukturu Liejeve grupe već su G-torzori. Desna akcija grupe G zapravo čuva vlakna u smislu da je transformirana točka unutar istog vlakna kao i početna točka te služi za pomak različitih objekata iz bazne mnogostrukosti po cijelom svežnju. Nadalje, slično kako se za glatke mnogostrukosti konstruiraju atlasi koji daju na okolinama točaka difeomorfnost s euklidskim prostorom, za potrebe definicije diferencijalne strukture na cijelom svežnju, postavlja se restrikcija lokalne trivijalnosti.

Definicija 1.2. *Za glavni G-svežanj P kažemo da je lokalno trivijalan ako postoji otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i\in I}$ bazne mnogostrukosti M zajedno sa difeomorfizmima $\{\phi_i : U_i \times G \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ tako da vrijedi $(\pi \circ \phi_i)(m, g) = m$ za sve $m \in U_i$ i $g \in G$. Za preslikavanja ϕ_i se kaže da su lokalne trivijalizacije svežnja P.*

Ovo svojstvo kaže kako su glavni G-svežnjevi zapravo lokalno difeomorfni produktu euklidskog prostora sa Liejevom grupom G. Ponovno, po uzoru na same mnogostrukosti, postoji potreba definirati tzv. funkcije prijelaza na presjecima otvorenih skupova u pokrivaču koje omogućuju na točkama u presjeku prelazak između različitih lokalnih trivijalizacija, tj. daju relaciju ekvivalencije među njima.

Definicija 1.3. *Neka su ϕ_i te ϕ_j lokalne trivijalizacije iz definicije 1.2 takve da je $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, te neka je $m \in M$. Kako su ϕ_i te ϕ_j difeomorfizmi, postoje $g_i, g_j \in G$ takvi da je $\phi_i(m, g_i) = \phi_j(m, g_j)$. Glatke funkcije $t_{ij} : (U_i \cap U_j) \to G$. takve da je $g_j = g_i t_{ij}(m)$, odnosno $\phi_j(m, g_j) = \phi_i(m, g_i t_{ij}(m))$, nazivaju se funkcijama prijelaza. Posebno, kako bi se svi otvoreni skupovi mogli konzistentno povezati, nameću se sljedeći uvjeti na funkcije prijelaza:*

$$t_{ii}(p) = e \quad (p \in U_i), \tag{1.1}$$
$$t_{ij}(p) = (t_{ji}(p))^{-1} \quad (p \in U_i \cap U_j), \tag{1.2}$$
$$t_{ij}(p)t_{jk}(p) = t_{ik}(p) \quad (p \in U_i \cap U_j \cap U_k), \tag{1.3}$$

gdje je e identitet u G.

Valja primijetiti kako funkcije prijelaza daju relaciju ekvivalencije između lokalnih trivijalizacija.

Definicija 1.4. *Neka je $U \subset M$ otvoreni potprostor bazne mnogostrukosti iz definicije 1.1. Glatko preslikavanja $\sigma : M \to P$ takvo da vrijedi $\pi \circ \sigma = id_M$ se naziva (globalnim) prerezom. Često nije moguće definirati takvo preslikavanje na cijelom svežnju te su od praktične primjene korisni tzv. lokalni prerezi definirani na U, a koji poštuju gornju relaciju.*

Definicija 1.5. *Neka je $\{U_i\}_{i\in I}$ otvoreni pokrivač glatke mnogostrukosti M, te neka su $\{\sigma_i : U_i \to \pi^{-1}(U_i)\}_{i\in I}$ lokalni prerezi svežnja P. Tada se definira tzv. kanonske lokalne trivijalizacije*

$$\phi_i(m, g) = \sigma_i(m) \triangleleft g.$$

Za kanonske trivijalizacije vrijedi

$$\sigma_j(m) = \sigma_i(m) \triangleleft t_{ij}(m).$$

Kako je već ranije spomenuto vlakna su G-torzori te je sada od značaja napraviti odabir tako da bi se upotpunila struktura Liejeve grupe na vlaknima. Za svaku Liejevu grupu G i $g \in G$ definira se posebna G-akcija $ad_g : G \to G$, $ad_g(h) = ghg^{-1}$. Posebno, razmatrajući G kao glatku mnogostrukost, primjenom tangentnog funktora, preslikvanje $T(ad_g) : T_h G \to T_{ghg^{-1}} G$ generira preslikavanje na asociranoj Liejevoj algebri $\mathfrak{g} \cong T_e G$, $Ad_g(A) \equiv T(ad_g)(A) = gAg^{-1}$ za $A \in \mathfrak{g}$.

Dodatno, definira se i izomorfizam Liejevih algebri $\# : \mathfrak{g} \to T_p P$ za svaki $p \in P$ kao $A^{\#} f(p) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(p \triangleleft exp(tA))|_{t=0}$ [2]. Ovaj odabir omogućava definiciju diferencijalnih formi na cijelom svežnju P definicijom produkta diferencijalnih formi kao:

$$(\omega \otimes x) \wedge (\eta \otimes y) = (\omega \wedge \eta) \otimes [x, y], \text{ za } \omega, \eta \in \Omega^1(M), x, y \in \mathfrak{g}.$$

Na sličan način, kada je na baznom prostoru definirana metrika, kakav je slučaj kod kvantizacije teorije, definira se i Hodgeov dual ovakvih formi kao:

$$*(\omega \otimes x) = (*\omega) \otimes x, \text{ za } \omega \in \Omega^1(M), x \in \mathfrak{g}.$$

Definicija 1.6. *Neka je $\omega \in T^*P \otimes \mathfrak{g}$ 1-forma sa vrijednostima u $\mathfrak{g}$ takva da vrijede:*

$$\omega(A^{\#}) = A \quad (A \in \mathfrak{g})$$
$$(\triangleleft g)^* \omega = \mathrm{Ad}_{g^{-1}} \omega \quad (g \in G).$$

Tada se za ω kaže da je Ehresmannova koneksija.

Za Ehresmannovu koneksijsku 1-formu ω i otvoreni pokrivač $\{U_i\}_{i \in I}$ od M na kojem su definirani lokalni presjeci prema definiciji 1.4 definiraju se asocirane 1-forme na M sa vrijednostima u $\mathfrak{g}$, $A_i \equiv \sigma_i^* \omega \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{g} \equiv \Omega^1(U_i, \mathfrak{g})$. Ova korespodencija je obostrana.

Teorem 1.7. *Za 1-formu $A_i \in \Omega^1(U_i) \otimes \mathfrak{g}$ sa vrijednostima u $\mathfrak{g}$ postoji koneksijska 1-forma iz definicije 1.6 takva da je $A_i = \sigma_i^* \omega$. Konkretno, $\omega_i = g_i^{-1} \pi^* A_i g_i + g_i^{-1} \mathrm{d} g_i$ za kanonske trivijalizacije iz definicije 1.5.*

Ovakve asocirane 1-forme A_i predstavljaju baždarna polja u Yang-Millsovim teorijama. Korespodencija teorema 1.7 zajedno sa svojstvima iz definicije Ehresmannovih koneksija 1.6 implicira vezu između A_i i A_j definiranih na različitim kartama:

$$A_j = t_{ij}^{-1} A_i t_{ij} + t_{ij}^{-1} \mathrm{d} t_{ij} \tag{1.4}$$

gdje je d vanjska derivacija na svežnju P. Ova veza opisuje baždarne transformacije polja. Konkretan račun kao i dokaz teorema 1.7 se može pronaći u [3]. Postojanje koneksije omogućuje i definiciju kovarijantne derivacije formi i paralelnog transporta vektora duž krivulja preko po putovima uređenih eksponenata diferencijalnih formi. Konkretno,

$$\mathcal{D}\eta = \mathrm{d}\eta + [A, \eta], \text{ za } \eta \in \Omega(M) \otimes \mathfrak{g}.$$

Tenzor jačine polja je tada dan kao

$$F = \mathcal{D}A = \mathrm{d}A + A \wedge A.$$

Akcija u Yang-Mills teoriji je definirana sa

$$S_{YM}(A) = \frac{1}{2}\int_M \mathrm{tr}(F \wedge *F).$$

Konkretno, za slučaj klasične Yang-Millsove teorije na $\mathbb{R}^4$, $A = A_{a\mu}\mathrm{d}x^\mu \otimes T^a$, gdje su T^a generatori $\mathfrak{su}(2)$ algebre, $[T^a, T^b] = \epsilon^{abc}T^c$, imamo

$$\begin{aligned}
F &= \mathrm{d}A + A \wedge A = \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu, \quad \text{gdje} \\
F_{\mu\nu} &= F_{a\mu\nu} \otimes T^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] \\
F_{a\mu\nu} &= \partial_\mu A_{a\nu} - \partial_\nu A_{a\mu} + \epsilon_{abc}A_{b\mu}A_{c\nu}.
\end{aligned}$$

za tenzor jačine polja, te akciju i jednadžbe gibanja:

$$\begin{aligned}
S_{YM} &= -\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^4x\, \mathrm{tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}), \\
\mathcal{D} * F = 0 &\iff \mathcal{D}_\mu F^{\mu\nu} = 0
\end{aligned}$$

2 Kategorifikacija Yang-Millsove teorije

Termin kategorifikacija označava pridavanje kategoričke strukture promatranim objektima. Jasno je kako to pridavanje nije jedinstveno određeno te postoji mnoštvo odabira, pogotovo pri prelasku u više kategorije. U slučaju Yang-Millsove teorije, radi se zapravo o kategorifikaciji glavnih G-svežnjeva na kojima je definirana koneksija, te je pristup korišten u ovom radu (po uzoru na [4]) baziran na rezultatu iz diferencijalne geometrije u kojem je svežanj P sa koneksijom u korespodenciji sa specifikacijom holonomske strukture na cijeloj baznoj mnogostrukosti.

Primarna observacija je ta da u holonomiji, kako je sam paralelan transport vektora definiran na krajevima krivulja na baznoj mnogostrukosti, postoje različite krivulje koje daju iste grupne elemente, tj. radi se o određenoj relaciji ekvivalencija krivulja. Točnije, transport vektora ovisi o tangetnim vektorima asociranima uz tu krivulju, te će krivulje među istim točkama bazne mnogostrukosti davati iste grupne elemente pod uvjetom da se ti tangentni vektori dviju krivulja poklapaju. To je svojevrsna restrikcija homotopne strukture na topološkim prostorima te se iznosi u potpunoj analogiji.

Definicija 2.1. *Neka su $x, y \in M$. Put između x i y je glatko preslikavanje $\gamma : [0,1] \to M$ za koje postoji $\epsilon > 0$ takav da*

$$\begin{aligned}
x &= \gamma(t), \ \textit{za}\ t \in [0, \epsilon], \\
y &= \gamma(t), \ \textit{za}\ t \in [1-\epsilon, 1].
\end{aligned}$$

Nadalje je korištena i oznaka $\gamma : x \to y$ za puteve.

Definicija 2.2. *Neka su $\gamma_1 : x \to y$ and $\gamma_2 : y \to z$ putevi, definira se produkt puteva $\gamma_1\gamma_2 : x \to z$:*

$$\gamma_1\gamma_2(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & ,\textit{za}\ t \in [0, 1/2] \\ \gamma_2(2t-1) & ,\textit{za}\ t \in (1/2, 1]. \end{cases}$$

Zahtjev za parametrom ϵ u definiciji 2.1 je kako bi produkt puteva davao nove puteve, konkretno, kako bi derivacija bila dobro definirana na spojištu dva puta. Jasno je kako je i $\gamma^{-1}(t) \equiv \gamma(1-t)$ također put, te je za definiciju grupne strukture preostalo još definirati relaciju ekvivalencije (homotopiju puteva) kako bi se osigurala asocijativnost produkta.

Definicija 2.3. *Neka su $x, y \in M$ te $\gamma_1, \gamma_2 : x \to y$ putevi između x i y. Glatko preslikavanje $H : [0,1]^2 \to M$ je homotopija puteva ako postoji $\epsilon > 0$ takav da*

$$\begin{aligned} x &= H(s,t) \quad \text{za} \quad t \in [0,\epsilon], s \in [0,1] \\ y &= H(s,t) \quad \text{za} \quad t \in [1-\epsilon,1], s \in [0,1] \\ \gamma_1(t) &= H(s,t) \quad \text{za} \quad s \in [0,\epsilon], t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) &= H(s,t) \quad \text{za} \quad s \in [1-\epsilon,1], t \in [0,1] \end{aligned}$$

i

$$\mathrm{rang}[\mathrm{d}H(s,t)] \leq 1 \quad \textit{for } (s,t) \in [0,1]^2, \tag{2.1}$$

gdje rang označava rang operatora danog diferencijalom preslikavanja u točki. U slučaju da takvo preslikavanje postoji, kaže se kako su γ_1 i γ_2 homotopni te da su u relaciji homotopije $\gamma_1 \simeq \gamma_2$.

Uvjet 2.1 u definiciji 2.3 osigurava poravnanje tangentnih vektora . Relacija homotopije je relacija ekvivalencije te je produkt klasa kao $[\gamma_1][\gamma_2] = [\gamma_1\gamma_2]$ dobro definiran. Klase petlji nad istom točkom mnogostrukosti M imaju grupnu strukturu koje odgovaraju holonomijama dok putevi među različitim točkama generiraju grupne homomorfizme među holonomijama. Klase svih petlji zapravo imaju grupoidnu strukturu što motivira sljedeću definiciju.

Definicija 2.4. *Kategorija $\mathcal{P}_1(M)$ točaka u M i klasa ekvivalencija puteva među njima kao morfizmi među točkama naziva se grupoid puteva na M.*

Homološka struktura tada odgovara pridavanju grupnih elemenata u vlaknima svežnja P petljama u grupoidu puteva, tj. homomorfizam vlakana putevima između različitih točaka. Konkretno, paralelni transport je opisan glatkim funktorima $\mathcal{P}_1(M) \to GTor$, zvanim transportnim funktorima ili funktorima holonomije. Međutim, kako bi se homološka struktura povezala sa diferencijalnim formama, potrebna je veza homološke strukture sa samim glavnim G-svežnjevima. U tu svrhu promatraju se svojstva lokalne trivijalnosti i postojanje funkcija prijelaza.

Iako se lokalna trivijalnost može promatrati čisto sa stajališta otvorenih pokrivača bazne mnogostrukosti [5], tretman preko surjektivnih submerzija (kao u [4]) daje lakodosežnije rezultate. Ovdje valja primijetiti kako otvoreni pokrivači (sa svojim difeomorfizmima) su i sami surjektivne submerzije. Odabir surjektivnih submerzija je specifičan po tome što garantira postojanje povlaka među glatkim prostorima, što generalno nije slučaj u kategoriji glatkih mnogostrukosti, te će taj odabir olakšati pronalazak funkcija prijelaza gledajući povlake među prostorima.

Konkretno, neka je $\pi : Y \to M$ surjektivna submerzija, u slučaju gdje je ta surjektivna submerzija definirana lokalnom trivijalizacijom svežnja, Y poprima formu disjunktne unije trivijalnih svežnjeva nad otvorenim skupovima u pokrivaču.

Definicija 2.5. *Komutirajuće dijagrame oblika*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_1(Y) \arrow[r, "\pi_*"] \arrow[d, "triv"'] & \mathcal{P}_1(M) \arrow[d, "F"] \arrow[dl, Rightarrow, "t"] \\ \mathcal{B}G \arrow[r, "i"'] & GTor \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

gdje je triv funktor, t prirodna ekvivalencija te i ekvivalencija nazivamo lokalne trivijalizacije funktora F.

$\mathcal{B}G$ u definiciji 2.5 je Liejev groupoid koji predstavlja strukturnu grupu svežnja P, a dan je kao kategorija s jednim objektom u kojemu su morfizmi grupni elementi a kompozicija grupno mnooženje. Kako je i ekvivalencija kategorija, jasno je iz gornjeg dijagrama da funktor F u potpunosti određuje funktor $triv$. Stoga se definira sljedeća kategorija.

Definicija 2.6. *Kategorija $Triv_1(i, \pi)$ lokalnih trivijalizacija gdje su morfizmi prirodne transformacije funktora $\mathcal{P}_1(M) \to GTor$.*

Zbog prirodne ekvivalencija t, morfizam između transportnih funktora daje prirodnu ekvivalenciju $triv$ funktora.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P}_1(Y) \arrow[r, "\pi_*"] & \mathcal{P}_1(M) \arrow[r, bend left, "F"{name=U}] \arrow[r, bend right, "G"'{name=D}] \arrow[from=U, to=D, Rightarrow, "\alpha"] & GTor \\ & \mathcal{P}_1(Y) \arrow[r, bend left, "\pi^*F"{name=U2}] \arrow[r, bend right, "\pi^*G"'{name=D2}] \arrow[from=U2, to=D2, Rightarrow, "\pi^*\alpha"] & GTor \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Fx \arrow[r, "\alpha_x"] \arrow[d, "F(\gamma\circ\pi)"'] & Gx \arrow[d, "G(\gamma\circ\pi)"] \\ Fy \arrow[r, "\alpha_y"'] & Gy \end{tikzcd}$$

Preciznije rečeno, za svaki funktor postoji prirodna ekvivalencija, identiteta, te se jednostavnom kompozicijom π_* po komponentama dobije donja ekvivalencija $\pi^*\alpha$ na gornjem dijagramu gdje desni dijagram prikazuje zapis po komponentama funktora te su komponente prirodne transformacije izomorfizmi. Po dijagramu 2.2 prirodna ekvivalencija daje sljedeći dijagram po komponentama:

$$\begin{tikzcd} F\pi_x \arrow[r, "t_x"] \arrow[d, "F(\gamma\circ\pi)"'] & itriv(x) \arrow[d, "itriv\gamma"] \\ F\pi_y \arrow[r, "t_y"] & itriv(y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} i^{-1}F\pi_x \arrow[r, "i^{-1}t_x"] \arrow[d, "i^{-1}F\gamma\pi"'] & triv(x) \arrow[d, "triv\gamma"] \\ i^{-1}F\pi_y \arrow[r, "i^{-1}t_y"] & triv(y) \end{tikzcd}$$

Kako je i po pretpostavci ekvivalencija kategorija, invertibilan je te se analogno modifikaciji gornje prirodne transformacije, kompozicijom inverza dobije prirodna ekvivalencija između triv funktora kao $i^{-1}t\pi^*\alpha$ što daje sljedeće ekvivalencije kategorija:

$$Fun_\infty(\mathcal{P}_1(M), GTor) \cong Triv_1(i, \pi) \cong Fun_\infty(\mathcal{P}_1(Y), \mathcal{B}G).$$

gdje ∞ označava da se radi o glatkim funktorima i glatkim prirodnim transformacijama, tj. da su oni glatki po komponentama.

Nadalje, valja promotriti povlak surjektivne submerzije π. Razmatra se sljedeći dijagram:

$$\begin{tikzcd} Y_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{P}_1(Y_2) \arrow[dl, bend right, "\pi_{1*}"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_{2*}"] & \\ & \arrow[r, phantom, "\overset{g}{\Longrightarrow}"] & \\ & \mathcal{P}_1(Y) \arrow[d, "i \circ triv \cong \pi_* F"] & \\ & GTor & \end{tikzcd}$$

Zbog postojanja prirodne ekvivalencije t na lolanim trivijalizacijama 2.5, analogno produljenju prirodne ekvivalencije s funktorima kao i ranije, dolazi do sljedećih transformacija:

$$\pi_1^*(i \circ triv) \iff \pi_1^*(\pi_* F) = F(\pi \circ \pi_1) = \{\text{lijevi dijagram}\} = F(\pi \circ \pi_2) = \pi_2^*(\pi_* F) \iff \pi_2^*(i \circ triv).$$

Definira se prirodna ekvivalencija $g : \pi_1^*(i \circ triv) \to \pi_2^*(i \circ triv)$, $g \equiv \pi_2^* t \circ \pi_1^* t^{-1}$. Uvjet kociklusa koji odgovara uvjetu 1.3 proizlazi iz trostrukog povlaka,

$$\begin{tikzcd} Y_3 \arrow[r, "\pi_3"] \arrow[d, "\pi_{12}"'] & Y \arrow[d, "id_Y"] \arrow[dd, bend left=60, "\pi"] \\ Y_2 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[d, "\pi_2"'] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ Y \arrow[r, "\pi"'] & M \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \pi_2^*(i \circ triv) \arrow[dr, "\pi_{23}^* g"] & \\ \pi_1^*(i \circ triv) \arrow[ur, "\pi_{12}^* g"] \arrow[rr, "\pi_{13}^* g"'] & & \pi_3^*(i \circ triv) \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

proširenjem prirodne ekvivalencije koristeći projekcije na dvostruke povlake kao i ranije kompozicijom s identitetom među tim projekcijama. Prirodna ekvivalencija g je ovdje zapravo u korespodenciji s prirodnom ekvivalencijom t. Eksplicitno, postoji sljedeća prirodna ekvivalencija $h \equiv t' \circ \pi^* \alpha \circ t^{-1}$ između različitih $triv$ funktora danih pojedinim transportnim funktorima,

$$\begin{tikzcd} \pi_1^*(i \circ triv) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi_1^* h"'] & \pi_2^*(i \circ triv) \arrow[d, "\pi_2^* h"] \\ \pi_1^*(i \circ triv') \arrow[r, "g'"'] & \pi_2^*(i \circ triv') \end{tikzcd} \tag{2.4}$$

Prepoznavši u definiciji h prirodnu ekvivalenciju korištenu u razmatranju ekvivalencija triv funktora, automatski proizlazi još jedna ekvivalencija kategorija.

Definicija 2.7. *Kategorija $Des_1(i, \pi)$ trokuta 2.3 i prirodnih ekvivalencija oblika h među njima.*

Prirodne ekvivalencije g odgovaraju funkcijama prijelaza t_{ij} iz definicije 1.3 te generiraju baždarne transformacije po jednadžbi 1.4. Vrijedi

$$Des_1(i, \pi) \cong Triv_1(i, \pi).$$

Iz dosadašnjih razmatranja je očito kako specifikacijom transport funktora nad mnogostrukosti proizlazi struktura glavnih G-svežnjeva, te je preostalo povezati takve funktore sa diferencijalnim formama i dati im eksplicitan oblik.

Lema 2.8. *Postoji bijekcija između $\Omega_1(\mathbb{R}, \mathfrak{g})$ i skupa glatkih funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to G$ za koje vrijedi*

$$f(y,z) \cdot f(x,y) = f(x,z), \text{ za sve } x, y, z \in \mathbb{R} \tag{2.5}$$

dano po putevima uređenim eksponentima,

$$f(x,y) = \mathcal{P}\exp\left(\int_{[x,y]} A\right).$$

Dokaz. Ovakvi eksponenti su jedinstvena rješenja diferencijalne jednadžbe s početnim uvjetom (vidi [6]):

$$\partial_y f(x,y) = -A(y) f(x,y), \text{ gdje je } f(x,x) = e \in G$$

Uvjet kociklusa 2.5 proizlazi u ovom slučaju iz svojstva jedinstvenosti rješenja jer je

$$\mathcal{P}\exp\left(\int_{[y,z]} A\right)\mathcal{P}\exp\left(\int_{[x,y]} A\right) = \mathcal{P}\exp\left(\int_{[x,y]} A + \int_{[y,z]} A\right) = \mathcal{P}\exp\left(\int_{[x,z]} A\right)$$

zbog kompatibilnosti domena. Bijektivnost proizlazi iz činjenice da parametri definiraju granice integrala, a ti integrali su glatke funkcije granica. □

Analitičkim produljenjem puteva na mnogostrukostima, zbog uvjeta u definiciji 2.1 ta produljenja su glatka te se povlakom puteva dobiva bijekcija između morfizama u grupoidu puteva i diferencijalnih formi asociraih uz te puteve. Konkretno,

Definicija 2.9. *Neka je $\gamma : x \to y$ put u M. Definira se analitičko produljenje $\bar{\gamma} : \mathbb{R} \to M$ kao:*

$$\bar{\gamma}(x) = \begin{cases} \gamma(x), \text{ za } x \in [0,1], \\ \gamma(0), \text{ za } x < 0, \\ \gamma(1), \text{ za } x > 1 \end{cases}$$

Nadalje se oznaka γ poistovijećuje s $\bar{\gamma}$.

Povlakom se tada dobije bijekcija između puteva na mnogostukosti M i diferencijalnih 1-formi kao

$$\gamma^* f(x,y) = \mathcal{P}\exp\left(\int_\gamma A_\mu(\gamma)\partial_t\gamma^\mu \mathrm{d}t\right)$$

Ovaj rezultat se jednostavno generalizira na više forme.

Teorem 2.10. *Postoji ekvivalencija kategorija:*

$$Fun_\infty(\mathcal{P}_1(M), \mathcal{B}G) \cong \Omega^1(M, \mathfrak{g}).$$

gdje su objekti u $\Omega_1(M, \mathfrak{g})$ diferencijalne 1-forme, a morfizmi među njima prirodne ekvivalencije t za koje vrijedi baždarna transformacija 1.4 među dvijema formama. Dokaz se može naći u [4].

3 Prelazak na više kategorije

Postoji više međusobno nejednakih definicija viših kategorija i metoda njihovih generiranja. Generalno, razlikuju se stroge i slabe kategorije. U strogima se pri uvođenju viših morfizama zadržava svojstvo da su različite kompozicije nižih morfizama između istih objekata egzaktno ekvivalentne, dok u slabima to ne vrijedi već se zahtijeva postojanje viših izomorfizama. Konkretan primjer su slabe 2-kategorije, bikategorije u kojima se ne pretpostavlja asocijativnost kompozicije već se dva načina kompozicije povezuju prirodnim ekvivalencijama.

Kako su sve kategorije korištene u radu ili grupoidi ili kategorije morfizama između grupoida, nastavljanjem analogije s teorijom homotopija u nastavku se koristi stroga verzija viših kategorija kakvu je originalno iznio Grothendieck pri uspostavi teorija viših homotopija. gdje su n-morfizmi reprezentirani glatkim funkcijama $[0,1]^n \to Gr$ koje predstavljaju izomorfizme u grupoidnim kategorijama.

3.1 2-teorija

Definiranje više baždarne teorije odgovara zadavanju diferencijalnih p-formi koje poštuju baždarne transformacije dane akcijom strukturne grupe, a ta asignacija je u korespodenciji sa definicijom glatkog funktora paralelnog transporta,

$$hol_i : \mathcal{P}_p(M) \to \mathcal{B}G$$

na svakoj trivijalizaciji generaliziranog svežnja, gdje su gornje kategorije p-kategorije. U kategorifikaciji je taj funktor dan po putovima uređenim ekponentima koji generiraju paralelni transport vektora na svežnju. Točnije rečeno, putovi u tim eksponentima su bili morfizmi grupoida puteva, parametrizirane krivulje, te se i u slučaju 2-kategorija radi o istoj formi funktora no on sada sadrži i eksponente po parametriziranim površinama koji odgovaraju 2-formama gdje korespodencija između tih morfizama daje ograničenje na strukturu tih formi. Strogi dokaz ove tvrdnje može se pronaći u [7].

Promatra se slučaj trivijalnog svežnja u kojemu je trivijalizacija u potpunosti jednaka transportnim funktorima. Prije same konstrukcije uvodi se posebna reprezentacija Liejevih 2-grupa, tzv. ukršteni Liejevi moduli.

Definicija 3.1. *Neka su G i H Liejeve grupe, tada za glatke homomorfizme Liejevih grupa*

$$H \xrightarrow{t} G \xrightarrow{\alpha} Aut(H)$$

takve da vrijedi

$$t(\alpha(g)(h)) = gt(h)g^{-1}, \tag{3.1}$$

$$\alpha(t(h))(h') = hh'h^{-1}, \tag{3.2}$$

za $g \in G, h, h' \in H$ kažemo da su Liejeva 2-grupa.

U slučaju 1-kategorije, s jednostavnom Liejevom grupom G, putu γ u M se pridjeljuje morfizam u $\mathcal{B}G$, međutim, morfizmi u toj kategoriji odgovaraju grupnim elementima, sve točke se trivijalno transformiraju jer je $\mathcal{B}G$ kategorija s jednim objektom. Nadalje, produkt puteva odgovara kompoziciji a posljedično tomu, nakon transformacije funktorom, i grupnom množenju u G. Ovo će nastaviti vrijediti i u 2-kategorijama, međutim sada se javlja zahtjev da među svim putevima (grupnim elementima) postoji 2-morfizam (prirodna transformacija), konkretnije, zbog strukture grupoida radi se o prirodnoj ekvivalenciji, u grupoidu $\mathcal{P}_2(M)$ to je realizirano 2-homotopijama (točnije rečeno sami 2-morfizmi su parametrizirane površine $[0,1] \to M$, a njihova klasa ekvivalencije je dana 2-homotopijama), ali konkretne posljedice se nalaze u $\mathcal{B}G$ 2-kategoriji, uzima se da ove prirodne transformacije predstavljaju elemente grupe H.

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, bend left, "hol(\gamma_1)=g_1"{name=U}] \arrow[r, bend right, "hol(\gamma_2)=g_2"'{name=D}] & \cdot \arrow[Rightarrow, from=U, to=D, "h"] \end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Po korespodenciji sa diferencijalnim formama, vidljivo je kako će postojati 1-forme s vrijednostima u $\mathfrak{g} \cong T_eG$ i 2-forme s vrijednostima u $\mathfrak{h} \cong T_eH$.

Sljedeća restrikcija u ovakvim 2-kategorijama proizlazi iz poravnanja grupnog množenja u 2-grupama u slučaju kada se ne bi radilo o grupoidu s jednim objektom, a $\mathcal{P}_2(M)$ to nije, je to da domena morfizma kompozicije odgovara domeni prvog grupnog elementa,a kodomena s kodomenom drugog grupnog elementa što daje prvo od dva preslikavanja iz definicije 3.1, $t(h) = g_2g_1^{-1}$. Glatkoća proizlazi iz glatkoće puteva i hol funktora.

Preostaje definirati kompozicije 2-morfizama (i preslikavanje α). U slučaju vertikalne kompozicije izima se obično grupno množenje u H. Tada, za $h : g_1 \implies g_2$ i $h' : g_2 \implies g_3$ vrijedi

$$t(h')t(h) = (g_3g_2^{-1})(g_2g_1^{-1}) = g_3g_1^{-1} = t(h'h).$$

Za $h : g_1 \implies g_2$ i $h' : g_1' \implies g_2'$ horizontalna kompozicija je dana sa

$$h \cdot h' \equiv h\alpha(g_1)(h').$$

Baždarne transformacije su tada generirane funkcijama prijelaza danima u dijagramu 2.4 gdje sada u 2-kategorijama dolazi do zahtjeva za postojanjem 2-morfizma nad tim komutirajućim kvadratom, Konkretno,

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "g_\gamma"] \arrow[d, "\eta_x"'] & y \arrow[d, "\eta_y"] \arrow[dl, Rightarrow, "\eta_\gamma"] \\ x \arrow[r, "g'_\gamma"'] & y \end{tikzcd} . \tag{3.4}$$

Promatrajući 2-morfizam $h : hol(\gamma) \implies hol(\gamma')$, u trivijalizaciji određenoj s g' dobije se

$$h' = \alpha(\eta_x^{-1})(\eta_{\gamma'}h\eta_\gamma^{-1}). \tag{3.5}$$

Za konkretne račune radi se prijelaz na odgovarajuće algebre (ukrštene diferencijalne Liejeve module) derivacijama po putevima uređenih integrala kao i diferencijala t i α preslikavanja 2-grupa po uzoru na [8]. Neka su $\mu \in \Omega^p(M, \mathfrak{g}), \nu \in \Omega^p(M, \mathfrak{h})$ diferencijalne forme, te $A \in \Omega^1(M, \mathfrak{g})$ i $B \in \Omega^2(M, \mathfrak{h})$. Definira se

$$\begin{aligned}
[A, \mu] &\equiv A_a \wedge \mu_b \otimes [T^a, T^b], \\
\mathcal{D}\mu &\equiv \mathrm{d}\mu + [A, \mu], \\
A \triangleright \nu &\equiv A_a \wedge \nu_b \otimes (\mathrm{d}\alpha(T^a)(S^b)], \\
\mathcal{D}\nu &\equiv \mathrm{d}\nu + A \triangleright \nu,
\end{aligned}$$

gdje su T^a generatori $\mathfrak{g}$, a S^b generatori $\mathfrak{h}$. Promatranjem smještenja infinitezimalne kocke $[0, a]^3, a \to 0$ u mnogostrukost M, točnije po putovima uređenih eksponenata uvode se sljedeće generirajuće funkcije:

$$\begin{aligned}
&g_\mu(0) = \mathcal{P}\exp\left(\int_{\gamma=[0,a]\hat{e}_\mu} A\right) = \mathcal{P}\exp\left(\int_0^a A_\mu(x)dx^\mu\right) \cong \exp(aA_\mu) \\
&g_\mu(\alpha) = \mathcal{P}\exp\left(\int_{[0,a]\hat{e}_\mu + a\hat{e}_\alpha} A\right) = \mathcal{P}\exp\left(\int_0^a A_\mu(x + a\hat{e}_\alpha)\mathrm{d}x^\mu\right) \cong \exp(aA_\mu + a^2\partial_\alpha A_\mu + \mathcal{O}(a^3)) \\
&h_{\mu\nu}(0) = \mathcal{P}\exp\left(\int_{\sigma=[0,a]^2\hat{e}_\mu\wedge\hat{e}_\nu} B\right) \cong \exp(a^2 B_{\mu\nu}) \\
&h_{\mu\nu}(\alpha) \cong \exp(a^2 B_{\mu\nu} + a^3\partial_\alpha B_{\mu\nu} + \mathcal{O}(a^4)),
\end{aligned}$$

gdje se duž integrala uzima da su forme približno konstantne. Te funkcije generiraju dijagram 3.3, točnije njegovu reprezentaciju u algebri. Primjenom Baker-Hausdorffove formule na definicijske relacije za t i α, dobivaju se serije:

$$\begin{aligned}
\alpha(g_\beta(0))h_{\mu\nu}(\beta) &= \exp(a^2 B_{\mu\nu} + a^3\partial_\beta B_{\mu\nu} + a^3\mathrm{d}\alpha(A_\beta)(B_{\mu\nu}) + \mathcal{O}(a^4)), \\
t(h_{\mu\nu}) &= \exp(-a^2 B_{\mu\nu}) = \exp(a^2\mathrm{d}t(B_{\mu\nu})).
\end{aligned}$$

koje po korespodenciji derivacijom daju pripadne vrijednosti na razini algebre. Konkretno, za zakrivljenost baždarnih polja:

$$\begin{aligned}
\exp(a^2 F_{\mu\nu}) &\cong g_\mu^{-1}(\nu)g_\nu(0)^{-1}t(h_{\mu\nu}(0))g_\mu(0)g_\nu(0), \\
&= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + [A_\mu, A_\nu] + dt(B_{\mu\nu}) \\
F &= \frac{1}{2}F_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \\
&= \mathrm{d}A + \frac{1}{2}[A, A] + \mathrm{d}t(B), \\
\exp(a^3 G_{\alpha\mu\nu}) &\cong \alpha(g_\alpha(0))(h_{\mu\nu}(\alpha))h_{\mu\alpha}(0)\alpha(g_\mu(0))(h_{\nu\alpha}(\mu))h_{\nu\mu}(0)\alpha(g_\nu(0))(h_{\alpha\mu}(\nu))h_{\alpha\nu}(0), \\
G_{\alpha\mu\nu} &= \partial_\alpha B_{\mu\nu} + \mathrm{d}\alpha(A_\alpha)(B_{\mu\nu}) + \partial_\nu B_{\alpha\mu} + \mathrm{d}\alpha(A_\nu)(B_{\alpha\mu}) + \partial_\mu B_{\nu\alpha} + \mathrm{d}\alpha(A_\mu)(B_{\nu\alpha}) \\
G &= \frac{1}{6}G_{\alpha\mu\nu}\mathrm{d}x^\alpha \wedge \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu, \\
&= \mathrm{d}B + A \triangleright B \\
&= \mathcal{D}B.
\end{aligned}$$

što odgovara rezultatima iz [9][10]. Analognom procedurom, promatrajući infinitezimalne varijacije baždarnih polja, $A \to A + b\lambda, B \to B + b\Lambda$, definiraju se generatori za dijagram 3.4:

$$\begin{aligned}
\eta_\alpha(0) &= \mathcal{P}\exp\left(\int_0^b \lambda \mathrm{d}x^\alpha\right) \cong \exp(b\lambda),\\
\eta_\alpha(\mu) &\cong \exp(b\lambda + ab\partial_\mu\lambda),\\
\eta_{\alpha\mu}(0) &= \mathcal{P}\exp\left(\int_\sigma \Lambda_\mu \mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\alpha\right) \cong \exp(ab\Lambda_\mu),\\
\eta_{\mu\alpha}(\nu) &\cong \exp(ab\Lambda_\mu + a^2 b\partial_\nu\Lambda_\mu).
\end{aligned}$$

gdje je $\lambda \in \Omega^0(M, \mathfrak{g})$ te $\Lambda \in \Omega^1(M, \mathfrak{h})$. Dobivaju se sljedeći izrazi za varijacije polja,

$$\begin{aligned}
\delta A &= \mathcal{D}\lambda + \mathrm{d}t(\Lambda),\\
\delta B &= -\mathcal{D}\Lambda - \lambda \triangleright B,\\
\delta F &= [F, \lambda],\\
\delta G &= -\lambda \triangleright G,
\end{aligned}$$

dani iz

$$\begin{aligned}
\exp(aA_\mu + ab\delta A_\mu) &= g'_\mu(\alpha)\\
&= \eta_\alpha^{-1}(0)t(\eta_{\mu\alpha}(0))g_\mu(0)\eta_\alpha(\mu),\\
\exp(a^2 B_{\mu\nu} + a^2 b\delta B_{\mu\nu}) &= h'_{\mu\nu}(\alpha)\\
&= \alpha(\eta_\alpha^{-1}(o))[\eta_{\nu\alpha}(0)\alpha(g_\nu(0))(\eta_{\mu\alpha}(\nu))h_{\mu\nu}(0)\alpha(g_\mu(0))(\eta_{\nu\alpha}^{-1}(\mu))\eta_{\mu\alpha}^{-1}(0)],
\end{aligned}$$

koji generiraju baždarne transformacije. Akcija generalizirane Yang-Millsove 2-teorije je sada dana uporabom Killingovih formi sljedećim izrazom:

$$S_{YM}(A, B) = \int_M \mathrm{tr}(F \wedge *F) + \mathrm{tr}(G \wedge *G).$$

4 Zaključak

U ovom radu je promatrana kategorifikacija glavnih G-svežnjeva s ciljem definiranja koneksije višeg reda koja se baždarno transformira po neabelovoj grupi. Izvršena je kategorifikacija po uzoru na [4] gdje grupoidna struktura funktora, zbog svojstva izomorfnosti svih morfizama na grupoidima, generira brojne ekvivalencije kategorija te omogućuju jednostavno povezivanje različitih svojstava svežnjeva zahtjevom glatkoće funktora i prirodnih transformacija koji onda garantiraju glatkoću po komponentama a time i svojstvo da kompozicija po komponentama stvara nove glatke objekte. Upravo je to svojstvo ekploatirano kako bi se pomoću krivulja u višim homotopijama generirala reprezentacija koneksijskih formi na razini algebri pomoću po putevima uređenih eksponenata. Matematički gledano, eksplicitnim računom po uzoru na [8] su se po analogiji sa glavnim G-svežnjevima definirale koneksijske forme na Liejevim 2-grupama, njihove zakrivljenosti i baždarne transformacije.

Time se po korespodenciji definirala akcija generalizirane Yang-Millsove teorije. Ovakva procedura omogućuje definiciju viših baždarnih teorija polja koje se za abelove grupe reducira na već poznate slučajeve, konkretno, u slučaju 2-kategorija na Kalb-Ramondova polja [11]. Međutim konkretna realizacija viših neabelovih teorija u prirodi još nije pronađena.

Zahvala

Posebna zahvala L. Jonke za savjete i reference korištene pri stvaranju ovog rada.

Literatura

[1] R. L. Yang, C. N. Mills. Conservation of isotopic spin and isotopic gauge invariance. *Phys. Rev.*, 96:191–195, Oct 1954.

[2] nLab authors. Maurer-Cartan form. https://ncatlab.org/nlab/show/Maurer-Cartan+form, January 2024. Revision 16.

[3] M. Nakahara. *Geometry, topology and physics*. 2003. Bristol, UK: Hilger (1990) 505 p. (Graduate student series in physics).

[4] Urs Schreiber and Konrad Waldorf. Parallel transport and functors. https://doi.org/10.48550/arXiv.0705.0452, 2014.

[5] Lawrence Breen i William Messing. Differential geometry of gerbes. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0106083, 2003.

[6] P.-L. Giscard, K. Lui, S. J. Thwaite, and D. Jaksch. An exact formulation of the time-ordered exponential using path-sums. *Journal of Mathematical Physics*, 56(5), May 2015.

[7] John Baez i Urs Schreiber. Higher gauge theory: 2-connections on 2-bundles. https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0412325, 2004.

[8] Florian Girelli and Hendryk Pfeiffer. Higher gauge theory—differential versus integral formulation. *Journal of Mathematical Physics*, 45(10):3949–3971, October 2004.

[9] John C. Baez. Higher yang-mills theory. https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-th/0206130, 2002.

[10] John C. Baez and Urs Schreiber. Higher gauge theory. https://doi.org/10.48550/arXiv.math/0511710, 2006.

[11] M. Kalb and P. Ramond. Classical direct interstring action. *Phys. Rev. D*, 9:2273–2284, Apr 1974.