Kvantne korekcije entropije crne rupe

Axel Hrelja*
Fizički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet,
Sveučilište u Zagrebu, Bijenička c. 32, 10000 Zagreb, Hrvatska

Mentor: dr. sc. Tajron Jurić†
Zavod za teorijsku fiziku, Institut Ruđer Bošković, Bijenička c. 54, 10002 Zagreb, Hrvatska

U ovom radu koristimo *brick wall* semi-klasični pristup razmatranja mikroskopskog podrijetla entropije crnih rupa. Koristimo WKB aproksimaciju do 4. reda, te izvrijednjavamo korekcije za entropiju u tim redovima. Dobivamo da su kvantne korekcije za 4-dimenzionalnu crnu rupu oblika $\ln(\mathcal{A})$, gdje je $\mathcal{A}$ površina crne rupe. Izračunavamo entropiju za Schwarzschildovu i BTZ crnu rupu do 4. reda. Uspoređujemo dobivene rezultate sa korekcijama dobivenih pomoću prepletenosti stupnjeva slobode s obje strane horizonta.

I. UVOD

Crne rupe su dijelovi prostorvremena iz kojeg objekti, uključujući i samu svjetlost, ne mogu izaći, neovisno o brzini kojom se gibaju. One se manifestiraju kao rješenja Einsteinove jednadžbe

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R\, g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}. \tag{1}$$

Egzaktno statičko sferno simetrično vakumsko rješenje Einsteinove jednadžbe jest Schwarzschildova crna rupa [1]. Ona opisuje gravitacijsko polje izvan sferične mase, uz prepostavku da se radi o nenabijenoj, nerotirajućoj masi, te da je kozmološka konstanta $\Lambda = 0$. Metrika Schwarzschildove crne rupe je dana s

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2MG}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2MG}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \tag{2}$$

Ovo rješenje predstavlja crnu rupu mase M s horizontom događaja $r_{\mathrm{H}} = 2MG$. Radijus na kojem se nalazi horizont događaja za Scharzschildovu crnu rupu se zove Schwarzschildov radius.

Pokazano je da se stacionarne crne rupe mogu opisati pomoću samo tri veličine: mase M, naboja Q i angularnog momenta J, što je posljedica tzv. *no-hair* teorema [2].

Kao motivaciju za uvođenje termodinamičkih zakona za crne rupe, zamislimo da neka materije upadne u crnu rupu. Prije prelaska horizonta, materija je imala neku entropiju S. Nakon prijelaska horizonta, vanjski promatrač ne može izmjeriti što se dogodilo toj entropiji, no znamo da je prije ulaska materije u crnu rupu ukupna entropija bila S, a nakon upada materije u crnu rupu, i nakon dovoljno dugo vremena, vidimo samo stacionarno stanje crne rupe opisano s masom, nabojem i angularnim momentom. Kad bi postojalo samo jedno stanje crne rupe opisane s te tri veličine, entropija svake takve crne rupe bila bi jednaka nula. To znači da se prilikom upada materije u crnu rupu ukupna entropija smanjila, što je u kontradikciji s drugim zakonom termodinamike. Ovaj problem se riješio tako da se pretpostavilo da i crne rupe imaju entropiju [3].

Pomoću ovih činjenica i opažanja, možemo napraviti korespondenciju tih veličina s termodinamičkim veličinama te tako dolazimo do zakona termodinamike za crne rupe [4-5].

Nulti zakon kaže da stacionarne crne rupe imaju konstantnu površinsku gravitaciju κ na horizontu događaja.

Prvi zakon glasi

$$dM = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ, \tag{3}$$

gdje je Ω kutna brzina horizonta, a A površina horizonta.

Drugi zakon kaže da se površina horizonta nikad ne smanjuje

$$\frac{dA}{dt} \geq 0. \tag{4}$$

Usporedimo li prvi zakon s onim iz termodinamike, $dE = TdS - pdV$, i povezujući član ΩdJ s radom, imamo korespondenciju: TdS sa $\kappa dA/8\pi G$.

Pokazano je da je temperatura crne rupe koja zrači poput crnog tijela [6]

$$T_{\mathrm{H}} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}. \tag{5}$$

Pomoću gornja dva rezultata, dolazimo do formule za entropiju

$$S_{\mathrm{BH}} = \frac{A}{4\ell_{\mathrm{Pl}}^2}, \tag{6}$$

gdje je $\ell_{\mathrm{Pl}} = \sqrt{G\hbar}$ Planckova duljina. Ovaj izraz se naziva Bekenstein-Hawkingova entropija.

U slučaju Schwarzschildove crne rupe, koja je sferično simetrična, površina horizonta je $A = 4\pi r_{\mathrm{H}}^2$, pa onda entropija glasi

$$S = \frac{4\pi}{\hbar} GM^2. \tag{7}$$

* ahrelja.phy@pmf.hr
† tjuric@irb.hr

Važnost entropije crnih rupa leži u tome da bi nam ona mogla dati uvid u mikroskopsku strukturu gravitacije, pomoću mikrokanonske Boltmannove relacije,

$$S = k_B \ln \Omega, \tag{8}$$

gdje je Ω ukupan broj kvantnih stanja koja su dostupna crnoj rupi.

Kako bismo općenito mogli izračunati entropiju crne rupe, potrebno je regularizirati UV divergenciju na horizontu, te izdvojiti fizikalni dio [7, 8]. Jednu od najjednostavnijih metoda prezentirao je t'Hooft [9], tzv. *brick wall* metoda. Osim *brick wall* metode, entropija crne rupe se može opisati koristeći pretpletnost stupnjeva slobode između dvije strane horizonta [10], te koristeći Waldovu formulu za entropiju, gledajući kvantnu gravitaciju kao efektivnu teoriju polja [11, 12]. Pokazano je [7, 13] da su sve tri metode povezane, budući da sve imaju identičnu strukturu UV divergencije entropije.

U ovom radu računati ćemo entropiju crne rupe razmatranjem kvantnih polja koja propagiraju unutar fiksne pozadine crne rupe, brojanjem njihovih mogućih mikrostanja *brick wall* metodom [9].

II. BRICK WALL METODA ZA SCHWARZSCHILDOVU CRNU RUPU

Promatranjem broja energijskih nivoa koje čestica može zauzeti u okolini crne rupe, primjećujemo da taj broj divergira blizu horizonta. Iz ove beskonačnosti proizlazi ideja da je crna rupa beskonačan ponor informacija. Ova beskonačnost je nefizikalna, i javlja se jer smo problem tretirali klasično. Uvodimo niz pojednostavljenja kako bismo mogli napasti ovaj problem [9]. Pretpstavljamo da se radi o bezmasenim skalarnim česticama, tj. da zadovoljavaju Klein-Gordonovu jednadžbu. Uvodimo tzv. *brick wall* oko horizonta crne rupe, na način da nakon njega više nemamo informacija o našoj čestici, tj. da iščezava valna funkcija, $\Phi(r) = 0$ za $r \leq r_{\mathrm{H}} + h$, gdje je $r_{\mathrm{H}} = 2GM$ horizont događaja za Schwarzschildovu crnu rupu. Uz to, stavljamo česticu u kuglu radijusa L, kako bismo osigurali da valna funkcija iščezava daleko od crne rupe (tzv. infracrveni *cutoff*), tj. $\Phi(x) = 0$ za $x \geq L$.

Dakle, rješavamo jednadžbu

$$\Box \Phi = 0, \tag{9}$$

gdje je $\Box = \frac{1}{\sqrt{-g}} \partial_\mu \left(g^{\mu\nu} \sqrt{-g} \partial_\nu \right)$ D'Alambertov operator.

Separiramo (9) korištenjem ansatza

$$\Phi = e^{-iEt/\hbar} R_{\ell m}(r) Y_{\ell m}(\Omega), \tag{10}$$

gdje su ℓ i m redom orbitalni moment i projekcija orbitalnog moment.

Radijalni dio Klein-Gordonove jednadžbe za Schwarzschildovu crnu rupu jest

$$f(r) R''_{lm} + \frac{2}{r} f(r) R'_{lm} - \left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} - \frac{E^2}{f(r)} \right] R_{lm} = 0, \tag{11}$$

gdje je

$$f(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \tag{12}$$

Sada koristimo WKB aproksimaciju

$$R_{lm} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int^r dr' k(r') \right], \tag{13}$$

te iz realnog dijela radijalne Klein-Gordonove jednadžbe dobivamo

$$k^2 = \frac{1}{f(r)} \left[\frac{E^2}{f(r)} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{r^2} \right]. \tag{14}$$

Zahtjevajući da k^2 bude ne-negativan broj, iz Bohr-Sommerfeldovog pravila za kvantizaciju, nalazimo broj radijalnih modova n_r kao

$$\pi n_r = \int_{r_{\mathrm{H}}+h}^{L} k(r, \ell, E, m) dr, \tag{15}$$

gdje je maksimalan orbitalni broj onda dan sa

$$\ell_{max}(\ell_{max}+1) = \frac{E^2 r^2}{\hbar^2 f(r)}. \tag{16}$$

Broj rješenja (modova) Klein-Gordonove jednadžbe s energijom manjom od E onda glasi

$$N(E) = \sum_{l=0}^{\ell_{max}} \sum_{m=-l}^{l} n_r, \tag{17}$$

gdje možemo iz sume po angularnim momentima prijeći na integral, budući da je razmak između pojedinih angularnih momenata puno manji od ℓ_{max}, tj. jer vrijedi $\ell_{max} \gg 1$. Kako n_r ne ovisi o m, ta suma nam dalje $(2\ell+1)$, stoga imamo

$$N(E) = \frac{1}{\pi} \int_{2GM+h}^{L} dr \int_0^{\ell_{max}} d\ell (2\ell+1) k(r, \ell, E). \tag{18}$$

Uvođenjem supstitucija $u = \hbar^2 \ell(\ell+1)$ i $x = r - 2GM$, integral se svodi na

$$N(E) = \frac{1}{\pi} \int_h^{L-2GM} dx \frac{x+2GM}{x} \cdot \int_0^{\ell_{max}(\ell_{max}+1)} du \sqrt{E^2 - \frac{xu}{(x+2GM)^3}}. \tag{19}$$

Radijalni dio integrala možemo rastaviti na dva dijela, na način: $\int_h^{L-2GM} dx = \int_h^R dx + \int_R^{L-2GM} dx$, putem pomoćnog radijusa R. U prvom integralu će dominirati članovi koji za $h \to 0$ divergiraju, a u drugom, oni koji divergiraju za $L \gg 2GM$. U prvom slučaju, nalazimo se blizu horizonta ($x \approx h \ll 2GM$), pa maksimalni orbitalni broj postaje

$$\ell_{max}(\ell_{max}+1) = \frac{E^2 (2GM)^3}{x}, \tag{20}$$

a u drugom slučaju se nalazimo daleko od horizonta ($x \gg 2GM$), pa maksimalni orbitalni broj postaje

$$\ell_{max}(\ell_{max}+1) = E^2L^2. \tag{21}$$

Razdvajanjem gornjeg integrala na dva dijela, i gledanjem za svaki dio odgovarajući ℓ_{max}, dolazimo do broja rješenja Klein-Gordonove jednadžbe s energijom manje od E [14]

$$N(E) = \frac{32G^4M^4E^3}{3\pi h} + \frac{E^3L^3}{\pi}. \tag{22}$$

Iz broja modova, sada lako možemo izvrijedniti termodinamička svojstva crne rupe, konkretno, za entropiju, pretpostavljajući da svaki mod može biti okupiran proizvoljno mnogo puta. Statističkom mehanikom možemo povezati slobodnu energiju i broj modova na nekoj temperaturi T ($T = 1/\beta$)

$$\begin{aligned} e^{-\beta F} &= \mathcal{Z} = \sum_i e^{-\beta E_i} \qquad (23)\\ &= \prod_{n,l,m}\sum_N \left(e^{-\beta E}\right)^N = \prod_{n,l,m}\frac{1}{1-e^{-\beta E}}, \end{aligned}$$

gdje je $\mathcal{Z}$ particijska funkcija, a sumu vršimo po svim dostupnim stanjima indeksiranih s i, pazeći pritom da neka stanja mogu imati istu energiju. Kako su energetski spektri danih čestica određeni s n, l i m, i pretpostavljajući da su čestice nezavisne možemo prijeći sa sume na umnožak po tim kvantnim brojevima, sumirajući pritom po svim svim česticama u tom modu. Onda za slobodnu energiju dobivamo

$$\begin{aligned} F &= \frac{1}{\beta}\sum_N \ln(1-e^{-\beta E}) = \frac{1}{\beta}\int dN \ln(1-e^{-\beta E}) \qquad (24)\\ &= -\int dE \frac{N(E)}{e^{\beta E}-1}, \end{aligned}$$

gdje smo prešli sa sume na integral budući da pretpostavljamo da imamo proizvoljno mnogo čestica u okolini crne rupe, te smo na kraju parcijalno integrirali.

Iz termodinamike znamo vezu entropije i slobodne energije

$$S = \beta^2\frac{\partial F}{\partial \beta}. \tag{25}$$

U slučaju Schwarzschildove crne rupe, imamo

$$F = -\frac{2\pi^3}{45h}\left(\frac{2GM}{\beta}\right)^4 - \frac{L^3\pi^3}{15\beta^4}. \tag{26}$$

Budući da je drugi član došao iz integrala razmatranjem limesa $x \gg 2GM$, njega interpretiramo kao doprinos vakuma koji okružuje sistem na velikim udaljenosti, koji ne utječe na termodinamička svojstva crne rupe, te ga zanemarujemo. Konačno, entropija je dana s

$$S = \frac{8\pi^3}{45h}\frac{(2GM)^4}{\beta^3}. \tag{27}$$

Usporedbom s Bekenstein-Hawkingovom entropijom i izjednečavanjem $T = 1/\beta$ s Hawkingovom temperaturom (5), te korištenjem izraza za površinsku gravitaciju za Schwarzschildovu crnu rupu $\kappa = 1/4GM$, dobijemo vrijednost za „debljinu" našeg zida, h

$$h = \frac{\hbar}{720\pi M}. \tag{28}$$

Iako gornja jednadžba sugerira da debljina našeg zida ovisi o veličini crne rupe ($M = r_{\mathrm{H}}/2G$), gledanjem invarijantne udaljenosti od horizonta do ruba zida, h_c

$$\begin{aligned} h_c &\equiv \int_{r=r_{\mathrm{H}}}^{r=r_{\mathrm{H}}+h} ds = \int_{2GM}^{2GM+h}\frac{dr}{\sqrt{1-2GM/r}} \qquad (29)\\ &= \sqrt{8MGh} = \sqrt{\frac{G\hbar}{90\pi}}, \end{aligned}$$

vidimo da ona ne ovisi o veličini crne rupe. Time interpretiramo da je h_c svojstvo samog horizonta crne rupe. Iz ovoga možemo zaključiti, budući da je entropija crne rupe potpuno opisana doprinosom blizu horizonta, tj. h, da je horizont taj koji daje kvantna svojstva crnoj rupi.

III. PROŠIRENJE BW METODE NA VIŠE REDOVE U WKB APROKSIMACIJI

Proširiti ćemo naše razmatranje, tako da umjesto Schwarzschildove metrike, gledamo $(D+2)$-dimenzionalno statičko sferno simetrično prostorvrijeme [15] (gdje 2 označava radijalnu i vremensku dimenziju, a D broj kutnih dimenzija)

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{g(r)} + r^2 d\Omega_D^2 \tag{30}$$

gdje su $f(r)$ i $g(r)$ proizvoljne, ali neprekidne i derivabilne funkcije radijalne koordinate r, $d\Omega_D^2$ je metrika na D-dimenzionalnoj sferi.

Površinska gravitacija je definirana kao

$$\kappa = \left[\sqrt{\frac{g(r)}{f(r)}}\frac{f'(r)}{2}\right]\Bigg|_{r=r_{\mathrm{H}}}, \tag{31}$$

gdje je r_{H} radijus horizonta naše crne rupe. Invarijantna udaljenost do našeg zida iznosi

$$h_c = \int_{r_{\mathrm{H}}}^{r_{\mathrm{H}}+h}\frac{dr}{\sqrt{g(r)}}. \tag{32}$$

Razvojem funkcija f i g, oko horizonta do drugog reda, pretpostavljajući da na samom horizontu iščezavaju,

$$f(r) = f'(r_{\rm H})(r - r_{\rm H}) + \frac{1}{2}f''(r_{\rm H})(r - r_{\rm H})^2 + ... \tag{33}$$

$$g(r) = g'(r_{\rm H})(r - r_{\rm H}) + \frac{1}{2}g''(r_{\rm H})(r - r_{\rm H})^2 + ... \tag{34}$$

i uvrštavanjem u h_c, dobivamo općenitu vezu između invarijante udaljenosti h_c i h

$$h_c = \sqrt{\frac{4h}{g'(r_{\rm H})}} \tag{35}$$

Promatrajmo sada ponašanje masivne skalarne čestice. One su opisana Klein-Gordonovom jednadžbom

$$\left(\Box - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Phi = 0. \tag{36}$$

Zbog sferne simetrije metrike, možemo za naše polje uzeti ansatz [16]

$$\Phi = e^{-iEt/\hbar}\left(\frac{R(r)}{r^{D/2}G(r)^{1/2}}\right)Y_{lm_i}(\theta, \phi_i), \tag{37}$$

gdje je $G(r) = \sqrt{f(r)g(r)}$.

Dobivamo radijalnu jednadžbu

$$R''(r) + \left[\frac{V^2(r)}{\hbar^2} - \Delta(r)\right]R(r) = 0, \tag{38}$$

gdje su $V^2(r)$ i $\Delta(r)$ definirane kao

$$V^2(r) = \frac{1}{G^2(r)}\left(E^2 - f(r)\left[m^2 + \left(\frac{\ell(\ell + D - 1)\hbar^2}{r^2}\right)\right]\right), \tag{39}$$

$$\Delta(r) = \left(\frac{G''(r)}{2G(r)}\right) - \left(\frac{G'^2(r)}{4G^2(r)}\right) + \left(\frac{D}{2r}\right)\left(\frac{G'(r)}{G(r)}\right) + \left(\frac{D(D-2)}{4r^2}\right). \tag{40}$$

Sada koristimo WKB aproksimaciju radijalne funkcije $R(r)$, u obliku

$$R(r) = \left(\frac{c_0}{\sqrt{P(r)}}\right)\exp\left[\frac{i}{\hbar}\int^r dr' P(r')\right]. \tag{41}$$

Uvrštavanje u gornju diferencijalnu jednadžbu, dobivamo da $P(r)$ zadovoljava sljedeću diferencijalnu jednadžbu

$$\left(\frac{1}{\hbar^2}\right)P^2(r)[P^2(r) - V^2(r)] = \left(\frac{3}{4}\right)P'(r)^2 - \frac{1}{2}P''(r)P(r) - \Delta(r)P(r)^2. \tag{42}$$

Za razliku od prošlog poglavalja, sada idemo u više redove WKB aproksimacije, razvijajući $P(r)$ u red potencija od $\hbar^2$

$$P(r) = \sum_{n=0}^{\infty}\hbar^{2n}P_{2n}(r). \tag{43}$$

Uvrštavanje ovog razvoja u gornju diferencijalnu jednadžbu, te skupljajući članove po potencijama $\hbar^2$, dolazimo do jednadžbi za $P_{2n}(r)$, do $n = 2$

$$P_0(r) = \pm V(r), \tag{44}$$

$$P_2(r) = \left(\frac{3}{8P_0(r)}\right)\left(\frac{P_0'(r)}{P_0(r)}\right)^2 - \left(\frac{P_0''(r)}{4P_0(r)^2}\right) - \left(\frac{\Delta(r)}{2P_0(r)}\right), \tag{45}$$

$$P_4(r) = -\left(\frac{5P_2^2}{2V(r)}\right) - \left(\frac{4P_2(r)\Delta(r) + P_2''(r)}{4V^2(r)}\right) + \left(\frac{3P_2'(r)V'(r) - P_2(r)V''(r)}{4V^3(r)}\right). \tag{46}$$

Možemo primjetiti kako se sve funkcije na kraju mogu napisati preko $P_0(r)$ i njenih derivacija. Možemo broj modova zapisati kao

$$N(E) = \sum_{n=0}^{\infty}N_{2n}(E), \tag{47}$$

gdje je N_{2n} doprinos n-tog moda. Njih definiramo kao

$$N_{2n}(E) = \frac{\hbar^{2n-1}}{\pi}\int_{r_{\rm H}+h_c}^{L}dr\int_0^{\ell_{max}}d\ell(2\ell+D-1)\mathcal{W}(\ell)P_{2n}(r), \tag{48}$$

gdje je

$$\mathcal{W}(\ell) = \frac{(\ell + D - 2)!}{(D-1)!\ell!} \tag{49}$$

degeneracija orbitalnog kutnog momenta, koja se vidi na dimenzijama različitim od 4. ℓ_{max} je definiran tako da P_{2n} bude realan, tj., prema gornjem zaključku, da $P_0(r)$ bude realan. Uvjet na ℓ_{max} iznosi

$$\ell_{max}(\ell_{max} + 1) = \frac{r^2E^2}{\hbar^2 f(r)^2}. \tag{50}$$

Analogno rastavljamo i entropiju i slobodnu energiju

$$S = \sum_{n=0}^{\infty}S_{2n}, \quad F = \sum_{n=0}^{\infty}F_{2n}, \tag{51}$$

gdje su

$$F_{2n} = -\int_0^{\infty}\frac{N_{2n}(E)}{e^{\beta E} - 1}dE, \quad S_{2n} = \beta^2\frac{\partial F_{2n}}{\partial\beta}. \tag{52}$$

Sada ćemo izračunati entropiju do 4. reda za slučaj četvero dimenzionalne crne rupe ($D=2$), uz $f(r)=g(r)$ i $m=0$. Jednadžbe (39) i (40) postaju

$$V^2(r)=\frac{1}{g^2(r)}\left(E^2-g(r)\frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{r^2}\right), \tag{53}$$

$$\Delta(r)=\left(\frac{g''(r)}{2g(r)}\right)-\left(\frac{g'(r)^2}{4g(r)^2}\right)+\left(\frac{1}{r}\right)\left(\frac{g'(r)}{g(r)}\right). \tag{54}$$

$P_0(r)$ jest

$$P_0=\pm\frac{1}{g(r)}\left[E^2-g(r)\frac{\hbar^2\ell(\ell+1)}{r^2}\right]^{1/2}, \tag{55}$$

a uvrštavanjem u $N_0(E)$

$$N_0(E)=\frac{1}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}dr\int_0^{\ell_{max}}d\ell(2\ell+1)P_0(r), \tag{56}$$

uz supstituciju $\lambda=\ell(\ell+1)$ i (48), imamo

$$N_0(E)=\frac{1}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}dr\int_0^{r^2E^2/\hbar^2g(r)}d\lambda\sqrt{\frac{E^2}{g^2(r)}-\frac{\hbar^2\lambda}{g(r)r^2}}, \tag{57}$$

a konačno dobivamo

$$N_0(E)=\frac{2E^3}{3\hbar^3}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}\frac{r^2dr}{g^2(r)}. \tag{58}$$

Slobodna energija je onda

$$F_0=-\frac{2\pi^3}{45\hbar^3}\frac{1}{\beta^4}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}\frac{r^2}{g^2(r)}dr, \tag{59}$$

a entropija

$$S_0=\frac{8\pi^3}{45\hbar^3}\frac{1}{\beta^3}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}\frac{r^2}{g^2(r)}dr. \tag{60}$$

Koristeći razvoj metrike do viših redova (34), te (5), (31) i (35), za entropiju u vodećem redu, u blizini horizonta dobivamo[1]

$$S_0=\frac{r_{\rm H}^2}{90h_c^2}+\left[\frac{\kappa r_{\rm H}}{90}-\frac{g''(r_{\rm H})r_{\rm H}^2}{360}\right]\ln\left(\frac{4r_{\rm H}^2}{90h_c^2}\right). \tag{61}$$

Najdivergentiniji član u nultom redu entropije izjednačavamo sa Bekenstein-Hawkingovom entropijom i tako određujemo invarijantnu duljinu, h_c. U ovom slučaju, to je $r_{\rm H}/90h_c^2$.

$$(S_0)_{div}=\frac{r_{\rm H}^2}{90h_c^2}=S_{\rm BH}=\frac{\mathcal{A}}{4\ell_{\rm Pl}^2}, \tag{62}$$

koristeći $\mathcal{A}=4r_{\rm H}^2\pi$, imamo

$$h_c^2=\frac{\ell_{\rm Pl}^2}{90\pi}. \tag{63}$$

Entropiju u nultom redu sada možemo pisati u obliku

$$S=S_{\rm BH}+\mathcal{F}_1(\mathcal{A})\ln\left(\frac{\mathcal{A}}{\ell_{\rm Pl}^2}\right), \tag{64}$$

gdje je

$$\mathcal{F}_1(\mathcal{A})=\frac{\kappa r_{\rm H}}{90}-\frac{g''(r_{\rm H})r_{\rm H}^2}{360}. \tag{65}$$

Kako bismo izračunali korekciju entropije u 2. redu, primjetimo da $P_2(r)$ možemo napisati poput

$$P_2(r)=\left(\frac{P_2^{(0)}(r)}{\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}\right)+\lambda(r)\left(\frac{P_2^{(1)}(r)}{\mathcal{G}^3(\mathcal{E},r)}\right)+\lambda^2(r)\left(\frac{P_2^{(2)}(r)}{\mathcal{G}^5(\mathcal{E},r)}\right), \tag{66}$$

gdje smo definiali

$$\mathcal{G}(\mathcal{E},r)=[\mathcal{E}-\lambda(r)]^{1/2}, \tag{67}$$

gdje su $\mathcal{E}=E^2$ i

$$\lambda(r)=\ell(\ell+1)\hbar^2\frac{g(r)}{r^2}, \tag{68}$$

te gdje $P_2^{(0)}(r), P_2^{(1)}(r), P_2^{(2)}(r)$ iznose[2]

$$P_2^{(0)}(r)=-\frac{g'(r)}{2r}, \tag{69}$$

$$P_2^{(1)}(r)=\frac{3g(r)}{4r^2}-\frac{3g'(r)}{4r}+\frac{g''(r)}{8}+\frac{g'(r)^2}{8g}, \tag{70}$$

$$P_2^{(2)}(r)=\frac{5g}{8r^2}-\frac{5g'(r)}{8r}+\frac{5g'(r)^2}{32g}. \tag{71}$$

Sada možemo krenuti u računanje $N_2(r)$, no prije toga, primjetimo da vrijede sljedeće relacije

[1] Integracija (58) vodi do korekcijskog člana oblika $\ln\left(\frac{L-r_{\rm H}}{h}\right)=\ln\left(\frac{L-r_{\rm H}}{h}\frac{\sigma}{\sigma}\right)\approx\ln\left(\frac{\sigma}{h}\right)$, gdje smo zanemarili član proporcionalan s L, budući da je to vakumski doprinos. Biramo σ tako da prilikom izjednačavanja najdivergentnijeg člana sa $S_{\rm BH}$ i uvrštavanja natrag u (61) korekcijski član ima oblik $\ln\mathcal{A}/\ell_{\rm Pl}^2$. $\sigma=r_{\rm H}^2g'(r_{\rm H})/90$

[2] Greška u originalnom članku [15]

$$\frac{1}{\mathcal{G}(\mathcal{E},r)} = 2\frac{\partial\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}{\partial\mathcal{E}}, \quad \frac{1}{\mathcal{G}^3(\mathcal{E},r)} = -4\frac{\partial^2\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}{\partial\mathcal{E}^2}, \quad \frac{1}{\mathcal{G}^5(\mathcal{E},r)} = \frac{8}{3}\frac{\partial^3\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}{\partial\mathcal{E}^3}, \tag{72}$$

koje će nam biti pogodne, budući da ćemo integral preko ℓ pretvoriti u integrala preko λ, gdje ćemo onda moći primjeniti Leibnizovo pravilo

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_{a(x)}^{b(x)} dt f[x,t] = f[x,b(x)]\left(\frac{db(x)}{dx}\right) - f[x,a(x)]\left(\frac{da(x)}{dx}\right) + \int_{a(x)}^{b(x)} dt\left[\frac{\partial f(x,t)}{\partial x}\right] \tag{73}$$

kako bismo dobili izraz za N_2. Imamo

$$N_2(E) = \frac{\hbar}{\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \int_0^{\ell_{max}} d\ell(2\ell+1)P_2(r), \tag{74}$$

uz supstituciju $\lambda = \lambda(\ell)$, slijedi

$$\hbar N_2(E) = \frac{1}{\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}\frac{r^2}{g(r)}dr\int_0^{\mathcal{E}}\Big[2\frac{\partial\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}{\partial\mathcal{E}}P_2^{(0)}(r)d\lambda - 4\lambda\frac{\partial^2\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}{\partial\mathcal{E}^2}P_2^{(1)}(r)d\lambda + \frac{8}{3}\lambda^2\frac{\partial^3\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}{\partial\mathcal{E}^3}P_2^{(2)}(r)d\lambda\Big]. \tag{75}$$

Korištenjem Leibnizovog pravila, i nakon zanemarivanja divergentnog doprinosa na točkama obrata (Dodatak II), imamo[3]

$$\hbar N_2(E) = \frac{2}{\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(0)}(r)\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\int_0^{\mathcal{E}}\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda - \frac{4}{\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(1)}(r)\frac{\partial^2}{\partial\mathcal{E}^2}\int_0^{\mathcal{E}}\lambda\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda + \frac{8}{3\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(2)}(r)\frac{\partial^3}{\partial\mathcal{E}^3}\int_0^{\mathcal{E}}\lambda^2\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda. \tag{76}$$

Za integrale vrijedi

$$\int_0^{\mathcal{E}}\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{2}{3}\mathcal{E}^{3/2}, \quad \int_0^{\mathcal{E}}\lambda\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{4}{15}\mathcal{E}^{5/2}, \quad \int_0^{\mathcal{E}}\lambda^2\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{16}{105}\mathcal{E}^{7/2}. \tag{77}$$

Nakon deriviranja, i uvrštavanja $\mathcal{E} = E^2$, N_2 onda iznosi

$$N_2(E) = \frac{E}{\pi\hbar}\int_{r_{\rm H}+h}^{L}\frac{r^2}{g(r)}\left(2P_2^{(0)} - 4P_2^{(1)} + \frac{16}{3}P_2^{(2)}\right)dr. \tag{78}$$

Konačan izraz za N_2 je onda

$$N_2(E) = \frac{E}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\left[\frac{1}{3} - \frac{4rg'(r)}{3g(r)} + r^2\left(\frac{g'(r)^2}{3g(r)^2} - \frac{g''(r)}{2g(r)}\right)\right]. \tag{79}$$

Uvrstimo li taj izraz u relaciju za slobodnu energiju, te koristeći integral

$$\int_0^\infty dx\frac{x}{e^x-1} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{80}$$

dobivamo

$$F_2 = -\frac{\pi}{6\hbar\beta^2}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\left[\frac{1}{3} - \frac{4rg'(r)}{3g(r)} + r^2\left(\frac{g'(r)^2}{3g(r)^2} - \frac{g''(r)}{2g(r)}\right)\right]. \tag{81}$$

Entropija je onda

$$S_2 = \frac{\pi}{3\hbar\beta}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\left[\frac{1}{3} - \frac{4rg'(r)}{3g(r)} + r^2\left(\frac{g'(r)^2}{3g(r)^2} - \frac{g''(r)}{2g(r)}\right)\right]. \tag{82}$$

Konačni izraz za korekciju entropije u 2. redu, u blizini horizonta onda iznosi[4]

$$S_2 = \frac{r_{\rm H}^2}{9h_c^2} - \left(\frac{\kappa r_{\rm H}}{9} + \frac{1}{72}g''(r_{\rm H})r_{\rm H}^2\right)\ln\left(\frac{44r_{\rm H}^2}{90h_c^2}\right). \tag{83}$$

Entropija do 2. reda, $S = S_0 + S_2$, onda iznosi

$$S = \frac{11r_{\rm H}^2}{90h_c^2} - \left(\frac{\kappa r_{\rm H}}{10} + \frac{g''(r_{\rm H})r_{\rm H}^2}{60}\right)\ln\left(\frac{44r_{\rm H}^2}{90h_c^2}\right). \tag{84}$$

Izjednačavanjem najdivergentnijeg člana sa Bekenstein-Hawkingovom entropijom, za h_c imamo

$$h_c^2 = \frac{11\ell_{\rm Pl}^2}{90\pi}. \tag{85}$$

Entropiju do 2. reda sada možemo pisati u obliku

$$S = S_{\rm BH} + \mathcal{F}(\mathcal{A})\ln\left(\frac{\mathcal{A}}{\ell_{\rm Pl}^2}\right), \tag{86}$$

[3] Greška u originalnom članku [15]

[4] Ovde smo koristili $\sigma = 11r_{\rm H}^2 g'(r_{\rm H})/90$, jer najdivergentniji član zboja $S = S_0 + S_2$ za takav σ daje korekcijski član oblika $\ln\mathcal{A}/\ell_{\rm Pl}^2$

gdje je

$$\mathcal{F}(\mathcal{A}) = -\frac{\kappa r_{\rm H}}{10} - \frac{g''(r_{\rm H})r_{\rm H}^2}{60}. \tag{87}$$

Da izračunamo entropiju u 4. redu, primjetimo da se $P_4(r)$ može napisati poput

$$P_4(r) = \left(\frac{P_4^{(0)}(r)}{\mathcal{G}^3(\mathcal{E},r)}\right) + \lambda(r)\left(\frac{P_4^{(1)}(r)}{\mathcal{G}^5\mathcal{E},r)}\right) + \tag{88}$$
$$\lambda^2(r)\left(\frac{P_4^{(2)}(r)}{\mathcal{G}^7(\mathcal{E},r)^7}\right) + \lambda^3(r)\left(\frac{P_4^{(3)}(r)}{\mathcal{G}(\mathcal{E},r)^9}\right) +$$
$$\lambda^4(r)\left(\frac{P_4^{(4)}(r)}{\mathcal{G}^{11}(\mathcal{E},r)}\right),$$

gdje su izrazi za $P_4^{(i)}(r)$, $i = 0, ..., 4$, dani u Dodatku III.

Ponavljajući istu proceduru kao za $N_2(E)$, $N_4(E)$ iznosi

$$N_4(E) = -\frac{4\hbar}{\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(0)}(r)\frac{\partial^2}{\partial\mathcal{E}^2}\int_0^{\mathcal{E}}\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda \tag{89}$$
$$+\frac{8\hbar}{3\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(1)}(r)\frac{\partial^3}{\partial\mathcal{E}^3}\int_0^{\mathcal{E}}\lambda\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda$$
$$-\frac{16\hbar}{15\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(2)}(r)\frac{\partial^4}{\partial\mathcal{E}^4}\int_0^{\mathcal{E}}\lambda^2\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda$$
$$+\frac{32\hbar}{105\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(3)}(r)\frac{\partial^5}{\partial\mathcal{E}^5}\int_0^{\mathcal{E}}\lambda^3\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda$$
$$-\frac{64\hbar}{945\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\frac{r^2}{g(r)}P_2^{(4)}(r)\frac{\partial^6}{\partial\mathcal{E}^6}\int_0^{\mathcal{E}}\lambda^4\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda.$$

Za integrale vrijedi

$$\int_0^{\mathcal{E}}\lambda\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{2}{3}\mathcal{E}^{3/2}, \quad \int_0^{\mathcal{E}}\lambda^2\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{4}{15}\mathcal{E}^{5/2}, \tag{90}$$
$$\int_0^{\mathcal{E}}\lambda^3\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{16}{105}\mathcal{E}^{7/2}, \quad \int_0^{\mathcal{E}}\lambda^4\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{4}{15}\mathcal{E}^{5/2},$$
$$\int_0^{\mathcal{E}}\lambda^5\mathcal{G}(\mathcal{E},r)d\lambda = \frac{4}{15}\mathcal{E}^{5/2}.$$

Konačno imamo

$$N_4(E) = \frac{1}{E}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\Sigma^{(4)}(r), \tag{91}$$

gdje je funkcija $\Sigma^{(4)}(r)$ dana u Dodatku III.

Primjetimo da $N_4(E)$ pada linearno s energijom. Također, uspoređujući ovisnost o energiji sa vodećim i drugim redom, možemo zaključiti da doprinos broja stanja u n-tom WKB modu ovisi o energiji s E^{3-2n}.

F_4 iznosi

$$F_4 = \int_0^\infty dE\frac{1}{E(e^{\beta E}+1)}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\Sigma^{(4)}(r), \tag{92}$$

uz supstituciju $x = \beta E$, imamo

$$F_4 = \int_0^\infty dx\frac{1}{x(e^{x}+1)}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr\Sigma^{(4)}(r), \tag{93}$$

Vidimo da F_4 više ne ovisi o β, pa je

$$S_4 = 0, \tag{94}$$

tj. nemamo korekciju entropije u 4. redu.

Ukupna entropija do 4. reda je onda ista kao i do 2. reda (84). Vidimo da je korekcija crne rupe logaritamski proporcionalna s njenom površinom.

IV. ENTROPIJA ZA SCHWARZSCHILDOVU CRNU RUPU

U slučaju Schwarzschildove crne rupe imamo

$$f(r) = g(r) = 1 - \frac{2GM}{r}. \tag{95}$$

Za površinsku gravitaciju imamo

$$\kappa = \frac{g'(r_{\rm H})}{2} = \frac{1}{2r_{\rm H}}, \tag{96}$$

a $g''(r_{\rm H})$ iznosi

$$g''(r_{\rm H}) = -\frac{2}{r_{\rm H}^2}. \tag{97}$$

Uvrštavanjem gornjih rezultata u (87), entropija za Schwarzschildovu crnu rupu do 4. reda iznosi

$$S = S_{\rm BH} - \frac{1}{60}\ln\left(\frac{\mathcal{A}}{\ell_{\rm Pl}^2}\right) \tag{98}$$

V. ENTROPIJA ZA BTZ CRNU RUPU

BTZ crna rupa je (1+2)-dimenzionalna osnosimetrična crna rupa [17, 18]. Njena metrika je dana s

$$ds^2 = -(N^\perp)^2dt^2 + (N^\perp)^{-2}dr^2 + r^2(d\phi + N^\phi dt)^2, \tag{99}$$

gdje su

$$N^\perp = \left(-M + \left(\frac{r}{l}\right)^2 + \left(\frac{J}{2r}\right)^2\right)^{1/2}, \tag{100}$$

$$N^\phi = -\frac{J}{2r^2}, \tag{101}$$

gdje je l radijus zakrivljenosti anti-de Sitter prostora, i dan je s $l^{-2} = -\Lambda$, gdje je Λ kozmološka konstanta.

$$r_\pm = l\left(\frac{M}{2}\left(1 \pm \sqrt{1-\left(\frac{J}{Ml}\right)^2}\right)\right)^{1/2} \tag{102}$$

su radijusi horizonta događaja BTZ crne rupe.

Ograničiti ćemo se na slučaj nerotirajuće BTZ crne rupe gdje je $J = 0$, tj. $r_- = 0$, te $r_+ = r_{\rm H}$, kako bismo imali dijagonalnu metriku i tako mogli koristiti formalizam koji smo do sada razvili, uz $g(r) = N^\perp$. Budući da radimo u dimenziji niže nego u prethodnom poglavlju, moramo izmjeniti neke od parametra od prošlog poglavlja. Vrijedi $D = 1$, te izrazi (39) i (40) postaju

$$V^2(r) = \frac{1}{g^2(r)}\left(E^2 - g(r)\frac{\ell^2\hbar^2}{r^2}\right), \tag{103}$$

$$\begin{aligned}\Delta(r) = \left(\frac{g''(r)}{2g(r)}\right) - \left(\frac{(g'(r))^2}{4g(r)^2}\right) + \\ \left(\frac{1}{2r}\right)\left(\frac{g'(r)}{g(r)}\right) - \left(\frac{1}{4r^2}\right).\end{aligned} \tag{104}$$

Osim toga, degeneracija kod N_{2n} više nije 1 nego iznosi

$$\mathcal{W}(\ell) = \frac{1}{\ell}. \tag{105}$$

N_0 je onda

$$N_0(E) = \frac{2}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \int_0^{\ell_{max}} d\ell P_0(r), \tag{106}$$

$$N_0(E) = \frac{2}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \int_0^{Er/\hbar\sqrt{f(r)}} \sqrt{\frac{E^2}{g(r)^2} - \frac{\hbar^2\ell^2}{r^2 g(r)}}, \tag{107}$$

te se konačno dobiva

$$N_0(E) = \frac{E^2}{2\hbar^2}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \frac{r}{g(r)^{3/2}}. \tag{108}$$

Slobodna energija je onda

$$F_0 = -\frac{\zeta(3)}{\hbar^2}\frac{1}{\beta^3}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \frac{r}{g(r)^{3/2}}. \tag{109}$$

Entropija iznosi

$$S_0 = \frac{3\zeta(3)}{\hbar^2}\frac{1}{\beta^2}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \frac{r}{g(r)^{3/2}}. \tag{110}$$

Nakon integracije imamo

$$S_0 = \frac{3\zeta(3)}{\hbar^2}\frac{l^3}{\beta^2}\frac{1}{\sqrt{2r_{\rm H}h}}. \tag{111}$$

Hawkingova temperatura sada iznosi

$$T_{\rm H} = \frac{1}{\beta} = \frac{\hbar\kappa}{2\pi}, \tag{112}$$

gdje je κ sada

$$\kappa = \frac{g'(r_{\rm H})}{2} = \frac{r_{\rm H}}{l^2}. \tag{113}$$

Entropija je sada

$$S_0 = \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2}\frac{r_{\rm H}^2}{l}\frac{1}{\sqrt{2r_{\rm H}h}}, \tag{114}$$

što se slaže s direktnim računom [19]. Izjednačavanjem s Bekenstein-Hawkingovom entropijom imamo[5]

$$h^{1/2} = \frac{3\zeta(3)}{4\pi^2}\frac{r_{\rm H}^2}{l}\frac{1}{\sqrt{2r_{\rm H}}}\frac{4G\hbar}{\mathcal{A}}, \tag{115}$$

gdje je $\mathcal{A} = 2\pi r_{\rm H}$ opseg crne rupe. Invarijantna udaljenost, (32), je sada

$$h_c = l\sqrt{\frac{2h}{r_{\rm H}}}. \tag{116}$$

Ona iznosi

$$h_c = \frac{3\zeta(3)}{2\pi^3}G\hbar \tag{117}$$

Prilikom izračunavanja entropije u 2. redu, možemo koristiti dekompoziciju (66), gdje se jedino mijenja $P_2^{(0)}(r)$ član, koji sada iznosi

$$P_2^{(0)}(r) = -\frac{g'(r)}{4r} + \frac{g}{8r^2}, \tag{118}$$

dok $P_2^{(1)}(r)$ i $P_2^{(2)}(r)$ imaju isti oblik, (70) i (71) respektivno. Broj stanja u 2. redu iznosi

$$N_2(E) = \frac{2}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \int_0^{\ell_{max}} d\ell P_2(r), \tag{119}$$

tj.

$$\begin{aligned}N_2(E) = \frac{2}{\hbar\pi}\int_{r_{\rm H}+h}^{L} dr \int_0^{\ell_{max}} d\ell\Bigg[\left(\frac{P_2^{(0)}(r)}{\mathcal{G}(\mathcal{E},r)}\right) + \\ \lambda(r)\left(\frac{P_2^{(1)}(r)}{\mathcal{G}(\mathcal{E},r)^3}\right) + \lambda(r)^2\left(\frac{P_2^{(2)}(r)}{\mathcal{G}(\mathcal{E},r)^5}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{120}$$

---

[5] umjesto $\ell_{\rm Pl}^2$ koristimo $G\hbar$, budući da dimeznija od G ovisi o dimenziji prostorvremena. Iz akcije za OTR $S = 1/(16\pi G)\int d^n x\sqrt{g}R$, te iz $[S] = [M]^0$, $d^n x = [M]^n$, $[R] = [M]^{-2}$, imamo $[G] = [M]^{2-n}$. Za $n = 3$ slijedi $[G] = [M]^{-1}$.

Korištenjem integrala

$$\int_0^{\sqrt{\mathcal{E}}r/\hbar\sqrt{g}} \frac{d\ell}{\mathcal{G}} = \frac{\pi r}{2\sqrt{g(r)}\hbar}, \int_0^{\sqrt{\mathcal{E}}r/\hbar\sqrt{g}} \frac{\ell^2 d\ell}{\mathcal{G}^3} = -\frac{\pi r^3}{2g^{3/2}(r)\hbar^3}, \tag{121}$$

$$\int_0^{\sqrt{\mathcal{E}}r/\hbar\sqrt{g}} \frac{\ell^4 d\ell}{\mathcal{G}^5} = \frac{\pi r^5}{2g^{5/2}(r)\hbar^5},$$

imamo

$$N_2(E) = \hbar \int_{r_{\rm H}+h}^{L} \frac{rdr}{g^{3/2}(r)} \Big[P_2^{(0)}(r) - \frac{P_2^{(1)}(r)}{g(r)} + \frac{P_2^{(2)}(r)}{g^2(r)} \Big]. \tag{122}$$

Korištenjem integrala

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x+1} = \ln(2) \tag{123}$$

slobodna energija iznosi

$$F_2 = -\frac{\hbar \ln(2)}{\beta} \int_{r_{\rm H}+h}^{L} \frac{rdr}{g^{3/2}(r)} \Big[P_2^{(0)}(r) - \frac{P_2^{(1)}(r)}{g(r)} + \frac{P_2^{(2)}(r)}{g^2(r)} \Big], \tag{124}$$

a entropija

$$S_2 = \hbar \ln(2) \int_{r_{\rm H}+h}^{L} \frac{rdr}{g^{3/2}(r)} \Big[P_2^{(0)}(r) - \frac{P_2^{(1)}(r)}{g(r)} + \frac{P_2^{(2)}(r)}{g^2(r)} \Big], \tag{125}$$

tj.

$$S_2 = \hbar \ln(2) \int_{r_{\rm H}+h}^{L} \frac{rdr}{g^{3/2}(r)} \Big[P_2^{(0)}(r) - \frac{P_2^{(1)}(r)}{g(r)} + \frac{P_2^{(2)}(r)}{g^2(r)} \Big]. \tag{126}$$

Uvrštavanjem $P_2^{(0)}(r)$, $P_2^{(1)}(r)$ i $P_2^{(2)}(r)$ u (108), imamo

$$S_2 = \hbar \ln(2) \int_{r_{\rm H}+h}^{L} \Big[-\frac{g'(r)}{4g^{3/2}(r)} + \frac{1}{8r\sqrt{g(r)}} - \frac{rg''(r)}{8g^{5/2}(r)} - \frac{rg'(r)^2}{8g^{7/2}(r)} + \frac{3g'(r)}{4g^{5/2}(r)} - \frac{3}{4rg^{3/2}(r)} + \frac{5rg'(r)^2}{32g^{9/2}(r)} - \frac{5g'(r)}{8g^{7/2}(r)} + \frac{5}{8rg^{5/2}(r)} \Big]. \tag{127}$$

Konačno, dobivamo

$$S_2 = \hbar \ln(2) \Bigg(\frac{1}{\sqrt{2r_{\rm H}h}} \left(-\frac{l}{2} - \frac{19}{24}\frac{l^3}{r_{\rm H}^2} - \frac{5}{8}\frac{l^5}{r_{\rm H}^4} \right) + \sqrt{2r_{\rm H}h} \left(-\frac{3}{4}\frac{l^3}{r_{\rm H}^4} - \frac{25}{32}\frac{l^5}{r_{\rm H}^6} \right) \Bigg). \tag{128}$$

Uvrštavajući (108), korekcija iznosi

$$S_2 = \hbar \ln(2) \Bigg(-\frac{l^2}{h_c r_{\rm H}} - \frac{19}{24}\frac{l^4}{h_c r_{\rm H}^3} - \frac{5}{8}\frac{l^6}{h_c r_{\rm H}^5} + -\frac{3h_c l^2}{4r_{\rm H}^3} - \frac{25}{32}\frac{h_c l^4}{r_{\rm H}^5} \Bigg). \tag{129}$$

Ova korekcija entropiji nam daje dodatni doprinos koji ovisi korjenski o h. Iz (94), znamo da nemamo doprinosa u 4. redu. Ukupna entropija do četvrtog reda sada iznosi

$$S = S_{\rm BH} - \hbar \ln(2) \Bigg(\frac{1}{h_c} \left(\frac{l^2}{r_{\rm H}} + \frac{19}{24}\frac{l^4}{r_{\rm H}^3} + \frac{5}{8}\frac{l^6}{r_{\rm H}^5} \right) + h_c \left(\frac{3l^2}{4r_{\rm H}^3} + \frac{25}{32}\frac{l^4}{r_{\rm H}^5} \right) \Bigg), \tag{130}$$

te ju možemo napisati u formi

$$S = S_{\rm BH} + \mathcal{G}(\mathcal{A}), \tag{131}$$

gdje je

$$\mathcal{G}(\mathcal{A}) = -\hbar \ln(2) \Bigg(\frac{1}{h_c} \left(\frac{l^2}{r_{\rm H}} + \frac{19}{24}\frac{l^4}{r_{\rm H}^3} + \frac{5}{8}\frac{l^6}{r_{\rm H}^5} \right) + h_c \left(\frac{3l^2}{4r_{\rm H}^3} + \frac{25}{32}\frac{l^4}{r_{\rm H}^5} \right) \Bigg). \tag{132}$$

Također možemo primijetiti da, za razliku od Schwarzschildove crne rupe, nemamo korekcije logaritamskog tipa.

VI. PREPLETENA ENTROPIJA

Promotrimo čisto vakuumsko stanje $|\psi>$ kvantnog sistema definiranog unutar prostornolikog područja $\mathcal{O}$, te pretpostavimo da su stupnjevi slobode lokalizirani u nekim regijama od $\mathcal{O}$. Ako gledamo proizvoljnu plohu Σ, koja dijeli prostor $\mathcal{O}$ na dva disjunktna podprostora A i B, onda se dani kvantni sistem može reprezentirati kao unija dva podsistema. Valna funkcija cijelog sistema je onda dana linearnom kombinacijom produkta kvantnih stanja svakog od podsistema,

$$|\psi>= \sum_{i,a} \psi_{i,a} |A>_i |B>_a, \tag{133}$$

gdje se stanja $|A>_i$ tvore od stupnjeva slobode lokaliziranih u regiji A, dok stanja $|B>_a$ od stupnjeva slobode u regiji B.

Statistička entropija za neku matricu gustoće, se zove von Neumannovom i dana je formulom [20]

$$S = -Tr(\rho \ln \rho). \tag{134}$$

Matrica gustoće koja odgovara čistom kvantnom stanju $|\psi>$ je dana s

$$\rho_0(A,B) = |\psi><\psi|, \tag{135}$$

i ima iščezavajuću von Neumannovu entropiju, budući da je čisto stanje ono bez neodređenosti.

Napravimo li trag preko stupnjeva slobode u regiji A za matricu gustoće čistog stanja, dobivamo reduciranu matricu gustoće za podsustav B

$$\rho_B = Tr_A \rho_0(A,B), \tag{136}$$

čija je entropija sada dana s

$$S_B = -Tr(\rho_B \ln \rho_B), \tag{137}$$

što odgovara prepletenoj entropiji koja je povezana sa površinom Σ. Istim postupkom dođemo i do prepletene entropije S_A. Može se pokazati [7] da vrijedi

$$S_A = S_B. \tag{138}$$

Ovo pokazuje da prepletena entropija za sistem u čistom stanju nije ekstenzivna veličina, tj. da ne ovisi o veličini ijedne od regija A i B, te je stoga određena jedino geometrijom plohe koja razdvaja prostor, Σ. Ako ovaj zaključak primjenimo na primjeru crnih rupa, možemo zaključiti da entropiju crne rupe možemo izračunati tako da izračunamo entropiju izvan nje. Ovo je u slaganju sa *brick wall* metodom, gdje smo entropiju računali promatranjem ponašanja skalarnih čestica izvan crne rupe, te isto tako zaključili da je glavni doprinos entropiji od samog horizonta crne rupe.

Solodukhin [21] je pomoću prepletene entropije izračunao entropiju Schwarzschildove crne rupe

$$S_{\rm Sch} = S_{\rm BH} + \frac{1}{90}\ln\frac{\mathcal{A}}{\ell_{\rm Pl}^2}. \tag{139}$$

Vidimo da se rezultat slaže po strukturi UV divergencije sa entropijom dobivenom *brick wall* metodom.

VII. ZAKLJUČAK

U ovom seminaru uveli smo vezu izmedu termodimičkih veličina i veličina vezanih uz crnu rupu, te izložili motivaciju za računanje entropije crne rupe. Uveli smo *brick wall* oko horizonta Schwarzschildove crne rupe kako bismo odrezali divergenciju gustoće stanja na horizontu, te smo odredili da je taj zid zapravo svojstvo horizonta same crne rupe. Budući da je entropija bila potpuno određena debljinom tog zida, zaključili smo da horizont daje glavni doprinos kvantnim svojstvima crne rupe. Metodu smo onda generalizirali za više redove u WKB aproksimaciji za $(D+2)$-dimenzionalnu sfernosimetričnu crnu rupu. Odredili smo korekciju entropije u nultom, drugom i četvrtom redu u WKB aproksimaciji, te primjetili smo da je doprisnos entropiji od viših WKB modova istog oblika kao i doprinos vodećeg moda. Konkretno, nulti i drugi red imaju logaritamsku ovisnost o $\mathcal{A}$, dok korekcije u četvrtom redu nema. Primjenili smo dobivene formule za slučajeve Schwarzschildove i BTZ crne rupe. Za Schwarzschildovu crnu rupu dobili smo da entropija iznosi $S = S_{\rm BH} - 1/60\ln\left(\mathcal{A}/\ell_{\rm Pl}^2\right)$, dok za nerotirajuću BTZ crnu rupu imamo $S = S_{\rm BH} + \mathcal{G}(\mathcal{A})$. Uspoređujući naše rezultate s računom entropije pomoću prepletenih stupnjeva slobode [21], vidimo da korekcije entropije imaju istu strukturu UV divergencije, uz različite pretfaktore.

VIII. ZAHVALE

Zahvaljujem se mentoru Tajronu Juriću na svoj pomoći i potpori pri izradi ovoga seminara, od pružanja literature, do brzog odgovaranja na pitanja i nedoumica.

IX. DODATAK I

U ovom dodatku rješavamo jednadžbu (36) koristeći ansatz (37). Budući da smo se ograničili na sferno simetrično prostorvrijeme, oblika (30), imamo dijagonalnu metriku, pa nam D'Alambertov operator poprima jednostavnu formu. Determinanta metrike, g, ima formu

$$g = -\frac{f(r)}{g(r)} r^{2D} h(\theta,\phi,...), \tag{140}$$

gdje je h neka funkcija kutnih varijabli. Može se pokazati [16], da onda Klein-Gordonova jednadžba poprima oblik:

$$\left(g^{tt}\partial_{tt} + \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_r(g^{rr}\sqrt{-g}\partial_r) + \nabla_D^2 - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\Phi = 0, \tag{141}$$

gdje je ∇_D^2 D-dimenzionalni Laplasijan u zakrivljenom prostorvremenu,

$$\nabla_D^2 = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_i(g^{ij}\sqrt{-g}\partial_j), \tag{142}$$

a g^{ij} inverz metrike. Uvrštavanja ansatza (37) u gornju jednadžbu, imamo

$$\left(\frac{1}{f(r)}\frac{E^2}{\hbar^2} - \frac{\ell(\ell+D-1)}{r^2} - \frac{m^2}{\hbar^2}\right)\frac{R(r)}{r^{D/2}G(r)^{1/2}} \tag{143}$$
$$+\sqrt{\frac{g(r)}{f(r)r^{2D}}}\partial_r\left(g(r)\sqrt{\frac{f(r)r^{2D}}{g(r)}}\partial_r\left(\frac{R(r)}{r^{D/2}G(r)^{1/2}}\right)\right) = 0,$$

gdje smo koristili

$$\nabla_D^2 Y_{lm}(\Omega) = \frac{\ell(\ell+D-1)}{r^2} Y_{lm}(\Omega), \tag{144}$$

kao i činjenicu ga je za dijagonalnu metriku njen inverz $g^{\mu\nu} = 1/g_{\mu\nu}$. Nakon deriviranja i korištenja pokrata (39) i (40), dolazimo do radijalne jednadžbe (38).

X. DODATAK II

U ovom dodatku primjenjujemo Leibnizovo pravilo na integrale u jednadžbi (75) i pokazujemo da nas to vodi na konačan i divergentan dio.

Prvi integral na desnoj strani jednadžbe (75) ne dovodi do divergentnih članova. Koristeći (73) uz $a(\mathcal{E}) = 0$ i $b(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$ imamo

$$\int_0^{\mathcal{E}} d\lambda P_2^{(0)}(r) \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{E}, r)}{\partial \mathcal{E}} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \int_0^{\mathcal{E}} d\lambda P_2^{(0)}(r) \mathcal{G}(\mathcal{E}, r) \tag{145}$$

Drugi i treći integral na desnoj strani jdn (75) vode do divergentnih članova. Kako bismo ovo uočili, izvrijednimo integrale eksplicitno.

Primjenjujući (73) na drugi integral u (75), imamo

$$\int_0^{\mathcal{E}} \lambda \frac{\partial^2 \mathcal{G}(\mathcal{E}, r)}{\partial \mathcal{E}^2} d\lambda \tag{146}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \int_0^{\mathcal{E}} \lambda \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{E}, r)}{\partial \mathcal{E}} d\lambda - \mathcal{E} \frac{\partial \mathcal{G}(\mathcal{E}, r)}{\partial \mathcal{E}} \bigg|_{\mathcal{E}=\lambda}$$
$$= \frac{\partial^2}{\partial \mathcal{E}^2} \int_0^{\mathcal{E}} \lambda(r) \mathcal{G}(\mathcal{E}, r) d\lambda - \frac{\mathcal{E}}{2(\mathcal{E}-\lambda)^{1/2}} \bigg|_{\mathcal{E}=\lambda}.$$

Primjenjujući isti postupak na treći integral u (75), dobivamo

$$\int_0^{\mathcal{E}} \lambda^2 \frac{\partial^3 \mathcal{G}(\mathcal{E}, r)}{\partial \mathcal{E}^3} d\lambda = \frac{\partial^3}{\partial \mathcal{E}^3} \int_0^{\mathcal{E}} d\lambda \lambda^2 \mathcal{G}(\mathcal{E}, r) - \left[\frac{\partial}{\partial \mathcal{E}} \left[\frac{\mathcal{E}^2}{2\mathcal{G}(\mathcal{E}, r)} \right] - \frac{\mathcal{E}^2}{4\mathcal{G}^3(\mathcal{E}, r)} \right] \bigg|_{\mathcal{E}=\lambda}. \tag{147}$$

Iz gornje dvije jednadžbe, vidimo da oba integrala imaju konačan i divergentan dio. Divergencija se događa na točki obrata $\mathcal{E} = \lambda$. Ovo je nefizikalna divergencija, koja dolazi zato jer WKB aproksimacija nije valjana blizu točki obrata.

XI. DODATAK III

U ovom dodatku se nalaze formule za eksplicitne oblike funkcija $P_4^{(i)}(r)$, $i = 0, ..., 4$, te $\Sigma^{(4)}(r)$.

$$P_4^{(0)}(r) = -\frac{5}{2} g(r) P_2^{(0)}(r)^2 - \frac{g(r)}{r} g'(r) P_2^{(0)}(r) - \frac{1}{4} g'(r)^2 P_2^{(0)}(r) - \frac{3}{4} g(r) g'(r) P_2'^{(0)}(r) - \frac{1}{4} g(r) P_2^{(0)}(r) g''(r) - \frac{1}{4} g(r)^2 P_2''^{(0)}(r) \tag{148}$$

$$P_4^{(1)}(r) = -5g(r) P_2^{(0)}(r) P_2^{(1)}(r) + \frac{5}{4r^3} \left[g(r)^2 g'(r) P_2^{(0)}(r) + g(r)^3 P_2'^{(0)}(r) \right] - \frac{5}{8r^2} \left[g(r) P_2^{(0)}(r) g'(r)^2 + g(r)^2 g'(r) P_2'^{(0)}(r) \right] - \frac{1}{r} g(r) g'(r) P_2^{(1)}(r) - \frac{1}{4} \left[g'(r)^2 P_2^{(1)}(r) + 3g(r) g'(r) P_2'^{(1)}(r) + g(r) g''(r) P_2^{(1)}(r) + g(r)^2 P_2''^{(1)}(r) \right] \tag{149}$$

$$P_4^{(2)}(r) = -5g(r) P_2^{(0)}(r) P_2^{(2)}(r) - \frac{5}{2} g(r) P_2^{(1)}(r)^2 - \frac{3}{16} g(r) g'(r) P_2'^{(2)}(r) - \frac{1}{4} \left[g(r) g''(r) P_2^{(2)}(r) + g(r)^2 P_2''^{(2)}(r) + g'(r)^2 P_2^{(2)}(r) \right] - \frac{5}{4r^6} g(r)^4 P_2^{(0)}(r) + \frac{5}{4r^5} g(r)^3 g'(r) P_2^{(0)}(r) - \frac{1}{2r^4} \left[3g(r)^3 P_2^{(1)}(r) - \frac{5}{8} g(r)^2 g'(r)^2 P_2^{(0)}(r) \right] + \frac{1}{4r^3} \left[15g(r)^2 g'(r) P_2^{(1)}(r) + 9g(r)^3 P_2'^{(1)}(r) \right] - \frac{1}{r} g(r) g'(r) P_2^{(2)}(r) - \frac{1}{8r^2} \left[11g'(r)^2 g(r) P_2^{(1)}(r) + 9g(r)^2 g'(r) P_2'^{(1)}(r) + 2g(r)^2 g''(r) P_2^{(1)}(r) \right] \tag{150}$$

$$P_4^{(3)}(r) = -5g(r) P_2^{(1)}(r) P_2^{(2)}(r) - \frac{23}{4r^6} \left[g(r)^4 P_2^{(1)}(r) + \frac{23 g(r)^3 P_2^{(1)}(r) g'(r)}{4r^5} \right] - \frac{1}{r^4} \left[3g(r)^3 P_2^{(2)}(r) \frac{23}{16} g(r)^2 g'(r)^2 P_2^{(1)}(r) \right] + \frac{1}{4r^3} \left[25g(r)^2 P_2^{(2)}(r) g'(r) + 13g(r)^3 P_2'^{(2)}(r) \right] - \frac{1}{8r^2} \left[17g(r) P_2^{(2)}(r) g'(r)^2 + 13g(r)^2 g'(r) P_2'^{(2)}(r) + 4g(r)^2 P_2^{(2)}(r) g''(r) \right] \tag{151}$$

$$P_4^{(4)} = -\frac{49}{4r^6} g(r)^4 P_2^{(2)}(r) + \frac{49}{4r^5} g(r)^3 g'(r) P_2^{(2)}(r) \frac{5}{2} g(r) P_2^{(2)}(r)^2 - \frac{49}{16r^4} g(r)^2 g'(r)^2 P_2^{(2)}(r) \tag{152}$$

$$\Sigma^{(4)}(r) = -\frac{323}{10080}\frac{r^2 g'(r)^4}{g(r)^2} + \frac{101 r^2 g'(r)^2 g''(r) - 631 r g'(r)^2}{1680 g(r)} \tag{153}$$
$$+\frac{7r^2}{840}\left[g''(r)^2 + 7g'(r)g^{(3)}(r) + 5g^{(4)}(r)g(r)\right] +$$
$$\frac{r}{840}\left[155g'(r)g''(r) + 252g^{(3)}(r)g(r)\right]$$
$$+\frac{467g'(r)^2 + 150g''(r)g(r)}{420} + \frac{17}{630}\frac{g(r)^2}{r^2} - \frac{1223}{2520}\frac{g'(r)g(r)}{r}$$

LITERATURA

[1] K. Schwarzschild, *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften* **7** (1916) 189–196

[2] C.W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, *Gravitation*, W. H. Freeman (1973)

[3] J. D. Bekenstein, *Lett. Nuovo Cim.* **4** (1972) 737-740

[4] J.D. Bekenstein, *Phys. Rev.* **D7** (1973) 2333

[5] J. M. Bardeen, B. Carter, S. W. Hawking, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973) 161

[6] S. W. Hawking, *Nature* **248** (5443) 30-31

[7] S. N. Solodukhin, *Living Rev. Relativity* **14** (2011) 8

[8] J. G. Demers, R. Lafrance, R. C. Myers, *Phys. Rev.* **D52** (1995), 2245-2253

[9] G. 't Hooft, *Nucl. Phys.* **B256** (1985) 727–745

[10] L. Bombelli, R. K. Koul, J. Lee, R. D. Sorkin, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 373

[11] X. Calmet and F. Kuipers, *Phys. Rev.* **D104** (2021)

[12] N. Bodendorfer and Y. Neiman, *Phys. Rev.* **D90** (2014)

[13] S. Das, S. Shankaranarayanan, S. Sur, [arXiv:0806.0402 [gr-qc]]

[14] K. S. Gupta, T. Jurić, A. Samsarov, I. Smolić, arXiv:2209.07168v2 [hep-th]

[15] S. Sarkar, S. Shankaranarayanan and L. Sriramkumar, *Phys. Rev.* **D78** (2008)

[16] V. P. Frolov, F. D. Mazzitelli, J. P. Paz, *Phys. Rev.* **D40** (1989) 948

[17] M. Banados, C. Teitelboim, J. Zanelli *Phys. Rev. Lett.* **69** (1992) 1849-1851

[18] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, Jorge Z. *Phys. Rev.* **D48** (1993) 1506-1525

[19] S. W. Kim, W. T. Kim, Y. J. Park, H. Shin, *Phys. Lett.* **B392** (1997) 311-318

[20] I. Bengtsson, K. Zyckowski: *Geometry of Quantum States: An Introduction to Quantum Entanglement*, Cambridge University Press (2006)

[21] S. N. Solodukhin, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 609–617