Ograničenje skale nekomutativnosti prostorvremena detekcijom gravitacijskih valova

Dorijan Vulić*
Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek
Bijenička cesta 32, 10000, Zagreb

Mentor: dr.sc. Anđelo Samsarov†
Institut Ruđer Bošković, Zavod za teorijsku fiziku
Bijenička cesta 54, 10000, Zagreb

Koristimo signal gravitacijskog vala GW150914 kako bismo postavili gornju granicu skale nekomutativnosti prostorvremena. Pokazujemo da se prva nekomutativna popravka faze gravitacijskih valova binarnog sustava pojavljuje u drugom redu post-Newtonovskog razvoja. Ta popravka je proporcionalna parametru $\Lambda^2 := |\theta^{0i}|^2/(l_P t_P)^2$, gdje je $\theta^{\mu\nu}$ antisimetrični tenzor koji opisuje nekomutativnost operatora koordinata prostorvremena, a l_P i t_P Planckova duljina i vrijeme, respektivno. Analiza signala događaja GW150914 postavlja gornju granicu parametra $\Lambda \lesssim 12$.

I. UVOD

Grupa "LIGO/Virgo Collaboration" objavila je prvu izravnu detekciju gravitacijskih valova. Otkriveni signal nazvan je GW150914 i proizveden je spajanjem i kolapsom binarnog sustava crnih rupa [1]. Koristimo podatke dobivene promatranjem događaja GW150914 kako bismo ograničili skalu kvantiziranog prostorvremena.

Ideja o razmatranju kvantiziranog prostorvremena promovira koordinate prostorvremena u nekomutirajuće operatore. Operatori koordinata prostorvremena zadovoljavaju kanonske komutacijske relacije

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i\theta^{\mu\nu}, \tag{1}$$

gdje je $\theta^{\mu\nu}$ realan i antisimetričan tenzor. Ovim operatorom implicitno uvodimo skalu zamućenosti prostorvremena, analognu reduciranoj Planckovoj konstanti $\hbar$ u faznom prostoru. Takva skala zamućenosti faznog prostora posljedica je relacije neodređenosti položaja i impulsa $\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$ koja direktno proizlazi iz komutacijske relacije

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar,$$

pa je razumno očekivati sličan rezultat u slučaju nekomutativnog prostorvremena.

Nekomutativna geometrija prostorvremena je zanimljiva jer se teorija polja može generalizirati na zakrivljeno prostorvrijeme koristeći nekomutativne koordinate [17]. Iz toga su proizašle dvije formulacije standardnog modela čestične fizike u nekomutativnom prostoru, [15] i [11]. Za pregled nekomutativne geometrije u fizici pogledajte članak [17].

U poglavlju II ovog rada predstavljen je kratki uvod u opću teoriju relativnosti i osnove matematičkog formalizma koji ćemo koristiti. U poglavlju III izvodimo valnu jednadžbu gravitacijskih valova u linearnoj aproksimaciji, gdje metriku $g_{\mu\nu}$ klasičnog prostorvremena rastavljamo na metriku ravnog prostorvremena $\eta_{\mu\nu}$ i malu popravku $h_{\mu\nu}$. Svrha tog poglavlja je matematički prikaz najjednostavnijeg modela koji dopušta nastanak gravitacijskih valova. U poglavlju IV izvodimo snagu zračenja gravitacijskih valova poznatu kao Einsteinova kvadrupolna formula. U poglavlju V uvodimo post-Newtonovski formalizam rješavanja jednadžbe evolucije prostorvremena u prisutnosti neke raspodjele energije i mase, kada ne možemo pretpostaviti da se sustav nalazi u ravnom prostorvremenu. Formalizam prikazujemo općenito, kako bi čitatelj imao bolji dojam o izvoru kasnijih izraza koje koristimo, a ne izvodimo sami. Poglavlje VI služi kao uvod u nekomutativnu gravitaciju, s dodatnim referencama za bolje razumijevanje. Također, u tom poglavlju izvodimo nekomutativne korekcije tenzora energije i impulsa binarnog sustava masa. U poglavlju VII određujemo jednadžbe gibanja i energiju binarnog sustava masa. Konačno, u poglavlju IX gradimo analitički predložak gravitacijskog zračenja i na temelju parametara određenih iz signala događaja GW150914 određujemo gornju granicu skale nekomutativnosti prostorvremena.

Ovaj rad zasniva se prvenstveno na članku [19] i prati analize izvedene u njemu.

II. UVOD U OPĆU TEORIJU RELATIVNOSTI (OTR)

U ovom poglavlju navest ćemo rezultate bitne za ovaj rad iz područja opće i specijalne teorije relativnosti. Ovo poglavlje dijelom prati kratki uvod u opću teoriju relativnosti izložen u članku [13] te knjigu šireg opsega [14].

* dorijan.vulic@student.pmf.hr
† andjelo.samsarov@irb.hr

A. Specijalna teorija relativnosti

Specijalna teorija relativnosti proizlazi iz eksperimentalnog rezultata da je brzina svjetlosti jednaka u svim referentnim sustavima. U tom kontekstu, fizikalne procese je lakše analizirati ako ih smjestimo u mnogostrukost poznatu kao prostorvrijeme ili prostor Minkowskog.

Odabrali smo koordinatni sustav prostorvremena $x^\mu = (ct, x, y, z) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ (općeniti vektor x^μ u prostorvremenu nazivamo 4-vektor). Put $x^\mu(\lambda)$ kroz prostorvrijeme određen je koordinatama kao kontinuiranom funkcijom nekog parametra λ. Najkorisniji takav parametar je vlastito vrijeme τ koje je definirano kao vrijeme koje mjeri promatrač sugibajuć sustavu. Definiramo 4-brzinu nekog tijela kao $u^\mu = dx^\mu(\tau)/d\tau$, a 4-impuls je $p^\mu = mu^\mu$.

U analizama koje slijede 4-vektore ćemo prikazivati u obliku x, dok ćemo prostorne 3-vektore prikazivati podebljano $\mathbf{x}$, radi lakšeg raspoznavanja. Također, indeksi opisani latinskim slovima imaju raspon od 1 do 3, dok indeksi opisani grčkim slovima imaju raspon od 0 do 3.

B. Metrika i tenzori

Općenito, mnogostrukosti su (ne nužno zakrivljeni) topološki prostori koji su neraspoznatljivi od Euklidskog prostora $\mathbb{R}^n$ u okolini bilo koje svoje točke.

Kako bi naše jednadžbe vrijedile u zakrivljenom prostorvremenu i bile koordinatno invarijantne, za prikaz fizikalnih zakona koristimo tenzore, koji su strukture konstruirane neovisno o bazi prostora. Općeniti tenzor ${S^{a_1,\ldots,a_n}}_{b_1,\ldots,b_m}$ je multilinearno (tj. linearno u svakoj varijabli) preslikavanje

$$S : V_1 \times ... \times V_n \times W_1 ... \times W_m \to \mathbb{R},$$

gdje V_i označava prostor kovarijantnih vektora u_μ, a W_i označava prostor kontarvarijantnih vektora u^μ. Broj indeksa tenzora nazivamo rang tog tenzora. Općenito, donje indekse tenzora nazivamo kovarijantnim, a gornje kontravarijantnim indeksima. Općeniti tenzor se prilikom promjene koordinata $x^\mu \to x^{\mu'}$ transformira kao

$$\begin{aligned} &{S^{a'_1,\ldots,a'_n}}_{b'_1,\ldots,b'_m} = \\ &\quad = \frac{\partial x^{a'_1}}{\partial x^{a_1}} \cdots \frac{\partial x^{a'_n}}{\partial x^{a_n}} \frac{\partial x^{b_1}}{\partial x^{b'_1}} \cdots \frac{\partial x^{b_m}}{\partial x^{b'_m}} {S^{a_1,\ldots,a_n}}_{b_1,\ldots,b_m}, \end{aligned}$$

gdje primjenjujemo Einsteinovu sumacijsku konvenciju koja nalaže da se gornji i donji indeksi označeni istim slovom sumiraju po svim mogućim koordinatama, tj. kontrahiraju. Nastavljamo prešutno koristiti tu konvenciju u ostatku rada. Tenzori su poopćenje vektora, pa se prethodna transformacija odnosi i na općeniti vektor v^μ.

Mnogostrukost može imati i dodatnu strukturu, metriku $g_{\mu\nu}$, simetrični tenzor ranga 2 koji definira udaljenosti i kutove u tom prostoru, slično kao skalarni produkt u Euklidskoj geometriji.

Za podizanje i spuštanje indeksa koristimo metriku ravnog prostorvremena $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

$$u^\mu = \eta^{\mu\nu} u_\nu, \qquad u_\mu = \eta_{\mu\nu} u^\nu$$

Tako npr. imamo kovarijantni vektor položaja $x_\mu = (-ct, x, y, z)$.

Produkt dva vektora definiramo kao kontrahiranje njihovih indeksa, pa je produkt dva općenita 4-vektora v^μ i u^μ jednak

$$v \cdot u := v^\mu u_\mu = g_{\mu\nu} v^\mu u^\nu$$

Ovaj princip se trivijalno poopći na tenzore ranga većeg od 1.

Zbog njihove invarijantnosti na bazu, želimo da jedine strukture koje koristimo za prikazivanje fizikalnih formula budu tenzori. Zato definiramo kovarijantnu derivaciju kao tenzorsko poopćenje parcijalne derivacije

$$\nabla_\nu V^\mu = \partial_\nu V^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} V^\lambda,$$

gdje je V^μ proizvoljni vektor, a $\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ su Christoffelovi simboli koji proizlaze iz metrike i direktna su posljedica zakrivljenosti prostora.

$$\Gamma^\sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}),$$

uz pokratu $\frac{\partial}{\partial x_\mu} := \partial^\mu$ za kovarijantne i $\frac{\partial}{\partial x^\mu} := \partial_\mu$ za kontravarijantne indekse.

C. Opća teorija relativnosti

Daljnja razmatranja navela su Einsteina da uvede princip ekvivalentnosti, koji nalaže da gibanje slobodnih čestica u gravitacijskom polju neke mase i jednoliko ubrzavajuće gibanje uzrokovano nekom silom nije lokalno raspoznatljivo. Taj ideja je dovela do promoviranja prostorvremena iz ravne mnogostrukosti u zakrivljenu.

Newtonovski princip da se tijela gibaju jednoliko pravocrtno dok na njih ne utječe sila je zadržan, uz generalizaciju pojma ravne linije. Ta generalizacija je geodezik – najkraći put između dvije točke u zakrivljenom prostorvremenu te put kojeg prati čestica na koju ne utječe sila.

Informacija o zakrivljenosti prostorvremena sadržana je u veličini poznatoj kao Riemannov tenzor zakrivljenosti

$$R^\sigma{}_{\mu\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\sigma_{\mu\beta} - \partial_\beta \Gamma^\sigma_{\mu\alpha} + \Gamma^\sigma_{\alpha\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \Gamma^\sigma_{\beta\lambda}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha}, \qquad (2)$$

Kao i Christoffelovi simboli, Riemannov tenzor ovisi direktno o metrici, tj. o zakrivljenosti prostorvremena. Iz te veličine možemo konstuirati dvije druge korisne veličine, Riccijev tenzor $R_{\alpha\beta} = R^\lambda{}_{\alpha\lambda\beta}$ te Riccijev skalar $R = R^\lambda_\lambda$.

Informaciju o raspodjeli energije i impulsa kao i o njihovom gibanju prostorvremenom nosi tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$. Točna definicija komponenti $T_{\mu\nu}$ je "tok μ-te komponente 4-impulsa duž ν-te koordinate".

Preostaje nam još reći nešto o samoj evoluciji zakrivljenosti prostorvremena. Jednadžba evolucije metrike poznata je kao Einsteinova jednadžba

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{3}$$

gdje je G Newtonova konstanta gravitacije. Vidimo da tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ određuje zakrivljenost prostorvremena (opisanu Riccijevim tenzorom $R\mu\nu$ i Riccijevim skalarom R), koja onda određuje kako će se masa i energija preraspodijeliti prostorvremenom.

Tenzor energije i impulsa poštuje zakone očuvanja koji se mogu prikazati kovarijantno kao

$$\nabla^{\nu}T_{\mu\nu} = 0, \tag{4}$$

što se u ravnom prostorvremenu reducira u $\partial^{\nu}T_{\mu\nu} = 0$.

III. IZVOD GRAVITACIJSKIH VALOVA U LINEARNOJ APROKSIMACIJI

Prikazujemo nastanak klasičnih gravitacijskih valova u najnižoj aproksimaciji koja ih dozvoljava. Ovo poglavlje prati analizu provedenu u knjizi [20].

A. Perturbacija metrike u linearnom redu

Opća relativnost je invarijantna na grupu svih mogućih koordinatnih transformacija $x^\mu \to x'^\mu(x)$, gdje je x'^μ glatka funkcija koordinata x^μ koja je difeomorfizam (tj. diferencijabilna, invertibilna i ima diferencijabilan inverz). Tu invarijantnost nazivamo baždarna simetrija opće relativnosti.

Da bismo izveli valnu jednadžbu čije rješenje su gravitacijski valovi, koristimo lineariziranu teoriju gdje razmatramo razvoj Einsteinove jednadžbu (3) oko ravnog prostorvremena

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \qquad |h_{\mu\nu}| \ll 1, \tag{5}$$

do linearnog reda u $h_{\mu\nu}$. Komponente općenite metrike $g_{\mu\nu}$ ovise o odabranom koordinatnom sustavu pa se ovaj uvjet svodi na pronalazak referentnog sustava u kojem prethodna jednadžba vrijedi. Tim odabirom lomimo invarijantnost opće relativnost na koordinatne transformacije, što je dobar način da se riješimo nepotrebnih stupnjeva slobode.

Međutim, ostaje nam rezidualna baždarna simetrija kao posljedica zahtjeva $|h_{\mu\nu}| \ll 1$. Promotrimo sljedeću koordinatnu transformaciju

$$x^\mu \to x'^\mu = x^\mu + \xi^\mu(x) \tag{6}$$

i njen utjecaj na metriku u najnižem redu linearizirane teorije

$$h_{\mu\nu} \to h'_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - (\partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu)$$

Dok god su članovi $|\partial_\mu \xi_\nu|$ jednakog reda veličine kao $|h_{\mu\nu}|$, naša pretpostavka da je $|h_{\mu\nu}| \ll 1$ još uvijek vrijedi. Stoga su ti sporo-varirajući difeomorfizmi simetrije linearizirane teorije.

U linearnom redu u $h_{\mu\nu}$ Riemannov tenzor ima oblik

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{1}{2}(\partial_\nu\partial_\rho h_{\mu\sigma} + \partial_\mu\partial_\sigma h_{\nu\rho} - \\ - \partial_\mu\partial_\rho h_{\nu\sigma} - \partial_\nu\partial_\sigma h_{\mu\rho}) \tag{7}$$

Linearizirane jednadžbe gibanja jednostavnije su uz sljedeće pokrate:

$$h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu} \tag{8}$$

$$\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}h \tag{9}$$

Primijetimo da je $\bar{h} = \eta^{\mu\nu}\bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$, pa vrijedi

$$h_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\bar{h}$$

Uvrstimo li to u Einsteinovu jednadžbu, dobijemo jednadžbu za evoluciju perturbacije metrike

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} + \eta_{\mu\nu}\partial^\rho\partial^\sigma\bar{h}_{\rho\sigma} - \partial^\rho\partial_\nu\bar{h}_{\mu\rho} - \partial^\rho\partial_\mu\bar{h}_{\nu\rho} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}, \tag{10}$$

gdje je $\Box := \partial^\rho\partial_\rho$ tzv. d'Alembertov operator. Koristimo slobodu koju nam daje rezidualna baždarna simetrija (6) da nametnemo Lorentzovo baždarenje

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = 0 \tag{11}$$

Da bismo vidjeli da je ovakav uvjet dozvoljen, gledamo kako se ponaša $\bar{h}_{\mu\nu}$ pri transformaciji (6):

$$\bar{h}_{\mu\nu} \to \bar{h}'_{\mu\nu} = \bar{h}_{\mu\nu} - (\partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\rho\xi^\rho) \tag{12}$$

Iz čega slijedi transformacija

$$\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} \to (\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu})' = \partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} - \partial^\nu\partial_\nu\xi_\mu \tag{13}$$

Dakle, ako je početna konfiguracija polja takva da je $\partial^\nu\bar{h}_{\mu\nu} = f_\mu(x)$, da bi nam se jednadžba evolucije maksimalno pojednostavila možemo dodatno nametnuti

$$\Box\xi_\mu = f_\mu(x) \tag{14}$$

Poznato je da ova jednadžba uvijek ima rješenje, stoga se naša jednadžba za $\bar{h}_{\mu\nu}$ pojednostavljuje na

$$\Box\bar{h}_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{15}$$

što je poznati oblik valne jednadžbe. Valovi koje opisuje ova jednadžba gibaju se brzinom c.

Fizikalno, aproksimacije linearizirane teorije mogu se sažeti na sljedeći način: tijela koja djeluju kao izvori gravitacijskih valova kreću se u ravnom prostoruvremenu, duž putanja određenih njihovim međusobnim utjecajem. Posebno, za sustav kojim dominira gravitacijska sila, poput binarnih zvijezda, činjenica da je pozadinska metrika ravnog prostorvremena znači da opisujemo dinamiku sustava koristeći Newtonovu gravitaciju umjesto potpune opće relativnosti, što može biti problematično. U narednim poglavljima predstavit ćemo formalizam koji će bolje opisivati sustave dominirane gravitacijom.

B. Transverzalno baždarenje iščezavajućeg traga

Jednažba (15) je rezultat koristan za računanje oblika gravitacijskih valova nastalih nekom raspodjelom energije i impulsa. Uz to nas zanima i propagacija tih valova te interakcija s testnim masama izvan izvora, tj. u području gdje vrijedi $T_{\mu\nu} = 0$. Transformacija (13) pokazuje da Lorentzovo baždarenje ne ubija rezidualnu simetriju do kraja jer transformirana derivacija $(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})'$ sadrži član $\Box \xi_\mu$. Koristimo to kako bismo ukinuli nepotrebne stupnjeve slobode metrike $h_{\mu\nu}$.

Lorentzovo baždarenje će vrijediti i uz još jednu transformaciju

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \zeta^\mu \tag{16}$$

Ova transformacija identična je transformaciji (6), pa se član $(\partial^\nu \bar{h}_{\mu\nu})'$ ponaša identično kao u (13) do na zamjenu $\xi^\mu \rightarrow \zeta^\mu$. Zbog konzistentnosti s (14) moramo nametnuti:

$$\Box \zeta_\mu = 0, \tag{17}$$

što sa sobom povlači da je

$$\Box \zeta_{\mu\nu} = 0, \tag{18}$$

gdje je

$$\zeta_{\mu\nu} \coloneqq \partial_\mu \zeta_\nu + \partial_\nu \zeta_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \zeta^\rho \tag{19}$$

To vrijedi jer d'Alembertian $\Box$ komutira s operatorom ∂_μ u ravnom prostorvremenu. Uvođenjem ove dodatne transformacije oblik jednadžbe (15) ostaje nepromijenjen, a dobivamo dodatnu slobodu kako bismo fiksirali određene komponente metrike.

Općenita metrika $g_{\mu\nu}$ je simetričan tenzor, pa od ukupno 16 komponenti imamo 10 nezavisnih. Specijalno, na metriku $h_{\mu\nu}$ nametnuli smo Lorentzovo baždarenje (11) koje eliminira dodatna 4 stupnja slobode, pa nam preostaje 6 nezavisnih komponenti.

Jednadžba (12) kaže nam da od tih šest nezavisnih komponenti možemo oduzeti funkcije $\zeta_{\mu\nu}$ (definirane preko ζ_μ u (19)) a da jednadžba (15) i dalje vrijedi jer $\zeta_{\mu\nu}$ zadovoljava jednadžbu (18). To znači da možemo odabrati funkcije ζ_μ kako bismo nametnuli dodatna četiri uvjeta na $h_{\mu\nu}$. Konkretno, možemo odabrati ζ_0 tako da je trag $\bar{h} = 0$. Primijetite da ako je $\bar{h} = 0$, tada je $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu}$. Preostale tri funkcije ζ_i odabiremo tako da je $h^{0i} = 0$. Sada Lorentzovo baždarenje (11) za $\mu = 0$ ima oblik

$$\partial^0 h_{00} + \partial^i h_{0i} = 0,$$

iz čega dobijemo $\partial^0 h_{00} = 0$, tj. h_{00} je vremenska konstanta. Gravitacijski valovi su po definiciji vremenski ovisni dijelovi metrike, pa bez gubitka općenitosti možemo postaviti $h_{00} = 0$.

Ukupno baždarenje koje smo postavili poštuje iduće relacije:

$$h^{0\mu} = 0, \qquad h^i{}_i = 0, \qquad \partial^j h_{ij} = 0, \tag{20}$$

gdje indeksi i, j predstavljaju prostorne komponente metrike. Ovakvo baždarenje naziva se transverzalno baždarenje iščezavajućeg traga ili TT baždarenje, a tenzor $h_{\mu\nu}$ u tom baždarenju označavamo $h^{TT}_{\mu\nu}$.

Jednadžba (15) općenito dozvoljava kao rješenja ravne valove

$$h_{\mu\nu}(x) = e_{\mu\nu}(\mathbf{k}) e^{ikx}, \tag{21}$$

gdje je $k^\mu = (\omega/c, \mathbf{k})$ i $\omega = |\mathbf{k}|\, c$. Tenzor $e_{\mu\nu}(\mathbf{k})$ naziva se tenzor polarizacije. Smjer propagacije ovakvog vala dan je s $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|$.

Za pojedinačni ravni val s određenim valnim vektorom $\mathbf{k}$, vidimo iz baždarnih uvjeta (20) da su nenul komponente tenzora h^{TT}_{ij} u ravnini okomitoj na $\hat{\mathbf{n}}$ jer se za ravni val uvjet $\partial_j h_{ij} = 0$ svodi na $n_i h_{ij} = 0$ kad uvrstimo rješenje (21).

Pretpostavimo da imamo rješenje jednadžbe (15) izvan izvora, oblika ravnog vala $h_{\mu\nu}(x)$ koji se širi u smjeru $\hat{\mathbf{n}}$, te da je rješenje već u Lorentzovom baždarenju ali još uvijek ne u TT baždarenju. Postoji procedura kojom možemo pronaći oblik vala u TT baždarenju. Prvo uvodimo tenzor

$$P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ij} - n_i n_j$$

Ovaj tenzor je simetričan i transverzalan

$$n^i P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = n^j P_{ij}(\hat{\mathbf{n}}) = 0,$$

te ima trag $P_{ii} = 2$. Pomoću toga konstruiramo tzv. Lambda tenzor

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = P_{ik} P_{jl} - \frac{1}{2} P_{ij} P_{kl} \tag{22}$$

Taj tenzor je transverzalan u svim indeksima, nema traga u odnosu na indekse (i, j) i (k, l), tj:

$$\Lambda_{ii,kl} = \Lambda_{ij,kk} = 0,$$

simetričan je na zamjenu $(i, j) \leftrightarrow (k, l)$ i poštuje relaciju

$$\Lambda_{ij,kl} \Lambda_{kl,mn} = \Lambda_{ij,mn}. \tag{23}$$

Prikazan direktno preko vektora smjera vala $\hat{\mathbf{n}}$ ima sljedeći oblik:

$$\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}}) = \delta_{ik}\delta_{jl} - \frac{1}{2}\delta_{ij}\delta_{kl} - n_j n_l \delta_{ik} - n_i n_k \delta_{jl} + \\ + \frac{1}{2}n_k n_l \delta_{ij} + \frac{1}{2}n_i n_j \delta_{kl} + \frac{1}{2}n_i n_j n_k n_l \quad (24)$$

Sada tvrdimo da ako imamo rješenje $\bar{h}_{\mu\nu}$ jednadžbe (15) u Lorentzovom baždarenju, ali ne u TT baždarenju, možemo ga transformirati u TT baždarenje na ovaj način:

$$h_{ij}^{TT} = \sum_{kl} \Lambda_{ij,kl} h_{kl} \quad (25)$$

To vrijedi jer je prema konstrukciji desna strana transverzalna i iščezavajućeg traga u indeksima (i,j), a zbog toga što je $h_{\mu\nu}$ rješenje valne jednadžbe (15) u vakuumu($T_{\mu\nu} = 0$), slijedi da je i h_{ij}^{TT} također rješenje iste jednadžbe.

IV. EINSTEINOVA KVADRUPOLNA FORMULA

Prisjetimo se da razmatramo model u kojem izvor gravitacijskih valova ima dovoljno slabo gravitacijsko polje da se prostorvrijeme oko izvora može smatrati ravnim. Sada tražimo rješenje valne jednadžbe i energiju koju sustav gubi gravitacijskim zračenje za slučaj izvora slabog gravitacijskog polja i proizvoljne brzine. Ovo poglavlje također prati analizu izvedenu u knjizi [20].

Linearizirana jednadžba gravitacijskih valova (15) uvijek ima rješenje jer je d'Alembertov operator $\Box$ invertibilan. Konačno rješenje je oblika

$$\bar{h}_{\mu\nu} = \frac{4G}{c^4}\int d^3\mathbf{x}' \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} T_{\mu\nu}\left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}, \mathbf{x}'\right) \quad (26)$$

gdje je $t_{ret} = t - |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|/c$ poznato kao retardirano vrijeme i uzima u obzir brzinu širenja gravitacijskih valova, a integral je po volumenu izvora valova.

Pretpostavimo da je prosječna dimenzija izvora d. Na udaljenosti od izvora $|\mathbf{x}| \coloneqq r \gg d$ možemo razviti

$$|\mathbf{x}-\mathbf{x}'| = r - \mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{n}} + \mathcal{O}\left(\frac{d^2}{r}\right), \quad (27)$$

gdje je $\hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{n}}$. Također možemo razviti tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}(x)$ po Fourieru

$$T_{\mu\nu}(t,\mathbf{x}) = \iint \frac{d^3\mathbf{k}\, d\omega}{(2\pi)^4}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega t + i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$$

što se, uz aproksimaciju (27), može zapisati u obliku

$$T_{\mu\nu}\left(t - \frac{r}{c} + \frac{\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{n}}}{c}, \mathbf{x}'\right) = \\ = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega(t-r/c+\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{n}}/c)+i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}'} \quad (28)$$

Uzevši to u obzir, imamo

$$\int d^3\mathbf{x}' T_{\mu\nu}(t - r/c + \mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{n}}/c, \mathbf{x}') \\ = \int d^3\mathbf{x}' \iint \frac{d\omega}{2\pi c}\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega(t-r/c)}e^{i(k-\omega\hat{\mathbf{n}}/c)\cdot\mathbf{x}'} \\ = \iint \frac{d\omega}{2\pi c}\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\mathbf{k})e^{-i\omega(t-r/c)}(2\pi)^3\delta^{(3)}(\mathbf{k}-\omega\hat{\mathbf{n}}/c) \\ = \int \frac{d\omega}{2\pi c}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\omega\hat{\mathbf{n}}/c)e^{-i\omega(t-r/c)} \quad (29)$$

Prema tome, konačan izraz za gravitacijske valove nastale nekom raspodjelom energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ je

$$\bar{h}_{\mu\nu}(x) = \frac{4G}{c^5 r}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\tilde{T}_{\mu\nu}(\omega,\omega\hat{\mathbf{n}}/c)e^{-i\omega(t-r/c)} \quad (30)$$

Općenito, Fourierove komponente tenzora energije i impulsa izvora bit će značajne oko neke karakteristične vrijednosti ω_s, pa je karakteristična brzina kolektivnog gibanja mase u izvoru $v \sim \omega_s d$. Trenutno nismo postavili pretpostavke o relativnim vrijednostima ω_s i d. Stoga je jednadžba (30) valjana kako za relativističke, tako i za nerelativističke izvore, dok god je linearizirana teorija primjenjiva i na dovoljnoj smo velikoj udaljenosti r od izvora da vrijedi aproksimacija (27).

A. Razvoj pri niskoj brzini

Ako je frekvencija kolektivnog gibanja mase u izvoru reda ω_s, onda je i frekvencija emitiranih gravitacijskih valova $\omega \sim \omega_s \sim v/d$. Prikazano preko reducirane valne duljine $\lambda = c/\omega$,

$$\lambda \sim cd/v \quad (31)$$

Za nerelativističke izvore je valna duljina gravitacijskog zračenja puno veća od karakteristične veličine sustava, tj. $\lambda \gg d$, iz čega slijedi da je $v/c \ll 1$. Kada je reducirana valna duljina znatno veća od veličine sustava, nije potrebno poznavati unutarnja kretanja izvora u svim detaljima, već samo opće karakteristike. Stoga, emitiranje zračenja opisano je najnižim multipolnim momentima.

S druge strane, tenzor energije i impulsa samo unutar izvora ne iščezava, $|\mathbf{x}'| \leq d$. Zbog toga dominantan doprinos metrici u jednadžbi (30) imaju frekvencije koje zadovoljavaju

$$\frac{\omega}{c}\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{n}} \lesssim \frac{\omega_s d}{c} \ll 1$$

Povedeni tom spoznajom, razvijamo eksponencijal u izrazu (28)

$$e^{-i\omega(t-\frac{r}{c}+\mathbf{x}'\cdot\hat{\mathbf{n}})} = \\ = e^{-i\omega(t-\frac{r}{c})}\left[1 - \frac{i\omega}{c}\mathbf{x}'^i n^i + \frac{1}{2}(\frac{-i\omega}{c})^2\mathbf{x}'^i\mathbf{x}'^j n^i n^j + ...\right], \quad (32)$$

što je ekvivalentno razvoju $T_{\mu\nu}(t,x)$ oko točke $(t-r/c,\mathbf{x}')$

$$T_{\mu\nu}\left(t-\frac{r}{c}+\frac{\mathbf{x}'\cdot\hat{n}}{c},\mathbf{x}'\right)=T_{\mu\nu}\left(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\right)+ \frac{x'^i n^i}{c}\partial_t\, T_{\mu\nu}|_{\left(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\right)}+ +\frac{x'^i x'^j n^i n^j}{2c^2}\partial_t^2\, T_{\mu\nu}|_{\left(t-\frac{r}{c},\mathbf{x}'\right)} \quad (33)$$

gdje sumiramo po indeksima i,j. Korisno je definirati moment gustoće energije i impulsa $S_{\mu,i_1...i_n}$

$$S_{kl,i_1...i_n}=\int d^3\mathbf{x}T_{kl}(t,\mathbf{x})x_{i_1}...x_{i_n}, \quad (34)$$

gdje x_{i_m} označava neku prostornu koordinatu, a indeksi k i l označajavu prostorne komponente tenzora.

Izdvojit ćemo posebno korisne momente, moment gustoće energije

$$M_{i_1,...,i_n}=\frac{1}{c^2}S_{00,i_1...i_n}=\frac{1}{c^2}\int d^3xT_{00}(t,\mathbf{x})x_{i_1}...x_{i_n}, \quad (35)$$

te moment gustoće impulsa

$$P_{l,i_1...i_n}=\frac{1}{c}S_{0l,i_1...i_n}=\frac{1}{c}\int d^3xT_{0l}(t,\mathbf{x})x_{i_1}...x_{i_n}, \quad (36)$$

gdje l označava indeks prostorne koordinate.

Ovi momenti poštuju identitete koji proizlaze iz zakona očuvanja $\partial^\nu T_{\mu\nu}=0$. Identitete navodimo bez dokaza, detaljni izvor nalazi se u knjizi [20].

$$S_{ij}=\frac{1}{2}\ddot{M}_{ij} \quad (37)$$

$$\dot{S}_{ij,k}=\frac{1}{6}\dddot{M}_{ijk}+\frac{1}{3}(\ddot{P}_{i,jk}+\ddot{P}_{j,ik}-2\ddot{P}_{k,ij}) \quad (38)$$

Uvrstimo li razvoj (33) u jednadžbu (26) uzevši u obzir aproksimaciju (27) i definicije momenata (34), rezultat je multipolni razvoj prostornih komponenti gravitacijskih valova

$$\bar{h}_{ij}(x)=\frac{4G}{c^4r}\left[S_{ij}+\frac{n^m}{c}\dot{S}_{ij,m}+\frac{n^mn^p}{2c^2}\ddot{S}_{ij,mp}+...\right]_{\rm ret}, \quad (39)$$

gdje supskript ret označava da cijelu zagradu evaluiramo pri retardiranom vremenu $t_{ret}=t-r/c$.

Iz definicje momenata vidimo da moment $S_{kl,m}$, u odnosu na S_{kl} ima dodatni faktor $x_m\sim\mathcal{O}(d)$, a vremenska derivacija donosi dodatni faktor $\mathcal{O}(\omega_s)$. Prema tome, tenzor $\dot{S}_{kl,m}$, u odnosu na S_{kl}, ima dodatni faktor reda $\mathcal{O}(\omega_s d)$ tj. $\mathcal{O}(v)$, gdje je v prosječna brzina tvari u izvoru. Analogno utvrđujemo da ta ista relacija vrijedi između bilo koja dva susjedna člana razvoja (39). Stoga, iz jednadžbe (39) zaključujemo da je n-ti član popravka reda $\mathcal{O}(v^n/c^n)$ u odnosu na član S^{kl}.

S tim saznanjem, opravdano je razmotriti jednadžbu (39) u najnižoj, kvadrupolnoj, aproksimaciji

$$\left[\bar{h}_{ij}(x)\right]_{quad}=\frac{2G}{c^4r}\ddot{M}_{ij}(t-r/c)$$

Do sada smo nametnuli samo Lorentzovo baždarenje koje ne eliminira sve simetrije sustava. Da bismo izveli daljnje zaključke moramo do kraja specificirati baždarenje. Zbog toga uvodimo TT baždarenje kako je opisano u poglavlju III B. Prethodna jednadžba sada ima oblik

$$\left[h_{ij}^{TT}(x)\right]_{quad}=\frac{2G}{c^4r}\Lambda_{ij,kl}\ddot{M}^{kl}(t-r/c) \quad (40)$$

Moment M^{kl} možemo rastaviti na dio iščezavajućeg traga i skalarni dio

$$M^{kl}=\left(M^{kl}-\frac{1}{3}\delta^{kl}M_{ii}\right)+\frac{1}{3}\delta^{kl}M_{ii}$$

Skalarni dio daje 0 kada se reducira sa Lambda tenzorom $\Lambda_{ij,kl}$, a od preostalog dijela definiramo kvadrupolni moment

$$\begin{aligned}Q^{ij}&:=M^{ij}-\frac{1}{3}\delta^{ij}M_{kk}\\&=\int d^3x\rho(t,x)(x^ix^j-\frac{1}{3}r^2\delta^{ij}),\end{aligned} \quad (41)$$

gdje je

$$\rho=\frac{1}{c^2}T^{00}$$

definirana kao gustoća mase točnosti reda v/c. Ovakav izraz za gustoću mase iz člana T^{00} ,uz masu mirovanja, ima doprinose kinetičke i potencijalne energije. Međutim, gravitacija nije sila nego manifestacija zakrivljenosti prostorvremena, pa prethodna jednadžba ne sadrži doprinose gravitacijske potencijalne energije. Te doprinose uzimamo u obzir preko poopćene definicije gustoće mase

$$\sigma(x,t)=\frac{1}{c^2}(T^{00}+T^{ii}), \quad (42)$$

gdje sumiramo po prostornom indeksu i. Za više detalja referirajte se na [20].

U svakom slučaju, jednadžba (40) sada je oblika

$$\begin{aligned}\left[h_{ij}^{TT}(t,x)\right]_{quad}&=\frac{2G}{c^4r}\Lambda_{ij,kl}(\hat{n})\ddot{Q}_{kl}(t-r/c)\\&=\frac{1}{r}\frac{2G}{c^4}\ddot{Q}_{ij}^{TT}(t-r/c)\end{aligned} \quad (43)$$

B. Energija kvadrupolnog zračenja

Snagu kvadrupolnog zračenja po jedinici kuta uzimamo bez dokaza iz [20]

$$\begin{aligned}\left(\frac{dP}{d\Omega}\right)_{quad}&=\frac{r^2c^3}{32\pi G}\left\langle \dot{h}_{ij}^{TT}\dot{h}_{ij}^{TT}\right\rangle\\&=\frac{G}{8\pi c^5}\Lambda_{ij,kl}(\hat{\mathbf{n}})\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{kl}\right\rangle,\end{aligned} \quad (44)$$

gdje smo u drugom redu iskoristili izraz (44) za h_{ij}^{TT} i svojstvo Lambda tenzora (23). Prosjek smatramo vremenskim prosjekom preko karakterističnog perioda gravitacijskog vala. Kutna ovisnost nalazi se samo u Lambda tenzoru, pa možemo integrirati

$$\int d\Omega \Lambda_{ij,kl} = \frac{2\pi}{15}(11\delta_{ik}\delta_{jl} - 4\delta_{ij}\delta_{kl} - \delta_{il}\delta_{jk})$$

Stoga je konačan rezultat za snagu gravitacijskog zračenja u kvradrupolnoj aproksimaciji

$$P_{quad} = \frac{G}{5c^5}\left\langle \dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}\right\rangle \tag{45}$$

Prethodni rezultat poznat je kao Einsteinova kvadrupolna formula.

V. POST-NEWTONOVSKI(PN) RAZVOJ

U prethodnom razmatranju pretpostavili smo da izvori gravitacijskih valova zanemarivo utječu na prostorvrijeme oko sebe, tj. da je prostorvrijeme oko njih ravno. Zatim smo izračunali oblik gravitacijskih valova kao razvoj u parametru v/c, gdje je v karakteristična brzina sustava. Ovaj pristup pretpostavlja da je metrika prostorvremena može ostati ravna bez obzira na v, što vrijedi samo za sustave čije gibanje ne određuju gravitacijske sile.

Nas zanimaju sustavi koji interagiraju gravitacijski, kod kojih prethodna pretpostavka ne vrijedi. Naime, kod sustava ukupne mase m kojima dominira gravitacijska sila vrijedi $(v/c)^2 \sim R_s/d$ gdje je $R_s = 2Gm/c^2$ Schwarzchildov radijus mase m, a d dimenzija sustava. Da bismo opisali ovakve sustave potreban nam je post-Newtonovski formalizam.

A. Sporo-gibajući, slabo gravitirajući sustavi

Promatramo sustave u kojima su parametri R_s/d i v/c dovoljno mali da ih možemo koristiti kao parametre razvoja. Prije toga, korisno je definirati razliku između bliske zone i daleke zone sustava. Vidjeli smo (31) da je tipična valna duljina emitiranog zračenja λ veća od tipične skale sustava d za faktor c/v, tako da vrijedi $d \ll \lambda$. Definiramo blisku zonu sustava kao područje gdje vrijedi $d < r \ll \lambda$, dok je daleka zona za $r \gg \lambda$.

Naš zadatak je odrediti korekcije jednadžbi gibanja do zadovoljavajuće točnosti u parametru v/c koristeći PN razvoj. Nakon što dobijemo jednadžbe gibanja možemo odrediti oblik gravitacijskih valova koristeći multipolni razvoj prikazan u prethodnim poglavljima. Međutim, popravke višeg reda ukazuju na to da gravitacijski valovi interagiraju sa svojim izvorom, što čini taj proces puno težim. Pretpostavimo da se zadržavamo na redu korekcije za koji je utjecaj gravitacijskih valova na izvor zanemariv.

Uvodimo parametar ϵ za koji vrijedi

$$\epsilon \sim (R_s/d)^{1/2} \sim v/c$$

Zatim razvijamo metriku i tenzor energije i stresa po potencijama parametra ϵ. Prema članku [18], metriku u bliskoj zoni sustava možemo u najnižem redu post-Newtonovskog popravka prikazati preko retardiranog potencijala $V(t, \mathbf{x})$ kao

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2}{c^2}V + \mathcal{O}(\epsilon^4) \\ g_{0i} &= \mathcal{O}(\epsilon^3) \\ g_{ij} &= \delta_{ij}\left(1 + \frac{2}{c^2}V\right) + \mathcal{O}(\epsilon^4) \end{aligned} \tag{46}$$

Retardirani potencijal ovisi o distribuciji mase $\sigma(t, \mathbf{x})$ unutar izvora, te ima oblik

$$V(t,\mathbf{x}) \coloneqq G\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\partial}{c\partial t}\right)^k \int d^3\mathbf{x}' \left|\mathbf{x}-\mathbf{x}'\right|^{k-1}\sigma(\mathbf{x}',t) \tag{47}$$

Iako ovo poglavlje opisno prikazuje post-Newtonovski razvoj, prethodna dva rezultata navodimo eksplicitno jer ćemo ih koristiti kasnije.

Koristeći simetrije tenzora energije i impulsa te brzine na vremensku inverziju, možemo odrediti njegov generalni razvoj

$$\begin{aligned} T_{00} &= T_{00}^{(0)} + T_{00}^{(2)} + ... \\ T_{0i} &= T_{0i}^{(1)} + T_{0i}^{(3)} + ... \\ T_{ij} &= T_{ij}^{(2)} + T_{ij}^{(4)} + ..., \end{aligned}$$

gdje (n) označava potenciju parametra razvoja ϵ, tj. red razvoja. Izvan ovog uvoda ćemo red ϵ^{2n} post-Newtonovskog razvoja nazivati red nPN.

Prethodne izraze uvrštavamo u Einsteinovu jednadžbu i izjednačavamo članove jednakog reda u ϵ. Budući da se izvor po pretpostavci giba nerelativističkom brzinom v, vremenske derivacije su manje od prostornih za faktor $\mathcal{O}(v)$ tj. $\mathcal{O}(\epsilon)$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \mathcal{O}(\epsilon)\frac{\partial}{\partial x^i}$$

Na primjer, d'Alembertov operator u prvom redu postaje Laplaceov operator:

$$-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \nabla^2 = [1 + \mathcal{O}(\epsilon^2)]\nabla^2$$

U blizini izvora efekt retardacije vremena je malen, zbog čega neka veličina $F(t - r/c)$ koja je funkcija retardiranog vremena dozvoljava razvoj

$$F(t - r/c) = F(t) - \frac{r}{c}\dot{F}(t) + \frac{r^2}{2c^2}\ddot{F}(t) + ...$$

Svaka derivacija F nosi faktor ω, tipičnu frekvenciju. Zbog toga što je $\omega/c = 1/\lambda$, vidimo da prethodna je jednadžba zapravo razvoj u potencijama r/λ. Zbog toga je PN razvoj dozvoljen samo u bliskoj zoni, $r \ll \lambda$, gdje je parametar razvoja malen.

Treba imati na umu da nas prethodna diskusija ne sprječava u pronalasku dobrih aproksimacija za gravitacijske valove nastale gibanjem izvora. Naime, dok god tražimo popravke na samo gibanje izvora PN formalizmom, slobodni smo tražiti gravitacijske valove nastale tim gibanjem nekom drugom metodom koja je točnija u području gdje te valove detektiramo.

Želimo li pronaći oblik gravitacijskih valova daleko od izvora gdje je utjecaj retardacije potencijala značajan koristimo post-Minkowski razvoj, koji razvija jednadžbu evolucije metrike po potencijama gravitacijske konstante G. Rezultat toga je multipolni razvoj gravitacijskih valova $h_{\mu\nu}$ tj. radijativni multipolni razvoj. Više o tome možete pronaći u [20].

VI. NEKOMUTATIVNA GRAVITACIJA

Postoji mnoštvo modela nekomutativne teorije gravitacije, dobar pregled značajnih referenci nalazi se u uvodu članka [19]. Međutim, nekomutativnost u svim tim formulacijama pojavljuje se samo u drugom redu u nekomutativnoj skali danoj tenzorom $\theta^{\mu\nu}$, pa očekujemo da bi ograničenja na samu gravitaciju bila nedovoljno restriktivna [12]. Dakle, Einsteinovu jednadžbu (3) koristimo u klasičnoj formi, bez nekomutativnih popravaka.

Zbog toga razmatramo učinak nekomutativnosti na gravitacijske valove putem nekomutativnih ispravaka klasičnog izvora materije i zanemarujemo nekomutativne ispravke same gravitacije.

Slijedimo post-Newtonovski (PN) formalizam, koji omogućava analitički izračun jednadžbi gibanja binarnog sustava u redu popravka 3.5PN iz kojih dalje računamo oblik nastalih gravitacijskih valova. Nije potrebno ići do reda 3.5PN jer se prve nekomutativne popravke pojavljuju već u redu 2PN, pa ćemo sve popravke višeg reda zanemariti. Ostatak ovog rada prati analizu izvedenu u članku [19].

A. Nekomutativne korekcije tenzora energije i impulsa

Pretpostavimo da imamo binarni sustav dvaju masa m_1 i m_2 koje se nalaze na položajima $\mathbf{y}_1(t)$ i $\mathbf{y}_2(t)$, respektivno. U općoj teoriji relativnosti, binarni sustav masa koje orbitiraju jedna oko druge opisan je tenzorom energije i impulsa oblika

$$T^{\mu\nu}_{GR}(x) = m_1\gamma_1(t)v_1^\mu(t)v_1^\nu(t)\delta^3(\mathbf{x}-\mathbf{y}_1(t)))+1\leftrightarrow 2 \quad (48)$$

Faktor γ_1 u OTR prikazan je preko metrike $g_{\mu\nu}$ zakrivljenog prostorvremena kao

$$\gamma_1 = \frac{1}{\sqrt{|g(\mathbf{y}_1(t))|\, g_{\alpha\beta}(\mathbf{y}_1(t))\frac{v_1^\alpha v_1^\beta}{c^2}}}$$

Međutim, aproksimacija točkaste mase implicira da su determinanta metrike $|g(\mathbf{y}_1(t)|$ i sama metrika $g_{\alpha\beta}(\mathbf{y}_1(t))$ divergentni na položaju čestice 2 zbog delta funkcija u jednadžbi (48). Ovaj problem može se riješiti putem takozvane Hadamardove regularizacije čija je primjena na PN formalizam opisana u [7]. Za razumijevanje ovog rada dovoljno je znati da je Hadamardova regularizacija metoda određivanja konačne vrijednosti divergentnih veličina. Napominjemo da ovakav izraz za tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ vrijedi samo do reda popravke 2.5PN.

Kako bismo izračunali nekomutativne popravke tenzora energije i impulsa, slijedimo formalizam efektivne teorije polja. U kratkim crtama prikazujemo analizu provedenu u članku [18].

U ovom pristupu, Schwarzschildove crne rupe generirane su masivnim realnim skalarnim poljem ϕ. Da bismo izgradili kvantnu teoriju polja u nekomutativnom prostorvremenu, moguće je raditi s uobičajenim komutirajućim koordinatama x^μ umjesto operatora $\hat{x}^\mu$ ako zamijenimo produkt dvaju funkcija prostorvremena Moyalovim produktom koji je definiran na sljedeći način:

$$f(x)\star g(x) = f(x)g(x)+ \\ +\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n\frac{1}{n!}\theta^{\alpha_1\beta_1}...\theta^{\alpha_n\beta_n}\partial_{\alpha_1}...\partial_{\alpha_n}f(x)\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_n}g(x)$$

Nekomutativni tenzor enegije i impulsa za realno skalarno polje ϕ poprima oblik

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu}_{NC} &= \frac{1}{2}(\partial^\mu\phi\star\partial^\nu\phi+\partial^\nu\phi\star\partial^\mu\phi)- \\ &\quad -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\rho\phi\star\partial^\rho\phi-m^2\phi\star\phi)= \\ &= \partial^\mu\phi\partial^\nu\phi-\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}(\partial_\rho\phi\partial^\rho\phi-m^2\phi^2)- \\ &\quad -\frac{1}{8}\theta^{\alpha_1\beta_1}\theta^{\alpha_2\beta_2}(\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial^\mu\phi\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\partial^\nu\phi- \\ &\quad -\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\partial_\rho\phi\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\partial^\rho\phi+ \\ &\quad +\frac{1}{2}\eta^{\mu\nu}m^2\partial_{\alpha_1}\partial_{\alpha_2}\phi\partial_{\beta_1}\partial_{\beta_2}\phi)+... \end{aligned}$$

gdje smo se zadržali na najnižem nekomutativnom članu. Bitno je naglasiti da prva dva člana odgovaraju običnom tenzoru energije i impulsa masivnog skalarnog polja.

Zatim ovo polje kvantiziramo u ravnom prostorvremenu

$$\hat{\theta}(x) = \int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\sqrt{2\omega_\mathbf{k}}}[\hat{a}(\mathbf{k})e^{-ikx}+\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})e^{ikx}],$$

gdje su $\hat{a}(\mathbf{k})$ i $\hat{a}^\dagger(\mathbf{k})$ operatori dizanja i spuštanja koji poštuju relacije

$$[\hat{a}(\mathbf{k}),\hat{a}^\dagger(\mathbf{k}')] = (2\pi)^3\delta^3(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \\ \hat{a}(\mathbf{k})\,|0\rangle = 0, \qquad \hat{a}^\dagger(\mathbf{k})\,|0\rangle = |\mathbf{k}\rangle$$

Ova kvantizacija promovira prethodni izraz za tenzor energije i impulsa u operator. Očekivana vrijednost tog operatora određuje komponente tenzora energije i impulsa točkaste čestice mase m i impulsa $P^\mu = \gamma_L m v^\mu$ na položaju $\mathbf{y}(t)$:

$$T^{\mu\nu}_{NC,P} = \Bigg[m\gamma_L v^\mu v^\nu + \frac{m^3\gamma_L^3 G^2}{8c^4} v^\mu v^\nu \Theta^{kl}\partial_k\partial_l + (\eta^{\mu m}\eta^{\nu n}\partial_m\partial_n - \eta^{\mu\nu}\partial_i\partial^i)\left(\frac{\hbar^2}{4m\gamma_L} + \frac{m\gamma_L\hbar^2 G^2}{32c^4}\Theta^{kl}\partial_k\partial_l\right)\Bigg] \cdot \delta^3(x - y(t)),$$

gdje je $\eta^{\mu\nu}$ metrika ravnog prostorvremena i gdje smo uveli pokratu

$$\Theta^{kl} := \frac{\theta^{0k}\theta^{0l}}{l_P^2 t_P^2} + 2\frac{v_p}{c}\frac{\theta^{0k}\theta^{pl}}{l_P^3 t_P} + \frac{v_p v_q}{c^2}\frac{\theta^{kp}\theta^{lq}}{l_P^4}$$

U izrazu za tenzor energije i impulsa zadnji član je proporcionalan kvadratu reducirane Planckove konstante $\hbar^2$, što je zanemarivo u odnosu na prva dva člana jer razmatramo astrofizičke objekte mase $m \gtrsim M_\odot$, gdje je $M_\odot$ masa Sunca. Također izostavljamo članove pokrate proporcionalne $1/c$ te $1/c^2$ jer se u tenzoru energije i impulsa pojavljuju u popravkama reda 2.5PN i 3PN respektivno. Istom argumentacijom pojednostavljujemo Lorentzov faktor $\gamma_L = 1 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$.

Konačan oblik tenzora energije i impulsa je

$$T^{\mu\nu} = m_1\gamma_1 v_1^\mu v_1^\nu \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)) + \frac{m_1^3 G^2\Lambda^2}{8c^4} v_1^\mu v_1^\nu \theta^k\theta^l\partial_k\partial_l\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t)) + 1 \leftrightarrow 2 \quad (49)$$

uz pokratu

$$\Lambda\theta^i := \frac{\theta^{0i}}{l_P t_P}, \quad (50)$$

gdje θ^i predstavlja komponentu trodimenzionalnog jediničnog vektora θ proporcionalnog prostornim komponentama tenzora θ^{0i}. Izraz je skaliran Planckovom duljinom $l_P = 1.616 \cdot 10^{-35} m$ i Planckovim vremenom $t_P = 5.391 \cdot 10^{-44} s$ jer očekujemo male vrijednosti komponenti tenzora θ. Ovako definirana veličina Λ predstavlja vremensku komponentu skale nekomutativnosti u odnosu na Planckovu skalu.

VII. JEDNADŽBE GIBANJA BINARNOG SUSTAVA REDA 2PN

Kako bismo zaključili valni oblik gravitacijskih valova koje proizvodi binarni sustav, potrebne su nam jednadžbe gibanja za oba tijela. Budući da zanemarujemo nekomutativne ispravke Einsteinove jednadžbe (3), možemo koristiti kovarijantno očuvanje tenzora enegije i impulsa (4):

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0 \implies \frac{1}{2}\sqrt{-g} = \partial_\lambda g_{\mu\nu} T^{\mu\nu} \quad (51)$$

Uvrštavajući izraz (49) za T, dobijemo rezultat koji se može prikazati u obliku jednadžbe

$$\frac{dP_1}{dt} = F_1, \quad (52)$$

gdje je P_1 gustoća impulsa, a F_1 gustoća sile čestice 1

$$P_1^i = \gamma_1 (g_{i\mu})_1 v_1^\mu + \frac{m_1^2 G^2}{8c^4}\Lambda^2\theta^k\theta^l(\partial_k\partial_l g_{i\mu})_1 v_1^\mu$$

$$F_1^i = \frac{1}{2}\gamma_1(\partial_i g_{\mu\nu})_1 v_1^\mu v_1^\nu + \frac{m_1^2 G^2}{16c^4}\Lambda^2\theta^k\theta^l(\partial_k\partial_l\partial_i g_{\mu\nu})_1 v_1^\mu v_1^\nu$$

gdje i označava prostorne koordinate, a $(...)_1$ označava da se izraz unutar zagrade evaluira na položaju $\mathbf{y}_1(t)$, tj. položaju čestice 1. Identične relacije vrijede za česticu 2.

Prethodne jednadžbe opisuju gibanje dviju točkastih masa prostorom opisanim metrikom $g_{\mu\nu}(x)$, čiji su izvor upravo te čestice. Općeniti oblik ove metrike u prvoj aproksimaciji dan je jednadžbom (46), a da bismo ga dobili moramo poznavati retardirani potencijal (47) te distribuciju mase u sustavu (42). Koristeći izraz za tenzor energije i impulsa $T_{\mu\nu}$ u našem slučaju imamo, do najnižeg nekomutativnog reda, distribuciju mase oblika

$$\sigma(\mathbf{x}, t) = m_1\gamma_1\left(1 + \frac{v_1^2}{c^2}\right)\delta^3(x - y(t)) + \frac{m_1^3 G^2\Lambda^2}{8c^4}\theta^k\theta^l\partial_k\partial_l\delta^3(x - y(t)) + 1 \leftrightarrow 2$$

Za najmanji nekomutativni doprinos uvrstimo drugi član izraza za σ u definiciju retardiranog potencijala $V(\mathbf{x}, t)$ iz čega dobijemo rezultat reda 2PN

$$V(x,t)^{2PN} = V_{GR}^{2PN}(x,t) + \frac{3m_1^2 G^3\Lambda^2}{8c^4 r_1^3}\theta^k\theta^l\hat{n}_{1kl} + 1 \leftrightarrow 2 \quad (53)$$

gdje je V_{GR}^{2PN} izraz za retardirani potencijal V poznat iz opće teorije relativnosti do reda 2PN u post-Newtonovskoj aproksimaciji. Uz to smo uveli pokrate $r_1 = |\mathbf{x} - \mathbf{y}_1|$, $\mathbf{n}_1 = (\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)/r_1$ te simetričnu veličinu iščezavajućeg traga, $\hat{n}_{1kl} = n_{1k}n_{1l} - \delta_{kl}/3$. Konačni rezultat za i-te komponente linearne gustoće impulsa P_1 i gustoće sile F_1 je

$$(P_1^{2PN})^i = v_1 + \frac{1}{c^2}(P_1^{1PN})^i + \frac{1}{c^4}(P_1^{2PN})^i \quad (54)$$

$$(F_1^{2PN})^i = (\partial_i V)_1 + \frac{1}{c^2}(F_1^{1PN})^i + \frac{1}{c^4}(F_1^{2PN})^i + \frac{m_1^2 G^2\Lambda^2}{8c^4}\theta^k\theta^l(\partial_k\partial_l\partial_i V)_1 \quad (55)$$

Analogne relacije vrijede za česticu 2. Članovi P^{xPN} i F^{xPN} predstavljaju komplicirane izraze povezane s retardiranim potencijalom V i nekim retardiranim potencijalima višeg reda (jednadžbe (146), (147) i (152) u [6]).

U svakom slučaju, ne pripadaju prvom redu nekomutativnog računa jer se u konačnom izrazu pojavljuju u redu višem od 2PN pa ih zanemarujemo. Dakle, samo F ima nekomutativne popravke reda 2PN. Na prvom takvom, $(\partial_i V)_1$, uvrštavamo za V nekomutativni dio izraza (53)

$$(\partial_i V_{NC})_1 = \left(-\frac{15m_1^3G^3\Lambda^2}{8c^4r_1^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{1ikl} + 1 \leftrightarrow 2\right)_1 = \\ = -\frac{15m_2^3G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl}$$

gdje koristimo $r = |\mathbf{y}_1 - y_2|$, $\mathbf{n} = (\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_2)/r$ i $\hat{n}_{ikl} = n_in_kn_l - \frac{1}{5}(n_i\delta_{lk} + n_k\delta_{il}n_l\delta_{ik})$. U drugoj jednakosti smo koristili Hadamardovu regularizaciju divergencije jer je prvi član u zagradi divergentan kad se evaluira na poziciji čestice 1 jer je $r_1(\mathbf{y}_1(t)) = 0$.

Druga 2PN korekcija dolazi od četvrtog člana jednadžbe (55). U tom članu, za red razvoja koji nam je potreban, dovoljno je zamijenit retardirani potencijal V njegovom njutnovskom vrijednosti $V = Gm_1/r_1 + Gm_2/r_2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^2}\right)$. Nakon regularizacije dolazimo do izraza

$$\frac{m_1^2G^2\Lambda^2}{8c^4}\theta^k\theta^l(\partial_k\partial_l\partial_i V)_1 = -\frac{15m_1^2m_2G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl}$$

Ukupni nekomutativni dio 2PN korekcija gustoće sile F_1 je

$$(F_1^i)_{NC}^{2PN} = -\frac{15m_2(m_1^2 + m_2^2)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl}$$

uz analogan rezultat za tijelo 2. Konačno imamo sve sastojke za konstrukciju jednažbe gibanja sustava. Jedina nekomutativna popravka na akceleraciju $(a_1^i)_{GR}^{2PN}$ dobivenu iz opće teorije relativnosti post-Newtonovskom aproksimacijom do reda 2PN dana je prethodnom jednadžbom, tj.

$$(a_1^{2PN})_i = (a_{1,GR}^{2PN})_i - \frac{15m_2(m_1^2 + m_2^2)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl} \tag{56}$$

A. Relativno gibanje masa

Kako bismo opisali relativno gibanje dviju točkastih masa, uvodimo relativnu brzinu $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ i relativnu akceleraciju $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Također uvodimo nekoliko korisnih veličina

$$M = m_1 + m_2$$
$$\mu = \frac{m_1m_2}{M}$$
$$\nu = \frac{m_1m_2}{M^2},$$

koje nazivamo ukupna masa, reducirana masa i simetrični omjer masa, respektivno. Sada je izraz za akceleraciju (56) oblika

$$(a^{2PN})_i = (a_{GR}^{2PN})_i - \frac{15M^3(1-2\nu)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl} \tag{57}$$

Poznato je [4] da se 2PN jednadžbe gibanja binarnog sustava mogu izvesti iz generaliziranog lagranžijana $L_{GR}^{2PN}[\mathbf{y}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{a}(t)]$. Ovaj lagranžijan je invarijantan na Poincareovu grupu i ima 10 Noetherinih očuvanih veličina, uključujući i energiju. Moguće je generalizirati ovaj lagranžijan tako da uzme u obzir i 2PN nekomutativne korekcije

$$L^{2PN} = L_{GR}^{2PN} + \frac{3M^3\mu(1-2\nu)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl}$$

koji reproducira jednažbe gibanja sustava koje smo dobili. Bitno je napomenuti da nekomutativni dio ovog lagranžijana nije Lorentz invarijantan, no svejedno poštuje očuvanje energije.

$$E^{2PN} = E_{GR}^{2PN} - \frac{3M^3\mu(1-2\nu)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}\theta^k\theta^l\hat{n}_{ikl} \tag{58}$$

Naime, direktan račun pokazuje da je $dE/dt = \mathcal{O}\left(1/c^5\right)$

Radi boljeg shvaćanja nekomutativnih članova, predstavljamo sljedeće identitete

$$\theta^k\theta^l\hat{\mathbf{n}}_{ikl} = n_i(\mathbf{n}\cdot\theta)^2 - \frac{1}{5}n_i - \frac{2}{5}\theta_i(\mathbf{n}\cdot\theta) \tag{59}$$

$$\theta^k\theta^l\hat{\mathbf{n}}_{kl} = (\mathbf{n}\cdot\theta)^2 - \frac{1}{3} \tag{60}$$

ovom obliku možemo primijetiti da konstantni vektor θ djeluje kao preferirani smjer. Konkretno, očekujemo precesiju orbitalne ravnine dviju točkastih masa zbog člana $\theta_i(\mathbf{n}\cdot\theta)$. S druge strane, gibanje se drastično pojednostavljuje ako je orbitalna ravnina okomita na taj preferirani smjer jer svi članovi $\mathbf{n}\cdot\theta$ nestaju. Možemo se ograničiti na taj poseban slučaj jer tražimo samo ograničenje parametra Λ.

Naravno, nema razloga da binarni sustav koji je proizveo signal GW150914 zadovoljava ovu pretpostavku. Međutim, važno je primijetiti da ne postoje orbitalne konfiguracije za koje su prethodne kutne ovisnosti konstantno nula, jer je θ prema definiciji vektor neovisan o vremenu, a $\mathbf{n}$ varira s vremenom. Drugim riječima, doprinosi $-\frac{1}{5}n_i$ u ubrzanju i $-\frac{1}{3}$ u energiji ne mogu se potpuno poništiti, već će ih samo modulirati uvjeti ovisni o kutu . Očekujemo da će nekomutativne ispravke valovima gravitacije biti otprilike istog reda veličine sa tim članovima i bez njih. Stoga ćemo koristiti sljedeće izraze za relativno ubrzanje i energiju binarnog sustava

$$a_i^{2PN} = (a_i)_{GR}^{2PN} + \frac{3M^3(1-2\nu)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4}n_i \tag{61}$$

$$E^{2PN} = E_{GR}^{2PN} + \frac{M^3\mu(1-2\nu)G^3\Lambda^2}{8c^4r^4} \tag{62}$$

B. Kvazi-kružne orbite

Prethodne jednadžbe dodatno se pojednostavljuju ako pretpostavimo da su dva objekta u kvazi-kružnoj orbiti. Ova pretpostavka je dobro opravdana jer je pokazano u općoj relativnosti da se ekscentrične orbite binarnih sustava postepeno pretvaraju u kružne zbog emisije gravitacijskih valova [21].

Ovaj rezultat posljedica je Einsteinove kvadrupolne formule, koja opisuje zračenje gravitacijskih valova u najnižem redu PN ekspanzije. Nekomutativne ispravke formuli zračenja pojavljuju se na 2PN redu, što znači da su podređene u usporedbi s učinkom zaokruženja orbite. Stoga, čak i u nekomutativnom prostorvremenu, očekujemo promatranje binarnih sustava sa zanemarivim ekscentricitetom.

S ovim aproksimacijama možemo pretpostaviti da je udaljenost r konstantna, do na utjecaj postupnog spiralnog približavanja koje će na kraju uzrokovati spajanje ova dva tijela. Budući da se ovaj učinak pojavljuje u korekciji reda 2.5PN u jednadžbama gibanja [9], vrijedi $\dot{r} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right)$. Uzevši ovo u obzir, izraz za akceleraciju slučaja binarnog sustava kružne orbite je

$$\mathbf{a}^{2PN}_{\text{kr.orb.}} = -\Omega^2 \mathbf{y}, \tag{63}$$

gdje je kružna frekvencija Ω dana izrazom

$$(\Omega^{2PN})^2 = \frac{GM}{r^3}\Bigg[1 + (\nu-3)\gamma + \\ + \left(6 + \frac{41}{4}\nu + \nu^2 - \frac{3}{8}(1-2\nu)\Lambda^2\right)\gamma^2\Bigg] \tag{64}$$

uz parametar $\gamma = \frac{GM}{c^2 r}$. Bitno je naglasiti da samo član uz parametar Λ^2 dolazi od našeg dosadašnjeg razmatranja nekomutativnih popravki.

Norma relativne brzine v može se zapisati u obliku $v^2 = r^2\Omega^2 + \mathcal{O}\left(1/c^{10}\right)$. Ovaj rezultat upućuje na to da kinetička energija sustava nosi nekomutativne popravke reda 2PN, uz već očitu popravku danu jednadžbom (62). Konačan izraz za energiju kružnog gibanja je

$$E^{2PN}_{\text{kr.orb.}} = -\frac{\mu c^2 \gamma}{2}\Bigg[1 + \left(-\frac{7}{4} + \frac{1}{4}\nu\right)\gamma + \\ + \left(-\frac{7}{8} + \frac{49}{8}\nu + \frac{1}{8}\nu^2 + \frac{1}{8}(1-2\nu)\Lambda^2\right)\gamma^2\Bigg] \tag{65}$$

Zbog jednostavnije obrade podataka zapisujemo energiju koristeći frekvencijski parametar

$$x = \left(\frac{GM\Omega}{c^3}\right)^{2/3} \tag{66}$$

Prikažemo li parametar γ preko parametra x imamo sljedeći zapis energije sustava:

$$E^{2PN}_{\text{kr.orb.}} = -\frac{\mu c^2 x}{2}\Bigg[1 + \left(-\frac{3}{4} - \frac{1}{12}\nu\right)x + \\ + \left(-\frac{27}{8} + \frac{19}{8}\nu - \frac{1}{24}\nu^2 + \frac{1}{4}(1-2\nu)\Lambda^2\right)x^2\Bigg] \tag{67}$$

VIII. GUBITAK ENERGIJE BINARNOG SUSTAVA

Sada tražimo najniži red nekomutativne popravke na energiju izgubljenu gravitacijskim zračenjem binarnog sustava. To zračenje je uzrok postupnog približavanja točkastih masa. Metoda koju ćemo koristiti je izjednačavanje izgubljene energije s tokom gravitacijskog zračenja $\mathcal{F}$ kakvog vidi opažač daleko od izvora.

$$\frac{dE}{dt} = -\mathcal{F} \tag{68}$$

Izraz za $\mathcal{F}$ poznat je do 3.5PN reda u općoj relativnosti i na najnižem redu odgovara poznatoj Einsteinovoj kvadrupolnoj formuli kakvu smo izveli u poglavlju IV B. Općenito rješenje za tok gravitacijskog zračenja $\mathcal{F}$ proizvoljnog sustava rezultat je primjene post-Newtonovskog razvoja u blizini izvora te post-Minkowski razvoja daleko od izvora gravitacijskih valova. Dobrom strategijom spajanja bliske i daleke zone sustava dobijemo traženi rezultat koji ima oblik

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\text{tr}} + \mathcal{F}_{\text{rez}}$$

gdje je $\mathcal{F}_{\text{tr}}$ tzv. trenutni tok, tj. tok kojeg proizvode isključivo maseni multipolni momenti izvora, dok je $\mathcal{F}_{\text{rez}}$ rezidualni tok uzrokovan nelinearnim interakcijama masenih multipolnih momenata izvora i radijativnih momenata. Rezidualni tok je reda 1.5PN, pa se u nekomutativnim korekcijama pojavljuje reda većeg od 2PN, stoga ga zanemarujemo te se koncentriramo na trenutni tok.

Izraz za trenutni tok u redu 2.5PN jednak je kvadrupolnoj snazi zračenja koju smo prethodno izveli

$$\mathcal{F}^{2PN}_{tr} = \frac{G}{5c^5}\dddot{Q}_{ij}\dddot{Q}_{ij}$$

gdje u izraz za maseni kvadrupolni moment (41) uvrštavamo poopćeni izraz distribucije mase $\sigma(x,t)$.

$$Q_{ij} = \int d^3\mathbf{x}\sigma(\mathbf{x},t)(x_i x_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}\mathbf{x}^2)$$

Za detaljnju motivaciju i raspis pogledajte članak [5] te knjigu [20]. Bitno je naglasiti da nekomutativne popravke trenutnog toka $\mathcal{F}_{tr}$ dolaze samo iz nekomutativnih popravki distribucije mase $\sigma(\mathbf{x},t)$, bez kojih bi se prethodne formule svele na Einsteinovu kvadrupolnu formulu (45). Možemo primijetiti da nekomutativni dio $\sigma_{NC}(\mathbf{x},t)$ ne ovisi o vremenu, stoga će nekomutativne popravke masenog kvadrupolnog momenta iščezavati u vremenskoj derivaciji

$$\dot{Q}^{NC}_{ij} = 0$$

Stoga jedina nekomutativna popravka reda 2PN dolazi iz Newtonovskog dijela Q_{ij}. Forma tog člana za naš binarni sustav je

$$Q_{ij} = \mu\left(y_i y_j - \frac{1}{3}\delta_{ij} r^2\right)$$

Uzimamo u obzir aproksimaciju da se udaljenost između tijela sporo mijenja, $\dot{r} = \mathcal{O}\left(1/c^5\right)$, a treća vremenska derivacija prvog člana je

$$\frac{d^3 y_i y_j}{dt^3} = \dot{a}_i x_j + 3a_i v_j + (i \leftrightarrow j)$$

Kada u prethodni izraz uvrstimo nekomutativni dio akceleracije i njegovu vremensku derivaciju dobijemo konačan oblik

$$\dddot{Q}_{ij}^{NC} = \frac{3\mu M^3(1-2\nu)G^3\Lambda^2}{2c^4 r^5}(y_i v_j + v_i y_j)$$

Dodavši to na poznati rezultat za kvadrupolni maseni moment u općoj teoriji relativnosti (jednadžba C2a iz [8]), dobijemo konačni izraz reda 2PN:

$$\dddot{Q}_{ij}^{2PN} = -\frac{8G\nu M^2}{r^3}\left(\frac{y_i v_j + v_i y_j}{2}\right)\left[1 - \frac{\gamma}{42}(149 - 69\nu) + \right. \\ \left. + \frac{\gamma^2}{1512}(7043 - 7837\nu + 3703\nu^2 - 567\Lambda^2(1-2\nu))\right] \tag{69}$$

Uzevši u obzir da se u našem slučaju radi o kružnoj orbiti $v^2 = \Omega^2 r^2$ te da vrijedi $\mathbf{x}\cdot\mathbf{v} = \mathcal{O}\left(1/c^5\right)$, vrijedi

$$(y_i v_j + v_i y_j)^2 = 2r^4\Omega^2 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{c^5}\right),$$

pa imamo konačan rezultat nekomutativnog dijela gravitacijskog toga reda 2PN

$$\mathcal{F}_{NC} = \frac{32c^2}{5G}\nu^2\gamma^5\left[-\frac{9}{8}\Lambda^2(1-2\nu)\gamma^2\right]$$

Ukupan rezultat se dobije zbrajanjem prethodnog člana s klasičnim OTR trenutnim tokom reda razvoja 2PN (jednadžba 4.16 iz [8])

$$\mathcal{F}^{2PN} = \frac{32c^2}{5G}\nu^2 x^5\left[1 - \left(\frac{1247}{336} + \frac{35}{12}\nu\right)x + 4\pi x^{3/2} + \right. \\ \left. + \left(-\frac{44711}{9072} + \frac{9271}{504}\nu + \frac{65}{18}\nu^2 - \frac{1}{2}\Lambda^2(1-2\nu)\right)x^2\right] \tag{70}$$

Bitno je naglasiti da je za izvod ovog izraza potrebno uključiti multipole reda većeg od kvadrupolnog, koje nismo spominjali u izvodu nekomutativne popravke trenutnog toka jer u taj izraz ulaze u redu aproksimacije većem od 2PN.

IX. OGRANIČENJE PARAMETRA Λ IZ ORBITALNE FAZE GIBANJA

A. Orbitalna faza binarnog sustava

Koristimo jednadžbu (68) da bismo odredili promjenu orbitalnog radijusa r i stopu promjene orbitalne frekvencije Ω. To će nam omogućiti izračun evolucije faze orbite binarnog sustava, što je ključni parametar za analizu podataka. Prvo uvodimo bezdimenzionalnu vremensku varijablu

$$\Theta = \frac{\nu c^3}{5GM}(t_c - t), \tag{71}$$

gdje je t_c vrijeme sjedinjenja dvaju točkastih masa binarnog sustava. Prema raspravi u poglavlju V znamo da post-Newtonovski formalizam prestaje vrijediti neposredno prije samog sjedinjenja, no vrijedi tijekom postupnog spiralnog približavanja koje prethodi sjedinjenju.

Jednadžbu očuvanja energije možemo prikazati preko parametra Θ

$$\frac{dE}{dx}\frac{dx}{d\Theta} = \frac{5GM}{\nu c^3}\mathcal{F}, \tag{72}$$

gdje su $E(x)$ i $\mathcal{F}(x)$ dani jednadžbama (67) i (70), respektivno. Bitno je imati na umu da su prethodne veličine izvedene uz pretpostavku kvazi-kružne orbite te da smo zanemarili nekomutativne članove $\mathbf{n}\cdot\theta$ koji uzrokuju precesiju orbitalne ravnine. Prethodni izraz je diferencijalna jednadžba čiji rezultat je

$$x^{2PN}(\Theta) = \frac{1}{4}\Theta^{-1/4}\left[1 + \left(\frac{743}{4032} + \frac{11}{48}\nu\right)\Theta^{-1/4} - \frac{\pi}{5}\Theta^{-3/8} + \right. \\ \left. + \left(\frac{19583}{254016} + \frac{24401}{193536}\nu + \frac{31}{288}\nu^2 + \frac{10}{256}(1-2\nu)\Lambda^2\right)\Theta^{-1/2}\right] \tag{73}$$

Parametar x i kutna frekvencija Ω su povezani izrazom (66), pa prethodna jednadžba eksplicitno prikazuje vremensku evoluciju kutne frekvencije $\Omega(\Theta)$. Iz toga je jednostavno dobiti orbitalnu fazu ϕ binarnog sustava, koju definiramo kao

$$\frac{d\phi}{d\Theta} = -\frac{5}{\nu}x^{3/2}, \tag{74}$$

poznavajući vezu (66). Konačan izraz za fazu orbitalnog gibanja je

$$\phi^{2PN}(x) = -\frac{x^{-5/2}}{32\nu}\left[1 + \left(\frac{3715}{1008} + \frac{55}{12}\nu\right)x - 10\pi x^{3/2} + \right. \\ \left. + \left(\frac{15293365}{1016064} + \frac{27145}{1008}\nu + \frac{3085}{144}\nu^2 + \frac{25}{4}(1-2\nu)\Lambda^2\right)x^2\right], \tag{75}$$

do na konstantu integracije. Naravno, u limesu $\Lambda \to 0$, prethodni izrazi se reduciraju na svoj OTR oblik.

B. Fazni predlošci u frekvencijskoj domeni

Prethodni rezultati omogućuju izradu analitičkih valnih predložaka koji se zatim usklađuju sa signalima opaženim pomoću detektora gravitacijskih valova. Kao što je ranije spomenuto, naš analitički model može opisivati samo razdoblje spiralnog približavanja masa jer se post-Newtonova ekspanzija raspada zbog velikih brzina koje sustav postiže u kasnijim fazama spajanja. Iz tog razloga, kasnije faze obično se modeliraju numeričkim metodama relativističke fizike (NR). U slučaju GW150914, suradnja "LIGO/Virgo" koristila je dva glavna modela valnih oblika koji kombiniraju post-Newtonovski razvoj i numeričke metode: "effective one-body" (EOB) formalizam i "IMRPhenom" model. Više o tim modelima možete pročitati u referencama [10] i [3], respektivno.

Pretpostavljamo oblik signala gravitacijskih valova s amplitudom $A(t)$ i fazom $\Phi(t)$

$$h(t) = 2A(t)\cos(\Phi(t)) = A(t)\left[e^{-i\Phi(t)} + e^{i\Phi(t)}\right] \tag{76}$$

Fourier transformacija tog oblika je

$$\begin{aligned}\tilde{h}(f) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{2\pi i f t} h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt\, A(t)\left[e^{2\pi i f t - i\Phi(t)} + e^{2\pi i f t + i\Phi(t)}\right]\end{aligned} \tag{77}$$

Ovaj integral se može riješiti aproksimacijom stacionarne faze (SPA), koja govori će prethodnom integralu doprinositi samo područje oko stacionarne točke faze i daje rezultat

$$\tilde{h}^{SPA}(f) = \sqrt{\frac{2\pi}{\ddot{\Phi}(t_f)}}A(t_f)e^{i\psi(f)}, \tag{78}$$

gdje je

$$\psi(f) = 2\pi f t_f - \pi/4 - \Phi(t_f) \tag{79}$$

Vrijeme t_f označava trenutak kada je frekvencija gravitacijskih valova $\dot{\Phi}(t)$ jednaka Fourierovoj frekvenciji f. Više o aproksimaciji stacionarne faze možete pročitati u [16].

Sada možemo povezati izraz za fazu $\psi(f)$ s orbitalnom fazom $\phi(x)$ binarnog sustava. Naime, poznato je da vrijedi poveznica između frekvencije gravitacijskih valova $\dot{\Phi}(t)$ te orbitalne frekvencija binarnog sustava Ω oblika

$$\dot{\Phi}(t) = 2\Omega(t) \tag{80}$$

To znači da parametar t_f možemo dobiti iz jednadžbe $2\Omega(t_f) = f$ koja se vezom (66) pretvara u jednadžbu

$$\frac{2c^3}{GM}x^{3/2}(t_f) = f \tag{81}$$

Izraz (73), uz definiciju (71), povezuje parametar x sa vremenskom koordinatom t, što dovodi do konačnog rezultata za t_f.

Dalje, prema jednadžbi (80), vrijedi $\Phi(t) = 2\phi(t) + \Phi_0$, iz čega možemo dobiti izraz za $\Phi(t_f)$.

Konačan rezultat izvoda je izraz reda 2PN za fazu $\psi(f)$

$$\psi^{2PN}(f) = 2\pi f t_c - \phi_c - \frac{\pi}{4} + \frac{3}{128\nu}\sum_{j=0}^{4}\varphi_j\left(\frac{\pi M G f}{c^3}\right)^{\frac{j-5}{3}}, \tag{82}$$

gdje su t_c i ϕ_c vrijeme i orbitalna faza pri sjedinjenju. Koeficijenti φ_j dani su izrazima

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 1 \\ \varphi_1 &= 0 \\ \varphi_2 &= \frac{3715}{756} + \frac{55}{9}\nu \\ \varphi_3 &= -16\pi \\ \varphi_4 &= \frac{15293365}{508032} + \frac{27145}{504}\nu + \frac{3085}{72}\nu^2 + \frac{25}{2}(1-2\nu)\Lambda^2\end{aligned} \tag{83}$$

Jedini koeficijent koji nosi nekomutativni dio, koeficijent φ_4, dijelimo na klasični i nekomutativni dio

$$\varphi_4 = \varphi_4^{GR} + \varphi_4^{NC}, \tag{84}$$

gdje je $\varphi_4^{NC} = \frac{25}{2}(1-2\nu)\Lambda^2$.

C. GW150914 signal i ograničenje skale

U članku [2], grupa "LIGO/Virgo Collaboration" koristi signal GW150914 kako bi testirala odstupanja od opće teorije relativnosti . U svom pristupu definirali su generalizirani IMR model (gIMR), gdje se uvodi faza odstupanja od standardne OTR, $\delta\varphi_j$. To odstupanje se dodaje IMRPhenom predlošku zamjenom faze φ_j s $\varphi_j(1+\delta\varphi_j)$. Faze odstupanja $\{\delta\varphi_j\}$ potom variraju (jedna po jedna ili sve odjednom) kako bi se teorijski predložak, koji uključuje odstupanja od OTR, prilagodio promatranjima. Ograničenja dobivena iz GW150914 navedena su u Tablici I u [3].

U principu, trebali bismo provesti cijeli prethodno opisani postupak ispočetka, s dodatkom parametra nekomutativnosti Λ analizi. Međutim, očekujemo izrazito male nekomutativne popravke koeficijenta φ_4, koje ne bi utjecale previše na ostale koeficijente. To nas navodi na jednostavniju metodu. Definiramo nekomutativno odstupanje koeficijenta φ_4 od OTR kao

$$\delta\varphi_4^{NC} = \frac{\varphi_4^{NC}}{\varphi_4^{GR}} = \frac{1270080(1-2\nu)}{4353552\nu^2 + 5472432\nu + 3058673}\Lambda^2$$

Zatim želimo usporediti ovu korekciju s vrijednošću $\delta\varphi_4$ koju je izračunao "LIGO/Virgo" za GW150914. Prema tablici 1. članka [2], odstupanje koeficijenta φ_4 od OTR iznosi $\delta\varphi_4 = -1.9^{+1.6}_{-1.7}$ kada se dozvoli samo varijacija parametra φ_4, te $\delta\varphi_4 = -1.9^{+19.3}_{-16.4}$ kada se svi parametri φ_j variraju istovremeno.

Da bismo to usporedili s formulom (83), potreban nam je simetrični omjer masa ν binarnog sustava. Prema članku [1], mase crnih rupa binarnog sustava koji je izvor signala su $m_1 = 36.2^{+5.2}_{-3.8} M_\odot$ i $m_2 = 29.1^{+3.7}_{-4.4} M_\odot$. Međutim, ti iznosi su dobiveni analizom temeljenom na predlošcima koji su izvedeni iz klasične OTR. Nekomutativne korekcije bi u tim predlošcima uzrokovale mala odstupanja u iznosima masa.

Srećom, ova korekcija ne bi značajno utjecala na ograničenje za Λ. Naime, prema definiciji, simetrični omjer masa ν kreće se između 0 ($m_1 = 0$) i 1/4 ($m_1 = m_2$). Prema tome, za bilo koji binarni sustav vrijedi

$$\delta\varphi_4^{NC} \in [0.135, 0.415]\Lambda^2$$

Neodređenost masa ima utjecaj na $\delta\varphi_4^{NC}$ koji je za red veličine manji od ograničenja koje možemo postaviti na Λ. Zbog toga uzimamo srednje vrijednosti masa m_1 i m_2, te imamo

$$\delta\varphi_4^{NC} = 0.137\Lambda^2$$

Uzimamo u obzir najgori mogući slučaj $\delta\varphi_4 = -1.9^{+19.3}_{-16.4}$, pa uz uvjet $\left|\delta\varphi_4^{NC}\right| \lesssim \left|\delta\varphi_4\right|$ vrijedi

$$\left|\delta\varphi_4^{NC}\right| \lesssim 20 \implies \Lambda \lesssim 12, \tag{85}$$

što predstavlja najmanje ograničenje u vrijeme pisanja članka [19].

X. ZAKLJUČAK

U teoriji nekomutativne gravitacije kanonske komutacijske relacije operatora koordinata impliciraju skalu prostorvremena analognu Planckovoj konstanti u faznom prostoru. Takva skala prikazana je parametrom Λ (50). Koristeći formalizam post-Newtonovskog razvoja do reda 2PN, izveli smo izraze za akceleraciju $a_{\text{kr.orb.}}$ (61) i energiju $E_{\text{kr.orb.}}$ (62) binarnog sustava dvaju masa u kvazi-kružnoj orbiti, uz korekcije koje nastaju kada sustav stavimo u prostrovrijeme koje poštuje komutacijske relacije (1). Koristeći očuvanje energije, izjednačili smo promjenu energije u vremenu s tokom gravitacijskog zračenja $\mathcal{F}$ (70), kojem smo dodali nekomutativne korekcije. Iz toga smo izveli orbitalnu fazu binarnog sustava ϕ (75) kao funkciju frekvencijskog parametra x (66). Zatim smo pretpostavili oblik gravitacijskog zračenja $h(t)$ (76), koji smo zatim Fourierovim transformatom prebacili u frekvencijski prostor. Taj transformat $\tilde{h}(f)$ (77) smo izveli do 2PN reda razvoja i prikazali preko veličine ψ (82), koja je prikazana preko koeficijenata φ_j (83). Jedina nekomutativna popravka transformata $\tilde{h}(f)$ nalazi se u koeficijentu φ_4 (84). Konačno, usporedili smo takav nekomutativni dio koeficijenta φ_4 s odstupanjem od OTR kojeg je pronašla grupa "Ligo/Virgo Collaboration" da bismo utvrdili gornju granicu parametra $\Lambda \lesssim 12$, što predstavlja gornju granicu vremenskih elemenata θ^{0i} tenzora nekomutativnosti $\theta^{\mu\nu}$.

[1] B. Abbott et al. Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger. *Physical Review Letters*, 116(6), 2016. ISSN 1079-7114. doi: 10.1103/physrevlett.116.061102.

[2] B. Abbott et al. Tests of General Relativity with GW150914. *Physical Review Letters*, 116(22), 2016. ISSN 1079-7114. doi:10.1103/physrevlett.116.221101.

[3] P. Ajith, M. Hannam, S. Husa, Y. Chen, B. Brügmann, N. Dorband, D. Müller, F. Ohme, D. Pollney, C. Reisswig, L. Santamaría, and J. Seiler. Inspiral-Merger-Ringdown Waveforms for Black-Hole Binaries with Nonprecessing Spins. *Physical Review Letters*, 106(24), 2011. ISSN 1079-7114. doi:10.1103/physrevlett.106.241101.

[4] Vanessa C de Andrade, Luc Blanchet, and Guillaume Faye. Third post-Newtonian dynamics of compact binaries: Noetherian conserved quantities and equivalence between the harmonic-coordinate and ADM-Hamiltonian formalisms. *Classical and Quantum Gravity*, 18(5):753–778, February 2001. ISSN 1361-6382. doi: 10.1088/0264-9381/18/5/301.

[5] Luc Blanchet. Energy losses by gravitational radiation in inspiralling compact binaries to five halves post-Newtonian order. *Physical Review D*, 1996. doi: 10.48550/ARXIV.GR-QC/9603048.

[6] Luc Blanchet. Gravitational Radiation from post-Newtonian Sources and Inspiralling Compact Binaries. *Living Reviews in Relativity*, 17(1), February 2014. ISSN 1433-8351. doi:10.12942/lrr-2014-2.

[7] Luc Blanchet and Guillaume Faye. Hadamard regularization. *Journal of Mathematical Physics*, 41(11): 7675–7714, November 2000. ISSN 1089-7658. doi: 10.1063/1.1308506.

[8] Luc Blanchet, Thibault Damour, and Bala R. Iyer. Gravitational waves from inspiralling compact binaries: Energy loss and waveform to second–post-Newtonian order. *Physical Review D*, 1995. doi:10.48550/ARXIV.GR-QC/9501029.

[9] Luc Blanchet, Guillaume Faye, and Bénédicte Ponsot. Gravitational field and equations of motion of compact binaries to five halves post-Newtonian order. *Physical Review D*, 58(12), October 1998. ISSN 1089-4918. doi: 10.1103/physrevd.58.124002.

[10] A. Buonanno and T. Damour. Effective one-body approach to general relativistic two-body dynamics. *Physical Review D*, 59(8), 1999. ISSN 1089-4918. doi: 10.1103/physrevd.59.084006.

[11] X. Calmet, B. Jurčo, P. Schupp, J. Wess, and M. Wohlgenannt. The standard model on non-commutative space-time. *The European Physical Journal C*, 23 (2):363–376, March 2002. ISSN 1434-6052. doi: 10.1007/s100520100873.

[12] Xavier Calmet and Archil Kobakhidze. Second order noncommutative corrections to gravity. *Physical Review D*, 74(4), 2006. ISSN 1550-2368. doi:

10.1103/physrevd.74.047702.

[13] Sean M. Carroll. A no-nonsense introduction to General Relativity. *Enrico Fermi Institute and Department of Physics, University of Chicago*, 2001. URL https://preposterousuniverse.com/wp-content/uploads/2015/08/grtinypdf.pdf.

[14] Sean M. Carroll. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2004. doi:10.1017/9781108770385.

[15] M. Chaichian, P. Presnajder, M. M. Sheikh-Jabbari, and A. Tureanu. Non-commutative standard model: model building. *The European Physical Journal C*, 29(3):413–432, July 2003. ISSN 1434-6052. doi: 10.1140/epjc/s2003-01204-7.

[16] Thibault Damour, Bala R. Iyer, and B. S. Sathyaprakash. A Comparison of search templates for gravitational waves from binary inspiral. *Physical Review D*, 2000. doi: 10.48550/ARXIV.GR-QC/0010009.

[17] Michael Douglas and Nikita Nekrasov. Noncommutative field theory. *Reviews of Modern Physics*, 73 (4):977–1029, November 2001. ISSN 1539-0756. doi: 10.1103/revmodphys.73.977.

[18] Archil Kobakhidze. Noncommutative corrections to classical black holes. *Physical Review D*, 79(4), February 2009. ISSN 1550-2368. doi:10.1103/physrevd.79.047701.

[19] Archil Kobakhidze, Cyril Lagger, and Adrian Manning. Constraining noncommutative spacetime from GW150914. *Physical Review D*, 94(6), 2016. ISSN 2470-0029. doi:10.1103/physrevd.94.064033.

[20] Michele Maggiore. *Gravitational Waves. Volume 1: Theory and Experiments*. Oxford University Press, 2008. doi: 10.1093/acprof:oso/9780198570745.001.0001.

[21] P. C. Peters. Gravitational Radiation and the Motion of Two Point Masses. *Physical Review*, 136(4B): B1224–B1232, November 1964. ISSN 0031-899X. doi: 10.1103/physrev.136.b1224.