Buchdahlova granica

Ema Kompar[*]
mentor: izv. prof. Ivica Smolić[†]
Prirodoslovno-matematički fakultet
Sveučilište u Zagrebu
Bijenička cesta 32
(Dated: 20. siječnja 2023.)

Buchdalhov teorem precizno određuje maksimalnu održivu kompaktnost obične gravitirajuće materije preko nejednakosti na omjer mase i radijusa koja mora biti zadovoljena za statične, sferno-simetrične konfiguracije tvari pod određenim uvjetima. Točnije, za radijus R i masu M mora biti zadovoljeno $M \leq 4R/9$ u prirodnim jedinicama. Izvest ćemo vakuumsko Schwarzschildovo rješenje iz Einsteinove jednadžbe te unutarnje rješenje za zvijezdu koja se aproksimira idealnim fluidom koristeći $(-,+,+,+)$ signaturu metrike. Dobit ćemo i Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) jednadžbu koja se koristi u dokazivanju Buchdahlove granice. Konačno, izrazit ćemo gornju granicu na masu zvijezde sa zadanim radijusom nenegativne i monotono padajuće gustoće.

I. UVOD

A. Opća teorija relativnosti

Opća teorija relativnosti je geometrijska teorija gravitacije koju je A. Einstein objavio 1915. Predstavlja poopćenje specijalne relativnosti i Newtonovog zakona univerzalne gravitacije te ju opisuje kao geometrijsko svojstvo četverodimenzionalnog prostorvremena.
Newtonov univerzalni zakon gravitacije može se smatrati pojednostavljenjem opće relativnosti za gotovo ravna prostorvremena. Određena predviđanja opće relativnosti ne mogu biti obuhvaćena klasičnim Newtonovim zakonom, kao što su tijek vremena i dilatacija, geometrija prostora, gravitacijske leće, singulariteti i crne rupe. Do sada izvedeni eksperimenti se slažu s teorijom.

B. Einsteinova jednadžba

Zakrivljenost prostorvremena direktno je povezana s energijom i impulsom tvari i zračenja koji su prisutni, čija je veza opisana Einsteinovim jednadžbama polja koje čine sustav parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda. Smatra se središnjim pojmom opće teorije relativnosti te je zadana oblikom:

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{1}$$

gdje je $G_{\mu\nu}$ Einsteinov tenzor, $R_{\mu\nu}$ Riccijev tenzor, R Riccijev skalar, $g_{\mu\nu}$ element metrike i $T_{\mu\nu}$ tenzor energije i impulsa (svi redom simetrični tenzori)[1]. Einsteinova jednadžba povezuje geometriju prostorvremena s raspodjelom mase, energije i impulsa, tj. određuje tenzor metrike prostorvremena za zadanu raspodjelu te su rješenja komponente metrike. Ponekad je korisno zapisati Einsteinovu jednadžbu u drugačijem obliku. Uzme li se trag jednadžbe (1), dobije se $R = -(8\pi Gc^{-4})T$. Vrati li se dobiveni izraz u početnu jednadžbu, dobije se:

$$R_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu}\right) \tag{2}$$

Jednadžbe su potpuno ekvivalentne, ali gornji izraz je koristan za vakuumsko rješenje, gdje je $T_{\mu\nu} = 0$, što čini vakuumsku Einsteinovu jednadžbu:

$$R_{\mu\nu} = 0 \tag{3}$$

Povijesno prvo netrivijalno egzaktno rješenje jednadžbi dao je K. Schwarzschild 1916.

C. Buchdahlov teorem

Promatramo statično, sferno-simetrično rješenje Einsteinove jednadžbe s materijom zatvorenom radijusom R koja se ponaša kao idealni fluid s gustoćom koja se ne povećava s radijalnom koordinatom. Idealni fluid može se u potpunosti opisati gustoćom u mirujućem sustavu ρ i izotropnim tlakom P. Dodatno, fluid nema viskoznost te ne podliježe smicanju i toplinskoj vodljivosti. Pretpostavljamo pozitivnost gustoće i tlaka. Masa takvog rješenja mora zadovoljavati:

$$M \leq \frac{4Rc^2}{9G} \equiv \frac{4R}{9} \tag{4}$$

gdje su $c = G = 1$ u prirodnom sustavu jedinica. Za dokaz teorema, Buchdahl koristi Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) jednadžbu.

II. SCHWARZSCHILDOVO RJEŠENJE

Schwarzschildovo rješenje, koje opisuje egzaktno vanjsko gravitacijsko polje statičnog sferno-simetričnog tijela,

[*] ekompar.phy@pmf.hr
[†] ismolic@phy.hr

[1] U ovom obliku jednadžbe izostavljena je kozmološka konstanta.

predviđa mala odstupanja od Newtonove teorije za gibanje planeta u Sunčevu sustavu, "savijanje" svjetlosti, crveni pomak i efekt kašnjenja vremena. U režimu slabog polja Sunčeva sustava sva predviđanja opće teorije relativnosti su kvantitativno precizno izmjerena i potvrđena. Važan rezultat vežemo za masivna tijela koja se ne mogu održavati u ravnoteži protiv gravitacijskog sažimanja. Nakon kolapsa sferno-simetričnog tijela, cjelokupna geometrija prostorvremena bit će opisana Schwarzschildovim rješenjem.

A. Izvod Schwarzschildovog rješenja

Rješenje Einsteinove jednadžbe koje opisuje vanjsko gravitacijsko polje statičnog sferno-simetričnog tijela opisujemo četverodimenzionalnom Lorentzovom metrikom čiji Riccijev tenzor iščezava, koja je statična i sferno-simetrična.

Prostorvrijeme je stacionarno ako ima Killingovo vektorsko polje ξ^μ koje je vremenskog tipa, a statično ako je stacionarno i postoji prostorna hiperploha Σ na koju je ξ^μ ortogonalno. Iz toga slijedi neovisnost elemenata metrike o vremenu[2] te je možemo zapisati na sljedeći način:

$$ds^2 = -V^2(x^1,x^2,x^3)dt^2 + \sum_{\mu,\nu=1}^{3} h_{\mu\nu}(x^1,x^2,x^3)dx^\mu dx^\nu \tag{5}$$

gdje je $V^2 = -\xi_\mu \xi^\mu$ i ortogonalnost se očituje u nedostatku miješanog člana $dtdx^\mu$. Konačno, statično prostorvrijeme je stacionarno i ne mijenja se u vremenu $t \to t + konst.$, niti prilikom refleksije $t \to -t$.

Prostorvrijeme je sferno-simetrično ako njegova grupa izometrija[3] ima podgrupu izomorfnu grupi $SO(3)$, i orbite podgrupe[4] su dvodimenzionalne sfere. $SO(3)$ izometrije se mogu fizikalno interpretirati kao rotacije, stoga sferno-simetrično prostorvrijeme ima metriku koja je invarijantna na rotacije. Metrika prostorvremena inducira metriku na svaku dvodimenzionalnu sferu koja zbog rotacijske simetrije mora biti višekratnik jedinične dvodimenzionalne sfere te može biti opisana ukupnom površinom. Definiramo $r = \sqrt{A/4\pi}$ pa se u sfernim koordinatama metrika na dvodimenzionalnoj sferi može zapisati:

$$ds^2 = r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{6}$$

U ravnom trodimenzionalnom euklidskom prostoru, r je radijus sfere te i u ovom slučaju r predstavlja radijalnu koordinatu na sferi.

Ako je prostorvrijeme statično i sferno-simetrično, i ako je Killingovo vektorsko polje ξ^μ jedinstveno[5] (što se uzima kao pretpostavka), onda ξ^μ mora biti ortogonalno na orbite dvodimenzionalnih sfera. Ako je ξ^μ jedinstveno, mora biti invarijantno na rotacije, što zahtijeva da projekcije ξ^μ na bilo koju sferu iščezavaju[6], što sfere čini ortogonalnim sa ξ^μ te one u cijelosti leže na hiperplohi Σ. Izabrane koordinate na Σ su (r,θ,ϕ) te u cijelom prostorvremenu (t,r,θ,ϕ). U ovim koordinatama, metrika proizvoljnog statičnog, sferno-simetričnog prostorvremena poprima oblik:

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + h(r)dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7}$$

Trebalo bi naglasiti da ovakav koordinatni sustav, uz probleme na polovima $(\theta = 0, \pi)$, u točkama gdje je $\xi^\mu = 0$ ili $\nabla_\mu r = 0$ također nailazi na probleme.

Dobivanje Schwarzschildovog rješenja svodi se na određivanje 10 funkcija od 4 varijable (koordinate), tj. odredit ćemo komponente metrike $g_{\mu\nu}$ iz kojih dobivamo i funkcije $f(r)$ i $h(r)$. Također nam je potreban Riccijev tenzor $R_{\mu\nu}$, koji dobivamo iz Riemannovog tenzora $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta}$, koji se pak dobije iz Christoffelovih simbola $\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu}$.

Metrika ds^2 može se zapisati:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -f(r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{8}$$

Christoffelovi simboli računaju se formulom:

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\lambda} \left(\frac{\partial g_{\lambda\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda} \right) \tag{9}$$

gdje su elementi metrike s indeksima gore samo inverzi onih s indeksima dolje. Dijagonalna metrika daje uvjete na Christoffelove simbole:

$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} = 0 \text{ gdje } \alpha \neq \mu \neq \nu$$
$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\mu} = -\frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha g_{\mu\mu}}{g_{\alpha\alpha}}$$
$$\Gamma^\alpha{}_{\mu\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\mu g_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}}$$
$$\Gamma^\alpha{}_{\alpha\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial_\alpha g_{\alpha\alpha}}{g_{\alpha\alpha}}$$

Uz ove uvjete, neiščezavajući simboli su:

$$\Gamma^t{}_{rt} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)}$$
$$\Gamma^r{}_{tt} = \frac{1}{2}\frac{f'(r)}{h(r)}$$
$$\Gamma^r{}_{rr} = \frac{1}{2}\frac{h'(r)}{h(r)}$$
$$\Gamma^r{}_{\theta\theta} = -\frac{r}{h(r)}$$
$$\Gamma^r{}_{\phi\phi} = -\frac{r\sin^2\theta}{h(r)}$$
$$\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$$
$$\Gamma^\theta{}_{r\theta} = \Gamma^\phi{}_{r\phi} = \frac{1}{r}$$
$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \cot\theta$$

[2] Ako je metrika neovisna o nekoj koordinati x^μ, vektor ∂_μ će zadovoljavati Killingovu jednadžbu.

[3] Izometrije (simetrije prostorvremena) su funkcije iz jednog prostora metrike u drugi koje čuvaju udaljenost između bilo kojih dviju točaka.

[4] Skup točaka rezultata akcije na podgrupu na danoj točki.

[5] Postoji samo jedno Killingovo vektorsko polje vremenskog tipa ortogonalno na hiperplohu.

[6] Neiščezavajuće vektorsko polje na sferi ne može biti invarijantno na sve rotacije.

gdje je crticom ($'$) označena derivacija po r.
Riemannov tenzor računa se formulom:

$$R^{\mu}{}_{\nu\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\sigma}{}_{\nu\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\alpha\sigma} - \Gamma^{\sigma}{}_{\alpha\beta}\Gamma^{\mu}{}_{\nu\sigma} \quad (10)$$

Zbog simetrijskih svojstava Riemannovog tenzora, imamo ukupno $N^2(N^2-1)/12 = 20$ komponenata, gdje je $N = 4$ broj dimenzija prostorvremena. Neiščezavajuće komponente su:

$$R^{r}{}_{trt} = \tfrac{1}{2}\tfrac{f''(r)}{h(r)} - \tfrac{1}{4}\tfrac{f'(r)h'(r)}{h^2} - \tfrac{1}{4}\tfrac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)}$$
$$R^{\theta}{}_{t\theta t} = \tfrac{1}{2r}\tfrac{f'(r)}{h(r)} = R^{\phi}{}_{t\phi t}$$
$$R^{\theta}{}_{r\theta r} = \tfrac{1}{2r}\tfrac{h'(r)}{h(r)} = R^{\phi}{}_{r\phi r}$$
$$R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} = 1 - \tfrac{1}{h(r)}$$

Riccijev tenzor iz Riemannovog dobivamo izrazom $R_{\mu\nu} = R^{\alpha}{}_{\mu\alpha\nu}$ gdje se podrazumijeva Einsteinova sumacija po α. Sve komponente su oblika $R_{\mu\mu}$ što se može vidjeti iz neiščezavajućih komponenti Riemannovog tenzora. Koristeći se i izrazom $g_{\nu\nu}R^{\nu}{}_{\mu\nu\mu} = g_{\mu\mu}R^{\mu}{}_{\nu\mu\nu}$, konačno se dobije:

$$\begin{aligned} R_{tt} &= R^{\alpha}{}_{t\alpha t} = R^{r}{}_{trt} + R^{\theta}{}_{t\theta t} + R^{\phi}{}_{t\phi t} \\ &= \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} R_{rr} &= R^{\alpha}{}_{r\alpha r} = R^{t}{}_{rtr} + R^{\theta}{}_{r\theta r} + R^{\phi}{}_{r\phi r} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)f(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)} + \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} R_{\theta\theta} &= R^{\alpha}{}_{\theta\alpha\theta} = R^{t}{}_{\theta t\theta} + R^{r}{}_{\theta r\theta} + R^{\phi}{}_{\theta\phi\theta} \\ &= -\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)} \end{aligned} \quad (13)$$

$$R_{\phi\phi} = \sin^2\theta \cdot R_{\theta\theta} \quad (14)$$

Budući da je $R_{\phi\phi} \sim R_{\theta\theta}$, postoje 3 neovisne komponente Riccijevog tenzora. Sad trebamo riješiti jednadžbu $R_{\mu\nu} = 0$ koja daje vakuumsko rješenje. Prvo ćemo t i r komponente izjednačiti s nulom:

$$\begin{aligned} &R_{tt} = 0 \\ &\implies \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} - \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)} \\ &\implies \frac{1}{2}f''(r) = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} - \frac{1}{r}f'(r) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &R_{rr} = 0 \\ &\implies \frac{1}{2}f''(r) = \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f(r)}{h(r)} \cdot h'(r) \end{aligned} \quad (16)$$

gdje su komponente, nakon izjednačenja s nulom, izražene preko druge derivacije fukcije $f(r)$ po r, te se dva dobivena izraza izjednačavaju.

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} - \frac{1}{r}f'(r) = \\ &= \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)} + \frac{1}{r}\frac{f(r)}{h(r)} \cdot h'(r) \end{aligned} \quad (17)$$

Oduzimanjem pripadajućih članova, dolazimo do izraza:

$$-\frac{1}{r}f'(r) = \frac{1}{r}\frac{f(r)}{h(r)} \cdot h'(r) \implies -\frac{f'(r)}{f(r)} = \frac{h'(r)}{h(r)} \quad (18)$$

$$\frac{f'(r)}{f(r)} + \frac{h'(r)}{h(r)} = 0 \quad (19)$$

$$f(r) = \frac{C}{h(r)} \quad (20)$$

gdje je C konstanta. Reskaliranjem vremenske koordinate $t \to C \cdot t$, postavljamo $C = 1$ bez smanjenja općenitosti. Promatramo jednadžbu za $R_{\theta\theta}$ komponentu i izjednačujemo s nulom.

$$R_{\theta\theta} = 0 = -\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)} \quad (21)$$

Umjesto $h(r)$ uvrstimo $f(r)$. Uz pomoć relacije $\frac{d}{dr}(f^{-1}(r)) = -f^{-2}(r)f'(r)$, konačno možemo pisati:

$$-\frac{r}{2}f'(r) + \frac{r}{2}f^2(r) \cdot \frac{-f'(r)}{f^2(r)} + 1 - f(r) = 0 \quad (22)$$

$$-rf'(r) + 1 - f(r) = 0 \implies rf'(r) + f(r) = 1 \quad (23)$$

$$\frac{d}{dr}(rf(r)) = 1 \quad (24)$$

Integracijom dobijemo:

$$rf(r) = r + C \implies f(r) = 1 + \frac{C}{r} \quad (25)$$

Jednadžbama (20) i (25) rješavamo sustav jednadžbi vezan za komponente Riccijevog tenzora, kao i metriku prostorvremena. Konačno pišemo:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{C}{r}\right)dt^2 + \frac{1}{1 + \frac{C}{r}}dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (26)$$

Prvo što možemo primijetiti kod Schwarzschildovog rješenja je da je ono asimptotski ravno, tj. kako $r \to \infty$, elementi metrike se približavaju analognima u prostorvremenu Minkowskog u sfernim koordinatama. To omogućuje interpretaciju Schwarzschildove metrike kao vanjsko gravitacijsko polje izoliranog tijela. Za konstantu

C uspoređujemo ponašanje testnog tijela u režimu slabog polja ($r \to \infty$) s ponašanjem u Newtonovoj teoriji gravitacije. Za velike r, ponašanje u Schwarzschildovoj metrici s parametrom C slaže se s ponašanjem u Newtonovom gravitacijskom polju mase $M = -C/2$ te $-C/2$ interpretiramo se kao ukupnu masu Schwarzshildovog prostorvremena i metriku pišemo u obliku:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{27}$$

Glavna svojstva Schwarzschildovog rješenja su singulariteti koji se javljaju na $r = 2M$ i $r = 0$ u režimu jakog polja. Singularno ponašanje komponenti može biti ili zbog sloma koordinata koje su korištene za dobivanje općenitog oblika metrike, ili zbog stvarnog singulariteta strukture prostorvremena. Singularitet u $r = 2M$ je rezultat koordinata te je uklonjiv izborom drugih, a $r = 0$ je pravi fizikalni singularitet. Radijus $r_S = 2M$ zove se i Schwarzschildov radijus. Treba imati na umu da su koordinatni i fizikalni singulariteti bitni samo za tijela koja su već prošla kroz kompletni gravitacijski raspad, te nam neće biti bitni u daljnjem razmatranju kompaktnih tijela.

B. Unutarnja rješenja

Razmatramo statična sferno-simetrična rješenja Einsteinove jednadžbe sa tenzorom energije i impulsa koji opisuje idealni fluid:

$$T_{\mu\nu} = \rho u_\mu u_\nu + P(g_{\mu\nu} + u_\mu u_\nu) \tag{28}$$

gdje je ρ gustoća fluida, a P tlak fluida. Bitno je naglasiti da se u ovom trenutku razmatramo izotropni slučaj koji osigurava idealni fluid, gdje su radijalni i tangencijalni tlak jednakog iznosa i da tlak iščezava na rubu tijela.
Da bi bila kompatibilna sa statičnom simetrijom prostorvremena, 4-brzina u^μ mora biti u smjeru statičnog Killingovog vektorskog polja ξ^μ:

$$u^\mu = -f^{-\frac{1}{2}}(r)(dt)^\mu \tag{29}$$

gdje je $f(r)$ funkcija koja se pojavljuje u općenitom zapisu metrike. Tražimo rješenja mogućih unutarnjih izvora fluidnog karaktera za vanjsku Schwarzschildovu metriku, koji opisuju strukturu statičnih fluidnih objekata kao što su zvijezde. Za rješavanje Einsteinove jednažbe, potrebno je prvo izračunati Riccijev skalar.

$$R = g^{tt}R_{tt} + g^{rr}R_{rr} + g^{\theta\theta}R_{\theta\theta} + g^{\phi\phi}R_{\phi\phi} \tag{30}$$

$$\begin{aligned} R = &-\frac{1}{f(r)}\left(\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)}\right) \\ &+\frac{1}{h(r)}\left(-\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)} + \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)}\right) \\ &+2\cdot\frac{1}{r^2}\left(-\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{31}$$

$$\begin{aligned} R = &-\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)} + \frac{1}{2}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} \\ &-\frac{2}{r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{2}{r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + \frac{2}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Tenzor impulsa i energije možemo zapisati:

$$T_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} f(r)\cdot\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h(r)\cdot P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cdot P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2\sin^2\theta\cdot P \end{pmatrix} \tag{33}$$

Rješavamo Einsteinovu jednadžbu za svaku neovisnu komponentu (t, r, θ) Riccijevog tenzora.

$$\begin{aligned} 8\pi T_{tt} &= R_{tt} - \frac{1}{2}Rg_{tt} \\ &= \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)} \\ &-\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{h(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h^2(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f(r)h(r)} - \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)} \\ &+\frac{f(r)}{r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + \frac{f(r)}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{34}$$

Umjesto T_{tt} uvrštavamo pripadajuću vrijednost zadanu definicijom tenzora te kratimo određene članove u gornjem izrazu. Time dobivamo:

$$8\pi\rho f(r) = f(r)\left(\frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right)\right) \tag{35}$$

$$8\pi\rho = \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \tag{36}$$

Na isti način rješavamo r komponentu:

$$\begin{aligned} 8\pi T_{rr} &= R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} \\ &= -\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} + \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{h(r)f(r)} + \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)} + \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} \\ &+\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)} + \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)} \\ &-\frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h(r)} + \frac{h(r)}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{37}$$

$$8\pi P = \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{h(r)f(r)} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \tag{38}$$

i θ komponentu:

$$\begin{aligned} 8\pi T_{\theta\theta} &= R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rg_{\theta\theta} \\ &= -\frac{r}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{r}{2}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + 1 - \frac{1}{h(r)} \\ &+\frac{r^2}{2}\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} - \frac{r^2}{4}\frac{1}{2}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)}\frac{r^2}{4}\frac{1}{2}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} \\ &+r\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - r\frac{h'(r)}{h^2(r)} - \left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{39}$$

$$8\pi P = \frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)}$$
$$-\frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} \tag{40}$$

Jednadžba (36) ovisi samo o $h(r)$, što se može potvrditi činjenicom da je jednadžba $G_{tt} = 8\pi T_{tt}$ ograničenje početnih uvjeta, koje u statičkom slučaju uključuje samo geometriju prostorne hiperplohe Σ koja je ortogonalna na Killingovo vektorsko polje ξ^μ te ne može ovisiti o $f(r)$. Jednadžbu (36) raspisujemo:

$$\begin{aligned} 8\pi\rho(r) &= \frac{1}{r}\frac{h'(r)}{h^2(r)} + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{rh'(r)}{h^2(r)} - \frac{1-h(r)}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{41}$$

Sad ćemo prvi član u zagradi zapisati kao jedan od članova derivacije razlomka $r/h(r)$ na način:

$$\begin{aligned} 8\pi\rho(r) &= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{h(r)}\right) + \frac{1}{h(r)} - \frac{1}{h(r)} + 1\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\left(-\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{h(r)}\right) + \frac{d}{dr}(r)\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r - \frac{r}{h(r)}\right) \\ &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right)\right) \end{aligned} \tag{42}$$

Iz čega odmah možemo zaključiti oblik $h(r)$ kao generalizaciju vakuumskog Schwarzschildovog rješenja:

$$h(r) = \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \tag{43}$$

gdje je $m(r)$ masa zvijezde unutar radijusa r zadana jednadžbom:

$$\begin{aligned} m(r) &= 4\pi\int_0^r \rho(r')r'^2 dr' + a \\ \implies dm(r) &= 4\pi\rho(r)r^2 dr \\ \frac{dm(r)}{dr} &= 4\pi\rho(r)r^2 \end{aligned} \tag{44}$$

gdje je a konstanta. Ako gornji izraz pomnožimo s 2 i podijelimo s r^2, dobit ćemo izraz ekvivalentan (42) te se lako može pokazati da se dobiveni oblik $h(r)$ pronalazi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(2m(r)) &= \frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right)\right) \\ r\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) &= 2m(r) \\ \implies h(r) &= \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}} \end{aligned} \tag{45}$$

Glatkoća metrike na Σ u $r = 0$ zahtijeva da kako $r \to 0$, površine sfera približavaju se vrijednosti 4π pomnoženo s kvadratom njihovih vlastitih radijusa; treba $h(r) \to 1$ kako $r \to 0$. Kako bi se izbjegao singularitet metrike u $r = 0$, stavi se $a = 0$. Budući da Σ mora biti prostornog karaktera za statične konfiguracije, nužan uvjet statičnosti je $h(r) \geq 0$, tj. $r \geq 2m(r)$.
Ako je $\rho > 0$ za $r > R$, rješenje za $h(r)$ spaja se se sa Schwarzschildovim vakuumskim rješenjem s ukupnom masom na način:

$$M = m(R) = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2 dr \tag{46}$$

Ova jednadžba je formalno identična izrazu za ukupnu masu u Newtonovoj gravitaciji, ali treba uzeti u obzir da je vlastiti volumen[7] elementa na Σ dan relacijom:

$$\sqrt{^{(3)}g}\,d^3x = \sqrt{h(r)}r^2\sin\theta\, dr d\theta d\phi \tag{47}$$

pa je vlastita masa[8] dana izrazom:

$$M_p = 4\pi\int_0^R \rho(r)r^2\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2m(r)}{r}}}dr \tag{48}$$

Razlika između vlastite i ukupne mase interpretira se kao gravitacijska energija vezanja $E_B = M_p - M > 0$.
Funkciju $f(r)$ uz dt^2 komponentu metrike napišemo kao funkciju parametra $\phi(r)$ na način $f = e^{2\phi}$. Sad G_{rr} komponentu možemo zapisati preko novog parametra ϕ. Prvo je potrebno izraziti $f'(r)$ preko ϕ.

$$f'(r) = \frac{df}{dr} = \frac{df}{d\phi}\frac{d\phi}{dr} = 2f\frac{d\phi}{dr} \tag{49}$$

Dalje pišemo:

$$\begin{aligned} 8\pi P &= \frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \\ 8\pi P &= \frac{2}{rh(r)}\frac{d\phi}{dr} - \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right) \end{aligned} \tag{50}$$

Tražimo izraz koji opisuje ovisnost novog parametra ϕ i r, derivaciju $\phi'(r)$.

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{rh(r)}{2}\left(8\pi P + \frac{1}{r^2}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right)\right) \\ &= h(r)\left(4\pi rP + \frac{1}{2r}\left(1 - \frac{1}{h(r)}\right)\right) \end{aligned} \tag{51}$$

Sad uvrstimo izraz za $h(r)$ iz jednadžbe (43):

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dr} &= \frac{1}{1 - \frac{2m(r)}{r}}\left(4\pi rP + \frac{1}{2r}\left(1 - 1 + \frac{2m(r)}{r}\right)\right) \\ &= \frac{4\pi r^2 P}{r - 2m(r)} + \frac{r}{r - 2m(r)}\frac{2m(r)}{2r^2} \\ \implies \frac{d\phi}{dr} &= \frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r\left(r - 2m(r)\right)} \end{aligned} \tag{52}$$

[7] *proper volume*
[8] *proper mass*

U Newtonovom limesu su pojednostavljenja oblika $r^3 P \ll m(r)$ i $m(r) \ll r$, pa se gornji rezultat svodi na:

$$\frac{d\phi}{dr} \approx \frac{m(r)}{r^2} \tag{53}$$

što je sferno-simetrična verzija Poissonove jednadžbe za Newtonov gravitacijski potencijal. U statičnom sferno-simetričnom slučaju možemo poopćiti $\phi = \frac{1}{2}\ln f$ kao relativistički ekvivalent Newtonovom potencijalu.

Nove rezultate (43) i (52) ubacujemo u tangencijalnu komponentu Einsteinove jednadžbe (40). Prije svega trebamo izraziti drugu derivaciju funkcije $f(r)$ preko parametra ϕ. Koristimo ranije dobiven izraz (49) da lako pokažemo:

$$\begin{aligned} f''(r) &= \frac{d}{dr}\left(2f\frac{d\phi}{dr}\right) \\ &= 2\frac{df}{dr}\frac{d\phi}{dr} + 2f\frac{d^2\phi}{dr^2} \\ &= 4f\left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + 2f\frac{d^2\phi}{dr^2} \end{aligned} \tag{54}$$

Prije nego što gornji izraz ubacimo u (40), odredit ćemo $\phi''(r)$.

$$\begin{aligned} \frac{d^2\phi}{dr^2} &= \frac{d}{dr}\frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r\left(r - m(r)\right)} \\ \frac{d^2\phi}{dr^2} &= \frac{12\pi r^2 P + 4\pi r^2 \frac{dP}{dr} + \frac{dm(r)}{dr}}{r\left(r - m(r)\right)} \\ &- \frac{\left(4\pi r^3 + m(r)\right)\left(2r - r\frac{dm(r)}{dr} - m(r)\right)}{r^2\left(r - m(r)\right)^2} \end{aligned} \tag{55}$$

Sad $f''(r)$ možemo pisati kao:

$$\begin{aligned} f''(r) = \frac{2f}{r^2\left(r - 2m(r)\right)^2}&\Bigg\{2\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2 \\ &+ r\left(r - 2m(r)\right)\left(12\pi r^2 P + 4\pi r^2\frac{dP}{dr} + \frac{dm(r)}{dr}\right) \\ &- \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(2r - r\frac{dm(r)}{dr} - m(r)\right)\Bigg\} \end{aligned} \tag{56}$$

Za kraj ćemo izraziti derivaciju $h'(r)$ iz (43).

$$\frac{dh}{dr} = \frac{d}{dr}\left(\frac{r}{r - 2m(r)}\right) = 2\cdot\frac{rm'(r) - m(r)}{\left(r - 2m(r)\right)^2} \tag{57}$$

Napokon, rješavamo jednadžbu (40) koja u potpunosti zapisana izgleda ovako:

$$\begin{aligned} 8\pi P = \frac{1}{2}\frac{r - 2m(r)}{rf}\frac{2f}{r^2\left(r - 2m(r)\right)^2}&\Bigg\{2\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2 \\ &+ r\left(r - 2m(r)\right)\left(12\pi r^2 P + 4\pi r^2\frac{dP}{dr} + m'(r)\right) \\ &- \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(2r - rm'(r) - m(r)\right)\Bigg\} \\ &- \frac{1}{4}\frac{\left(r - 2m(r)\right)^2}{r^2 f}\frac{2f}{r\left(r - 2m(r)\right)}\left(4\pi r^3 P + m(r)\right) \\ &\cdot 2\frac{rm'(r) - m(r)}{\left(r - 2m(r)\right)^2} \\ &- \frac{1}{4}\frac{r - 2m(r)}{rf^2}\frac{4f^2}{r^2\left(r - 2m(r)\right)^2}\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2 \\ &+ \frac{1}{2r}\frac{r - 2m(r)}{rf}\frac{2f}{r}\frac{4\pi r^3 P + m(r)}{r - 2m(r)} \\ &- \frac{1}{2r}\frac{\left(r - 2m(r)\right)^2}{r^2}\cdot 2\frac{rm'(r) - m(r)}{\left(r - 2m(r)\right)^2} \end{aligned} \tag{58}$$

Uređivanjem ovog izraza dolazimo do:

$$\begin{aligned} 8\pi P = \frac{1}{r^3}\frac{1}{r - 2m(r)}&\Bigg\{2\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2 \\ &+ r\left(r - 2m(r)\right)\left(12\pi r^2 P + 4\pi r^3\frac{dP}{dr} + 4\pi r^2\rho\right) \\ &- \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(2r - 2m(r) - 8\pi r^3\rho\right) \\ &- \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(4\pi r^3\rho - m(r)\right) \\ &- \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)^2\Bigg\} \\ &+ \frac{1}{r^3}\left(4\pi r^3 P - 4\pi r^3\rho + m(r)\right) \end{aligned} \tag{59}$$

gdje smo umjesto $m'(r)$ koristili rezultat iz jednadžbe (44). Daljnjim pojednostavljenjem dobivamo:

$$\begin{aligned} 8\pi P = \frac{1}{r^3}\frac{1}{r - 2m(r)}&\Bigg\{\left(4\pi r^3 P + m(r)\right) \\ &\cdot\left(4\pi r^3 P + m(r) - 2r + 2m(r) + 8\pi r^3\rho - 4\pi r^3\rho + m(r)\right) \\ &+ 4\pi r^4\left(r - 2m(r)\right)\frac{dP}{dr} + 4\pi r^3\left(r - 2m(r)\right)\left(3P - \rho\right)\Bigg\} \\ &+ 4\pi\left(P - \rho\right) + \frac{2}{r^3}m(r) \end{aligned} \tag{60}$$

Pomnožimo li sve s $r^3\left(r - 2m(r)\right)$, dobit ćemo sljedeće:

$$\begin{aligned} 8\pi r^3\left(r - 2m(r)\right)P &= \left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\cdot 4\pi r^3\left(P + \rho\right) \\ &- 2\cdot\left(4\pi r^3 P + m(r)\right)\left(r - 2m(r)\right) \\ &+ 4\pi r^4\left(r - 2m(r)\right)\frac{dP}{dr} + 4\pi r^3\left(r - 2m(r)\right)\left(3P + \rho\right) \\ &+ 4\pi r^3\left(r - 2m(r)\right)\left(P - \rho\right) + 2m(r)\left(r - 2m(r)\right) \end{aligned} \tag{61}$$

Sad iz gornje jednadžbe izrazimo dP/dr te grupiramo iste stvari.

$$\begin{aligned}4\pi r^4\left(r-2m(r)\right)\frac{dP}{dr} &= -4\pi r^3\left(P+\rho\right)\left(4\pi r^3 P+m(r)\right)\\ &+\left(r-2m(r)\right)\cdot\Big(8\pi r^3 P+8\pi r^3 P+2m(r)\\ &-12\pi r^3 P-4\pi r^3 P-2m(r)\Big)\end{aligned} \tag{62}$$

gdje se svi članovi u zadnjoj zagradi pokrate. Uređivanjem izraza tako da $P'(r)$ bude sam na lijevoj strani jednadžbe, dobit ćemo:

$$\frac{dP}{dr}=-\frac{P+\rho}{r}\frac{4\pi r^3 P+m(r)}{r-2m(r)} \tag{63}$$

što je rezultat poznat kao Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV) jednadžba hidrostatičke ravnoteže.
U Newtonovom limesu $P\leq\rho$ i $m(r)\leq r$, jednadžba se reducira na Newtonovu jednadžbu hidrostatičke ravnoteže.

$$\frac{dP}{dr}\approx-\frac{\rho m(r)}{r^2} \tag{64}$$

Konačno, za statičnu i sferno-simetričnu fluidnu zvijezdu, geometrija prostorvremena opisana je metrikom:

$$ds^2=-e^{2\phi}dt^2+\frac{1}{1-\frac{2m(r)}{r}}dr^2+r^2\left(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{65}$$

gdje je

$$m(r)=4\pi\int_0^r\rho(r')r'^2dr' \tag{66}$$

Nužan i dovoljan uvjet stabilnosti je zadovoljena TOV jednadžba.
Za fluid s poznatom jednadžbom stanja $P=P(\rho)$, ravnotežnu konfiguraciju možemo odrediti tako da proizvoljno zadamo središnju gustoću ρ_c i s time središnji tlak $P_c=P(\rho_c)$. Onda integriramo jednadžbe (63) i (66) prema van do površine zvijezde gdje su $P=\rho=0$ i gdje se rješenje spaja s vakuumskim Schwarzschildovim rješenjem. Konačno, odredit ćemo ϕ integriranjem jednadžbe (52) s rubnim uvjetom $\phi\to 0$ kako $r\to\infty$. Najvažnija razlika ravnotežnih konfiguracija u općoj relativnosti i Newtonovoj gravitaciji je, pretpostavljajući $P\geq 0$ s danom gustoćom $\rho(r)\geq 0$, desna strana jednadžbe (63) je uvijek većeg iznosa u općoj relativnosti nego u Newtonovom limesu. To znači da je za danu gustoću $\rho(r)$ središnji tlak P_c uvijek veći u općoj relativnosti, tj. teže je održavati ravnotežu u općoj relativnosti.

Razmatramo konfiguraciju konstantne gustoće ρ_0 nestlačivog fluida.

$$\rho(r)=\begin{cases}\rho_0 & (r\leq R)\\ 0 & (r>R)\end{cases} \tag{67}$$

Za takvu raspodjelu gustoće, masu dobivamo na način:

$$m(r)=\frac{4}{3}\pi r^3\rho_0 \tag{68}$$

gdje je $r\leq R$, a za svaki $r>R$ masa je ukupna masa zvijezde. Newtonova jednadžba hidrostatske ravnoteže (64) integracijom od r do R daje:

$$P(R)-P(r)=-\frac{4\pi}{3}\rho_0^2\int_r^R rdr=-\frac{2\pi}{3}\rho_0^2\left(R^2-r^2\right) \tag{69}$$

Budući da tlak na površini zvijezde iščezava, dobivamo:

$$P(r)=\frac{2\pi}{3}\rho_0^2\left(R^2-r^2\right) \tag{70}$$

Središnji tlak je onda:

$$P_c=\frac{2\pi}{3}\rho_0^2R^2 \tag{71}$$

koji se može izraziti preko ukupne mase zvijezde M koja je određena kao:

$$M=m(R)=4\pi\int_0^R\rho_0r^2dr=\frac{4\pi}{3}\rho_0R^3 \tag{72}$$

pa iz tog izraza uređivanjem slijedi:

$$P_c=\left(\frac{\pi}{6}\right)^{\frac{1}{3}}\rho_0^{\frac{4}{3}}M^{\frac{2}{3}} \tag{73}$$

te je taj izraz konačan za sve vrijednosti ρ_0 i R. To znači da se ravnoteža može postići za dovoljno velike tlakove.
Nadalje, integriramo (63), jednadžbu hidrostatske ravnoteže opće relativnosti. Prvi korak je ubacivanje gustoće ρ_0 i formule za $m(r)$.

$$\begin{aligned}\frac{dP}{dr}&=-\frac{P+\rho_0}{r}\frac{4\pi r^3P+\frac{4\pi}{3}r^3\rho_0}{r-\frac{8\pi}{3}r^3\rho_0}\\ \frac{dP}{P+\rho_0}&=-\frac{dr}{r}\frac{4\pi r^3}{r-\frac{8\pi}{3}r^3\rho_0}\left(P+\frac{\rho_0}{3}\right)\\ \frac{dP}{P^2+\frac{4}{3}\rho_0P+\frac{1}{3}\rho_0^2}&=-\frac{4\pi r^2dr}{r-\frac{8\pi}{3}r^3\rho_0}\end{aligned} \tag{74}$$

Sljedeći korak je integracija u kojoj se koristi $P(R)=0$.

$$\begin{aligned}-\frac{3}{2\rho_0}\ln\left(\frac{\rho_0+3P(r)}{\rho_0+P(r)}\right)&=-4\pi\frac{3}{16\pi\rho_0}\ln\left(\frac{3-8\pi r^2\rho_0}{3-8\pi R^2\rho_0}\right)\\ \frac{\rho_0+3P(r)}{\rho_0+P(r)}&=\frac{\left(3-8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}}{\left(3-8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}}\end{aligned} \tag{75}$$

Dodatnim sređivanjem dolazimo do:

$$\begin{aligned}&\left(\rho_0+3P(r)\right)\left(3-8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}=\\ &\qquad\left(\rho_0+P(r)\right)\left(3-8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned} \tag{76}$$

$$P(r)\cdot\left(3\left(3-8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}\right)=$$
$$\rho_0\left(\left(3-8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}\right) \quad (77)$$

Konačno dobivamo:

$$P(r)=\rho_0\frac{\left(3-8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(3-8\pi R^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}-\left(3-8\pi r^2\rho_0\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (78)$$

Gornji izraz zapisan preko mase zvijezde dobivamo koristeći relacije:

$$8\pi R^2\rho_0-3=\tfrac{3M}{4\pi R^3}\cdot 8\pi R^2-3=\tfrac{6M}{R}-3=3\cdot\left(\tfrac{2M}{R}-1\right)$$
$$8\pi r^2\rho_0-3=3\left(\tfrac{2Mr^2}{R^3}-1\right)$$

te konačno imamo:

$$P_c=\rho_0\frac{1-\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}{3\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}-1} \quad (79)$$

pa se izraz u limesu $R \gg M$ reducira na Newtonovu vrijednost.
Središnji tlak postaje beskonačan kad je:

$$3\left(1-\frac{2M}{R}\right)^{\frac{1}{2}}=1 \quad (80)$$

tj. kad je:

$$R=\frac{9}{4}M \quad (81)$$

Bitno je zapamtiti pretpostavke koje smo koristili: za gustoću $\rho(r)=\rho_0=$konst. i $\rho_0>0$ te za tlak $P(r)\geq 0$ i $P'(r)<0$.

III. BUCHDAHLOVA GRANICA

U općoj relativnosti, zvijezde konstantne gustoće s masom $M>\frac{4R}{9}$ ne mogu postojati. Drugim riječima, najveća moguća masa zvijezde konstantne gustoće ρ_0 dana je izrazom:

$$M_{max}=\frac{4}{9}R=\frac{4}{9}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}\rho_0^{-\frac{1}{3}}M^{\frac{1}{3}}$$
$$M_{max}=\frac{4}{9(3\pi)^{\frac{1}{2}}}\rho_0^{-\frac{1}{2}} \quad (82)$$

gdje smo koristili vezu mase i radijusa iz (72). Masa zvijezde ima gornju granicu:

$$M\leq\frac{4}{9}R \quad (83)$$

koja je tzv. Buchdahlova granica. Jednakost se postiže samo u slučaju unutarnjeg Schwarzschildovog rješenja kada središnji tlak divergira, čime se usput krši jaki energetski uvjet.
Ako je gustoća $\rho(r)$ nenegativna i monotono padajuća funkcija od r:

$$\rho(r)\geq 0$$
$$\rho'(r)\leq 0$$

za statične sferne zvijezde zadanog radijusa R u općoj relativnosti gornja granica dana je najvećom mogućom vrijednosti mase za homogenu zvijezdu $M_{max}=4R/9$.

A. Zvijezde radijusa R

Postojanje gornje granice na masu zvijezde zadanog radijusa R već dolazi iz uvjeta $h(r)\geq 0$, što daje nužan uvjet statičnosti. Iz $h(r)\geq 0$ i iz izraza (43), možemo izvesti osnovnu granicu:

$$\frac{1}{1-\frac{2M}{R}}\geq 0 \implies \frac{2M}{R}\leq 1 \quad (84)$$

$$M\leq\frac{R}{2} \quad (85)$$

Ovaj uvjet može se izoštriti koristeći uvjet $f(r)\geq 0$ koji kaže da je Killingovo vektorsko polje ξ^μ svugdje vremenskog tipa. Pretpostavljajući samo $\rho\geq 0$ i $\rho'(r)\leq 0$ bez ikakvih pretpostavki o tlaku P, trebamo ispitati dvije nezavisne jednadžbe iz Einsteinovih (36)-(40) koje ne uključuju P. Budući da smo iz jednadžbe (36) odredili $h(r)$, jednadžba koja preostaje je razlika r i θ komponente:

$$G_{rr}-G_{\theta\theta}=0$$
$$\frac{1}{r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}-\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{h(r)}\right)-\frac{1}{2}\frac{f''(r)}{f(r)h(r)}+\frac{1}{4}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)}$$
$$+\frac{1}{4}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)}-\frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}+\frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h^2(r)}=0 \quad (86)$$

Rješenje za $h(r)$ ubacit ćemo u drugi i zadnji član gornjeg izraza jer su ti članovi slobodni u odnosu na $f(r)$. Prije toga izraz se malo sredi:

$$\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}-\frac{1}{2}\left\{\frac{f''(r)}{f(r)h(r)}-\frac{1}{2}\frac{f'(r)h'(r)}{f(r)h^2(r)}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\frac{(f'(r))^2}{f^2(r)h(r)}\right\}=\frac{1}{r^2}\left(1-\frac{1}{h(r)}\right)-\frac{1}{2r}\frac{h'(r)}{h(r)} \quad (87)$$

$$\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}-\frac{1}{2}\left\{\frac{f''(r)}{f(r)h(r)}-\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}\cdot\right.$$
$$\left.\cdot\left(\frac{h'(r)}{h(r)}+\frac{f'(r)}{f(r)}\right)\right\}=\frac{1}{r^2}-\frac{1}{r^2}\frac{r-2m(r)}{r} \quad (88)$$
$$-\frac{2}{2r}\frac{\left(r-2m(r)\right)^2}{r^2}\frac{rm'(r)-m(r)}{\left(r-2m(r)\right)^2}$$

$$\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2}\left\{\frac{f''(r)}{f(r)h(r)} - \frac{f'(r)}{2}\frac{f(r)h'(r)+h(r)f'(r)}{f^2(r)h^2(r)}\right\}$$
$$= \frac{1}{r^3}\left(r - r + 2m(r) - r\frac{dm(r)}{dr} + m(r)\right) \tag{89}$$

Izraz na desnoj strani preoblikujemo:

$$-\frac{1}{r^3}\left(r\frac{dm(r)}{dr} - 3m(r)\right) = -r\frac{rm'(r) - 3m(r)}{r^4} \tag{90}$$

i prepoznajemo kao:

$$-r\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \tag{91}$$

Nadalje, u izrazu na lijevoj strani iz zagrade izlučujemo $(f(r)h(r))^{-1/2}$:

$$\frac{1}{2r}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{f(r)h(r)}}\left\{\frac{f''(r)\sqrt{f(r)h(r)}}{f(r)h(r)}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\frac{f'(r)\sqrt{f(r)h(r)}}{f^2(r)h^2(r)}\left(f(r)h'(r)+h(r)f'(r)\right)\right\} \tag{92}$$
$$= -r\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right)$$

Sve pomnožimo s $-r^{-1}$:

$$-\frac{1}{2r^2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{1}{\sqrt{f(r)h(r)}}\left\{\frac{f''(r)\sqrt{f(r)h(r)}}{f(r)h(r)}\right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}\frac{f(r)h'(r)+h(r)f'(r)}{\sqrt{f(r)h(r)}}\right\} = \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \tag{93}$$

Zadnji izraz na lijevoj strani prepoznajemo kao derivaciju izraza $\sqrt{f(r)h(r)}$ po r pa pišemo:

$$-\frac{1}{2r^2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{1}{\sqrt{f(r)h(r)}}\left\{\frac{f''(r)\sqrt{f(r)h(r)}}{f(r)h(r)}\right.$$
$$\left. -\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{f(r)h(r)}\right)\right\} = \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \tag{94}$$

Promatranjem izraza unutar vitičaste zagrade na lijevoj strani prepoznajemo derivaciju izraza $f'(r)/\sqrt{f(r)h(r)}$ po r.

$$-\frac{1}{2r^2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)} + \frac{1}{2r}\frac{1}{\sqrt{f(r)h(r)}}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'(r)}{\sqrt{f(r)h(r)}}\right)$$
$$= \frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right)$$
$$\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{f'(r)}{\sqrt{f(r)h(r)}}\right) - \frac{1}{r^2}\frac{f'(r)}{f(r)h(r)}\right\} \tag{95}$$
$$= \sqrt{f(r)h(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right)$$

Sad unutar vitičaste zagrade prepoznajemo derivaciju izraza $f'(r)/\left(r\sqrt{f(r)h(r)}\right)$.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{f'(r)}{2r\sqrt{f(r)h(r)}}\right) = \sqrt{f(r)h(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \tag{96}$$

gdje ćemo na kraju prepoznati derivaciju funkcije $\sqrt{f(r)}$ u zagradi s lijeve strane.

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d}{dr}\sqrt{f(r)}\right) = \sqrt{f(r)h(r)}\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \tag{97}$$

Budući da se gustoća materije smanjuje s radijusom $\rho'(r) \leq 0$, prosječna gustoća koja je proporcionalna s $m(r)/r^3$, također monotono pada s r. Iz toga se piše:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{m(r)}{r^3}\right) \leq 0$$
$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d\sqrt{f(r)}}{dr}\right) \leq 0 \tag{98}$$

Integracijom prema unutra s površine zvijezde, tj. vrijednosti $r = R$ do nekog proizvoljnog r, dobivamo:

$$\frac{1}{R\sqrt{h(R)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(R) - \frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(r) \leq 0$$
$$\frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(r) \geq \frac{1}{R\sqrt{h(R)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(R) \tag{99}$$

Sad ubacujemo dobivene izraze za $f(R)$ i $h(R)$ od ranije. Bitno je obratiti pozornost na glatko spajanje unutarnjih i vanjskih Schwarzschilovih rješenja na granici $r = R$.

$$\frac{1}{r\sqrt{h(r)}}\frac{d\sqrt{f}}{dr}(r) \leq \frac{1}{R}\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\frac{d}{dr}\left(\sqrt{1-\frac{2M}{r}}\right)_{r=R}$$
$$= \frac{1}{R}\sqrt{1-\frac{2M}{R}}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2M}{R^2}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{2M}{R}}}$$
$$= \frac{M}{R^3} \tag{100}$$

Obje strane množimo s $r\sqrt{h(r)}$ da dobijemo izoliranu derivaciju funkcije $\sqrt{f(r)}$ po r.

$$\frac{d\sqrt{f(r)}}{dr} \geq r\sqrt{h(r)}\frac{M}{R^3} \tag{101}$$

Opet se integrira prema unutra, od R do 0.

$$\sqrt{f(R)} - \sqrt{f(r)} \geq \frac{M}{R^3}\int_0^R r\sqrt{h(r)}dr$$
$$\sqrt{f(0)} \leq \sqrt{1-\frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^3}\int_0^R \sqrt{\frac{r}{r-2m(r)}}rdr \tag{102}$$

gdje smo kao i ranije koristili $\sqrt{f(R)} = \sqrt{1 - \frac{2M}{R}}$ kao i eksplicitno rješenje (43) za $h(r)$. Iz uvjeta $\rho'(r) \leq 0$ uočavamo da $m(r)$ ne smije biti manje nego što bi bilo u slučaju homogene gustoće zvijezde $\rho'(r) = 0$.

$$m(r) \geq \frac{Mr^3}{R^3} \tag{103}$$

te će izraz s desne strane jednadžbe (102) biti najmanji kad je u gornjoj jednadžbi jednakost.

$$\begin{aligned} \sqrt{f(0)} &\leq \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^3} \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}}} r dr \\ &= \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{M}{R^3} \cdot \frac{R^3}{2M} + \frac{M}{R^3} \cdot \frac{R^3}{2M} \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \\ &= \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} - \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{104}$$

Nužan uvjet statičnosti $\sqrt{f}(0) \geq 0$ daje:

$$\begin{gathered} \frac{3}{2}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \geq \frac{1}{2} \\ \frac{2M}{R} \leq \frac{8}{9} \implies M \leq \frac{4R}{9} \end{gathered} \tag{105}$$

što je traženi rezultat. U ovom slučaju nije bilo nikakvih pretpostavki na tlak P, koji nije ni ušao u izvod.

IV. ZAKLJUČAK I DISKUSIJA

Ispitali smo omjer mase i radijusa $2M/R$ fizikalno mogućeg statičnog sferno-simetričnog objekta obične gravitirajuće materije u općoj relativnosti. Pokazali smo da teorija uvijek daje gornju granicu omjera koji strogo leži ispod vrijednosti koju poprima kad se stvara horizont. Važno je napomenuti da se gornje granice pojavljuju i u Newtonovoj teoriji, ali u tom slučaju ovise o jednadžbi stanja.

Buchdahlov teorem koristan je u promatranju alternativa crnim rupama. Pokušaji su inspirirani informacijskim paradoksom, objašnjenjem tamne tvari i činjenicom da su opažanja crnih rupa potpomognuta isključivanjem poznatih astrofizičkih alternativa kao što su neutronske zvijezde radije nego direktnim opažanjem. Da bi se konstruirala dobra alternativa, potrebna je ekstremna kompaktnost objekta i kršenje Buchdahlove nejednakosti, što znači da bi jedna od pretpostavki teorema bila netočna. Korištene pretpostavke su:

- Opća relativnost je točna teorija gravitacije
- Rješenje je sferno simetrično
- Materija je opisana idealnim fluidom
- Fluid je ili izotropan ili blago anizotropan, u smislu da je tangencijalni tlak manji od radijalnog $P_r \geq P_\theta$
- Radijalni tlak i gustoća su pozitivni, $P_r \geq 0$, $\rho \geq 0$
- gustoća energije se smanjuje prema van $\rho'(r) \leq 0$

Može se napraviti klasifikacija na osnovu pretpostavki koje su zanemarene. Također, granica na $2M/R$ ima direktne opažačke posljedice jer ograničava mogući gravitacijski crveni pomak[9] sferno-simetričnog objekta.

Glavne osnove proširenja teorije su proširivanje pretpostavke vrste tvari ili simetrije problema. Najčešće se promatra anizotropna tvar ili rotacija. U [1] cilj rada je bio proširiti početne pretpostavke koje su inače iznimno ograničavajuće. Naime, opisana ravnoteža se ne bi postigla ni u mjehuriću sapunice, a sigurno ne aproksimira nijednu poznatu topološki stabilnu konfiguraciju polja. Takve konfiguracije općenito neće biti kompaktne. U anizotropnom slučaju, s monotono padajućom gustoćom, granica 8/9 nastavlja vrijediti sve dok je tangencijalni tlak jednak ili manji od radijalnog, kroz cijeli volumen ako je M zamijenjena kvazi-lokalnom masom. Također, može se pokazati da je omjer $2M/R$ strogo manji od 1 konstrukcijom eksplicitne gornje granice koja ovisi samo o omjeru tlakova i promjeni gustoće tvari.

I u [2] autori polaze od anizotropne pretpostavke i električki nabijene materije koja se u prigodnim limesima dovede do Buchdahlove granice te pokazuje vezu maksimalne moguće kompaktnosti i anizotropije tlaka. Označavajući $\Delta = P_r - P_\theta$ kao mjeru anizotropije, uočava se obrnuto proporcionalna veza između vrijednosti gornje granice omjera $2M/R$ i Δ.

U [3], granica se pokušava izoštriti stvarajući uvjete na omjer P/ρ, gdje je P radijalni tlak, a ρ gustoća tvari, tako da omjer bude ograničen, pa se dobije granica na $2M/R$ u ovisnosti o P/ρ. Posebno, pretpostavljajući dominantni energetski uvjet, dobije se $2M/R \leq 6/7$.

Dodatno, osim na globalnu kompaktnost $2M/R$, ograničenja se mogu postaviti na:

- unutarnju kompaktnost $\frac{2m(r)}{r}$
- lokalno mjerenu akceleraciju zbog gravitacije
- komponente metrike prostorvremena
- razne linearne kombinacije tlaka i gustoće

Ključni rezultati uključuju granice na tlak $P(r)$ koje uključuju Chandrasekharovu granicu i niz ograničenja povezanih sa Schwarzschildovom unutarnjom geometrijom, od čega sve prelazi dosadašnju raspravu.

---

[9] *Gravitational redshift* – elektromagnetski valovi koji putuju iz gravitacijske potencijalne jame gube energiju, što se ispoljava u povećanju valne duljine i smanjenju frekvencije.

[1] J. Guven and N. O. Murchadha, Bounds on $2m/r$ for static spherical objects, Phys. Rev. D **60**, 084020 (1999).

[2] R. Sharma, A. Ghosh, S. Bhattacharya, and S. Das, Anisotropic generalization of buchdahl bound for specific stellar models, Eur. Phys. J. C **81**, 527 (2021).

[3] J. M. Heinzle, Bounds on 2m/r for static perfect fluids (2007).

[4] R. M. Wald, *General Relativity* (The University of Chicago Press, 1984).

[5] S. M. Carroll, *Spacetime and Geometry* (Addison Wesley, 2004).

[6] H. A. Buchdahl, General relativistic fluid spheres, Phys. Rev. **116**, 1027 (1959).

[7] H. Bondi, Massive spheres in general relativity, Proc. R. Soc. Lond. **A282**, 303 (1964).

[8] D. Martin and M. Visser, Bounds on the interior geometry and pressure profile of static fluid spheres, Classical and Quantum Gravity **20**, 3699 (2003).

[9] V. Cardoso and P. Pani, *Testing the nature of dark compact objects: a status report*, Tech. Rep. (Centra, University of Lisabon, CERN, University of Rome, 2019) 3.1, 3.3, 3.4.

[10] L. Andersson, *Report on GRG18, Session A3, Mathematical studies of field equations*, Tech. Rep. (Albert Einstein Institute and Department of Mathematics, University of Miami, Apr.2008) odjeljak 1.