# Asimptotska sloboda u ne-Abelovim teorijama

Ivan Vujmilović*
*Prirodoslovno-matematički fakultet, Fizički odsjek*
*Bijenička cesta 32, Zagreb*

Mentor: dr. sc. Goran Duplančić†
*Institut Ruđer Bošković, Zavod za teorijsku fiziku*
*Bijenička cesta 54, Zagreb*
(Dated: 14. siječnja 2023.)

Polazno od lagranžijana koji posjeduje baždarnu invarijantnost na lokalne transformacije proizvoljne U(N) ili SU(N) grupe i njegove kvantizacije, analizira se ponašanje teorije na razini jedne petlje. Källén–Lehmannova spektralna reprezentacija korelacijskih funkcija dvaju fermionskih kao i dvaju gluonskih polja ukazuje na nužnost renormalizacije svih polja i parametara koji se pojavljuju u teoriji. Time početni lagranžijan izgrađen od tzv. golih polja i parametara razdvajamo na renormalizirani dio te dio koji se sastoji od protučlanova. Nametanjem renormalizacijskih uvjeta na proizvoljnoj energijskoj skali omogućujemo si izračun vrijednosti dobivenih protučlanova i odstranjivanje divergencija dijagrama s jednom petljom. Kao prirodna posljedica neovisnosti primijenjenih uvjeta o energijskoj skali dolazi do pojave klizanja parametra vezanja fermionskog i gluonskog polja. Efekt klizanja analiziramo primijenjujući Callan-Symanzikovu jednadžbu na pogodno odabrane korelacijske funkcije. Pritom dolazimo do iznenađujućeg rezultata o smanjenju jakosti vezanja kako energija procesa raste, pod određenim uvjetima. Konačno, dana je fizikalna interpretacija porijekla asimptotske slobode kao i njezine implikacije u ostalim područjima fizike.

## 1. UVOD

U prvoj polovici dvadesetog stoljeća pronađena je teorija (lagranžijan) koja je opisivala međudjelovanje fermionskog i elektromagnetskog polja:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - e\bar{\psi}A\!\!\!/\psi, \qquad (1.1)$$

uz definiciju elektromagnetskog (EM) tenzora:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \qquad (1.2)$$

Osim simetrije na globalne transformacije fermionskog polja iz grupe U(1)

$$\psi'(x) = e^{i\alpha}\psi(x), \qquad (1.3)$$

lagranžijan (1.1) posjeduje svojstvo invarijantnosti na istovremenu lokalnu U(1) transformaciju fermionskog polja te baždarnu transformaciju fotonskog polja:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha(x)}\psi(x), \qquad (1.4)$$

$$A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \frac{1}{e}\partial^\mu\alpha(x), \qquad (1.5)$$

odakle se uvrštavanjem (1.4) i (1.5) u (1.1) dobiva jednakost:

$$\mathcal{L}'_{QED} = \mathcal{L}_{QED}. \qquad (1.6)$$

Pedesetih godina prošloga stoljeća Yang i Mills [1] pronašli su poopćenu inačicu lagranžijana (1.1) zahtjevajući invarijantnost na lokalne i baždarne transformacije iz proizvoljne U(N) ili SU(N) grupe. Svaki element (oznaka: $U$) U(N) ili SU(N) grupe može se prikazati pomoću eksponencijalnog preslikavanja linearne kombinacije tzv. generatora grupe (oznaka: $t^a$) pomnožene s imaginarnom jedinicom na sljedeći način:

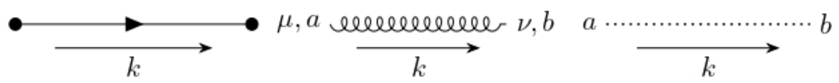
$$U = e^{i\alpha_a t^a}, \qquad (1.7)$$

gdje vrijedi $\alpha_a \in \mathbb{R}$. Kod lokalnih grupa koeficijenti $\alpha_a$ postaju funkcije prostor-vremena, odnosno $\alpha_a = \alpha_a(x)$. U slučaju U(N) grupe generatori $t^a$ čine skup od $N^2$ linearno neovisnih $N\times N$ hermitskih matrica, a kod SU(N) skup od $N^2 - 1$ linearno neovisnih $N\times N$ hermitskih matrica čiji je trag jednak nuli. Jedan od osnovnih rezultata teorije grupa unitarnih transformacija jest oblik komutatora generatora, opisan s potpuno antisimetričnim realnim tenzorom $f^{abc}$:

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c. \qquad (1.8)$$

Konvencionalno se grupe u kojima je rezultat kompozicije (množenja) elemenata grupe ovisan o njihovom poretku nazivaju ne-Abelovim grupama. Kod Abelovih grupa rezultat množenja elemenata grupe ne ovisi o njihovom poretku. U slučaju U(N) i SU(N) koji ovdje razmatramo vrijedi također posebno da je grupa ne-Abelova ako i samo ako posjeduje netrivijalne komutacijske relacije generatora, kao što je to navedeno izrazom (1.8). Zato je U(1) grupa Abelova, budući da posjeduje samo jedan generator ($1 \in \mathbb{R}$) koji očito komutira sa samim sobom. Međutim, općenita U(N) ili SU(N) grupa

* ivan.vujmilovic@student.pmf.hr
† gorand@irb.hr




Slika 1. Prikaz propagatora (2.4), (2.6) i (2.8) u Feynmanovim dijagramima redom kako se izvode u drugom poglavlju.

će biti ne-Abelova. Za detaljne izvode i dokaze izraza (1.7) i (1.8) kao i rezultata koje ovdje samo navodimo vidjeti [3].
Yang i Mills pritom su dobili sljedeći rezultat koji ovdje samo navodimo zbog sažetosti (za moderniji tretman problema izgradnje općenite ne-Abelove teorije s baždarnom simetrijom kao i njezine interpretacije vidjeti [2]):

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\not{\partial} - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F^a_{\mu\nu} + g\bar{\psi}\not{G}^a t^a\psi \\ &- \frac{1}{2\eta}(\partial_\mu G^{\mu a})^2 + \bar{c}^a(-\delta^{ac}\partial_\mu\partial^\mu - g f^{abc}\partial_\mu G^{\mu b})c^c,\end{aligned} \tag{1.9}$$

s odgovarajućom definicijom gluonskog tenzora:

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu + g f^{abc} G^b_\mu G^c_\nu. \tag{1.10}$$

U lagranždijanu (1.9) pojavljuju se također polja $c^a$ čije je konvencionalno ime Faddeev-Popovljevi duhovi (u nastavku samo duhovi). Njihovo osnovno obilježje je to da su skalarna polja (spina 0) koja zadovoljavaju antikomutacijske relacije, čime narušavaju teorem spina i statistike (vidi [4] i [5]). Stoga se duhovi mogu pojavljivati samo unutar zatvorenih petlji u dijagramima. Pripadna lokalna transformacija fermionskog polja i baždarna transformacija gluonskog polja potom redom glasi:

$$\psi'(x) = e^{i\alpha^a(x)t^a}\psi(x) = U(x)\psi(x), \tag{1.11}$$

$$G'^a_\mu t^a = U(x)\left(G^a_\mu t^a + \frac{i}{g}\partial_\mu\right)U^\dagger(x). \tag{1.12}$$

Za poseban slučaj infinitezimalnih transformacija razvojem operatora $U(x)$ (definicija je dana u (1.7)) i $U^\dagger(x)$ u rel. (1.12) po funkcijama $\alpha^a(x)$ dobiva se također sljedeći koristan izraz:

$$G'^a_\mu = G^a_\mu + f^{abc}G^b_\mu\alpha^c + \frac{1}{g}\partial_\mu\alpha^a. \tag{1.13}$$

Iako na prvi pogled ne-Abelova teorija izgleda vrlo slično kvantnoj elektrodinamici, postoji nekoliko faktora koji bitno kompliciraju račune u općoj teoriji. Broj baždarnih bozona (gluona, konvencionalno se označavaju s $G^{\mu a}$) koji se pojavljuju u opisanoj teoriji odgovara broju generatora odgovarajuće grupe s obzirom na koju je ukupni lagranžijan simetričan (ima ih $N^2$ ako je grupa transformacija U(N) ili $N^2 - 1$ u slučaju SU(N)). Gluoni u općoj ne-Abelovoj teoriji igraju ulogu analognu fotonu u kvantnoj elektrodinamici.
Nekomutativnost generatora grupe simetrija ostavlja trag u definiciji gluonskog tenzora (1.10) čime se ostvaruju 3-gluonski i 4-gluonski vrhovi (osim u jednostavnom U(1) slučaju kad strukturne konstante $f^{abc}$ iščezavaju) kao što ćemo vidjeti kasnije pri kvantizaciji lagranžijana (1.9).

## 2. KVANTIZACIJA TEORIJE

Ukratko ćemo dobiti i popisati Feynmanova pravila (u impulsnom prostoru) potpune ne-Abelove teorije (1.9) koju smo naveli tijekom uvodnog poglavlja da bismo postigli usuglašenost notacije s njenom kasnijom uporabom u četvrtom poglavlju.

Izvod propagatora je najjednostavniji budući da se po definiciji radi o Greenovim funkcijama koje zadovoljavaju odgovarajuće jednadžbe gibanja dobivene iz kinetičkog dijela lagranžijana za fermionska i gluonska polja. Stoga za fermione imamo:

$$(i\not{\partial} - m)G_f(x,y) = i\delta^{(4)}(x-y). \tag{2.1}$$

U jednakost (2.1) ubacujemo Fourierov transformat propagatora u impulsnom prostoru:

$$G_f(x,y) = \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,\widetilde{G}_f(k)e^{-ik(x-y)}, \tag{2.2}$$

odakle slijede rezultati:

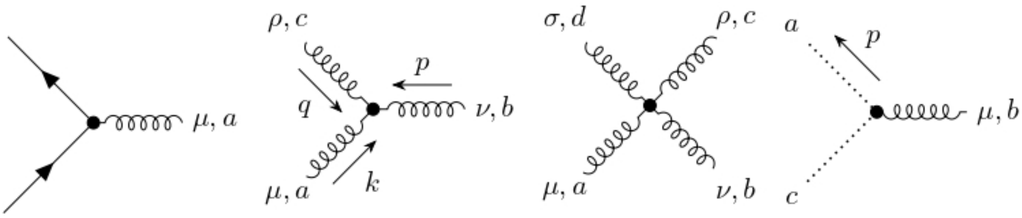
$$(\not{k} - m)\widetilde{G}_f(k) = i \tag{2.3}$$

i

$$\widetilde{G}_f(k) = i\frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2}. \tag{2.4}$$

Odgovarajuća definicijska jednadžba za gluonski propagator glasi:

$$\partial_\alpha\partial^\alpha D^\mu{}_{\nu ab} + \left(\frac{1}{\eta} - 1\right)\partial^\mu\partial_\alpha D^\alpha{}_{\nu ab} = i\delta^{(4)}(x-y)\delta^\mu{}_\nu\delta_{ab}, \tag{2.5}$$




Slika 2. Pripadni vrhovi (2.9), (2.10), (2.11) i (2.12) u općoj ne-Abelovoj teoriji koju razmatramo prikazani redom kako su izvedeni u drugom poglavlju.

iz koje izravno vidimo da Faddeev-Popovljev član $\left(-\frac{1}{2\eta}(\partial_\mu G^{\mu a})^2 \text{ u izrazu (1.9)}\right)$ narušava baždarnu simetriju lagranžijana (1.9) (a ujedno i uključuje često korištene posebne slučajeve poput Lorenzovog uvjeta $\partial_\mu G^{\mu a} = 0$). Rješenje te jednadžbe ima u impulsnom prostoru jednostavan zatvoren oblik koji se dobiva ponovnim uvrštavanjem Fourierovog transformata propagatora u jednakost (2.5):

$$\widetilde{D}^{ab}_{\mu\nu}(k) = -\frac{i}{k^2}\left(g_{\mu\nu} - (1-\eta)\frac{k_\mu k_\nu}{k^2}\right)\delta^{ab}. \tag{2.6}$$

Ako pokušamo isključiti spomenuti Faddeev-Popovljev član puštanjem parametra $\eta$ u beskonačnost gluonski propagator postaje nedefiniran.

Za propagator duhova iz definicijske jednadžbe za Greenovu funkciju

$$\partial_\mu \partial^\mu G^{ab}(x,y) = i\delta^{(4)}(x-y)\delta^{ab} \tag{2.7}$$

dobiva se:

$$\widetilde{G}^{ab}_c(k) = \frac{i\delta^{ab}}{k^2}. \tag{2.8}$$

Preostaje još pronaći kakva su međudjelovanja dopuštena ne-Abelovom teorijom. Najlakše ih je odrediti "skidanjem" polja s članova u lagranžijanu koji ih imaju tri ili više u umnošku nakon zbrajanja svih mogućih kontrakcija s vanjskim poljima. Prva vrsta međudjelovanja koja se tako nalazi je vrh fermion-gluon-fermion s pridruženim Feynmanovim pravilom:

$$ig\gamma^\mu t^a. \tag{2.9}$$

On odgovara fermion-foton-fermion vrhu iz kvantne elektrodinamike.

Sljedeća dva vrha imaju izravan izvor u načelu lokalne baždarne simetrije na kojoj se teorija temelji i uključuju strukturne konstante definirane izrazom (1.8). Pojavljuju se redom 3-gluonski vrh

$$\begin{aligned} gf^{abc}(&g^{\mu\nu}(k-p)^\rho + \\ &g^{\nu\rho}(p-q)^\mu + \\ &g^{\mu\rho}(q-k)^\mu) \end{aligned} \tag{2.10}$$

i 4-gluonski vrh

$$\begin{aligned} -ig^2(&f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + \\ &f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho}) + \\ &f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Na koncu je moguće i duh-gluon-duh međudjelovanje, opisano izrazom

$$gf^{abc}p^\mu. \tag{2.12}$$

## 3. RENORMALIZACIJA

Za početak moramo vidjeti kako izgleda korelacijska funkcija dvaju fermionskih polja s uključenim međudjelovanjima, odnosno kako se promijeni u odnosu na korelacijsku funkciju slobodne teorije. U slobodnoj teoriji ona ima jasnu fizikalnu interpretaciju kao amplituda širenja čestice iz prostorno-vremenske točke $y$ u točku $x$ i odgovara Greenovoj funkciji jednadžbe slobodnog polja pomnoženoj s imaginarnom jedinicom, što smo i pokazali u izvodu propagatora u prethodnom poglavlju. Korelacijska funkcija dvaju slobodnih fermionskih polja je 16-komponentna funkcija i može se definirati preko vremenski uređenih produkata:

$$\begin{aligned} G_0^{(2)}(x,y)_{\alpha\beta} &= \langle 0|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|0\rangle \\ &= \langle 0|\theta(x^0-y^0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \\ &- \theta(y^0-x^0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|0\rangle. \end{aligned} \tag{3.1}$$

U teoriji s prisutnim međudjelovanjima definicija ostaje vrlo slična:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x,y)_{\alpha\beta} &= \langle \Omega|T\{\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y)\}|\Omega\rangle \\ &= \langle \Omega|\theta(x^0-y^0)\psi_\alpha(x)\bar{\psi}_\beta(y) \\ &- \theta(y^0-x^0)\bar{\psi}_\beta(y)\psi_\alpha(x)|\Omega\rangle. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Međutim, postoje neke razlike. Uključivanjem interakcija stanje najniže energije sustava se mijenja. Sa slobodnim poljima to je vakuum, bez čestica ($|0\rangle$), a u drugom slučaju stanje najniže energije ne odgovara nužno izostanku svih čestica, zato se koristi drugačija oznaka ($|\Omega\rangle$). Druga razlika je u puno kompliciranijoj strukturi polja koja se pojavljuju u (3.2) za razliku od jednostavnog Fourierovog integrala u kojem se nalaze jednočestični operatori stvaranja i poništenja kod slobodnog Diracovog polja.

Peskin [2] i Weinberg [6] računom u sklopu pune teorije polja (uključujući stoga i prisutnost međudjelovanja) pokazuju da je opća dvofermionska korelacijska funkcija u paritetno i CPT invarijantnim teorijama (u koje spada ne-Abelova teorija opisana lagranžijanom (1.9)) dana tzv. Källén–Lehmannovom spektralnom reprezentacijom korelacijske funkcije:

$$\begin{aligned} G^{(2)}(x,y) = \langle\Omega|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|\Omega\rangle = \\ \int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\, e^{-ik(x-y)} \int \frac{dM}{2\pi}\, \frac{i(\not{k}\rho_1(M^2)+\rho_2(M^2))}{k^2-M^2}, \end{aligned} \tag{3.3}$$

gdje spektralne funkcije $\rho_1(M^2)$ i $\rho_2(M^2)$ sadrže informaciju o svim slobodnim odnosno vezanim jednočestičnim i višečestičnim stanjima pune teorije. Tim više, struktura tih funkcija je obilježena polom na $M^2 = \widetilde{m}^2 \neq m^2$ i rezom na višim energijama. Iz (2.4) vidimo da su spektralne funkcije u slučaju slobodne teorije dane kao:

$$\begin{aligned} \rho_{1,sl}(M^2) &= 2\pi\delta(M^2-m^2), \\ \rho_{2,sl}(M^2) &= 2\pi m\delta(M^2-m^2). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Najniži pol fizikalno možemo po uzoru na limes navedenih spektralnih funkcija u slobodnoj teoriji tumačiti kao stvaranje najnižeg netrivijalnog jednočestičnog stanja dopuštenog teorijom; međutim energija na kojoj se nalazi taj pol više ne odgovara nužno masi slobodnog fermiona, već se modificira na masu $\widetilde{m}$. S obzirom da u prirodi ne postoji slobodno Diracovo polje, moramo upravo veličinu $\widetilde{m}$ uzeti kao fizikalnu masu fermionskih čestica. Nadalje, iz izraza (3.3) možemo izolirati dominantan jednočestični doprinos korelacijskoj funkciji koji dolazi od spomenutog pola:

$$\begin{aligned} \widetilde{G}^{(2)}(k) =& iZ_1\frac{\not{k}+\widetilde{m}}{k^2-\widetilde{m}^2} + \\ & \int_{4\widetilde{m}^2}^{\infty} \frac{dM}{2\pi}\, \frac{i(\not{k}\rho_1(M^2)+\rho_2(M^2))}{k^2-M^2}, \end{aligned} \tag{3.5}$$

gdje smo s parametrom $Z_1$ uzeli u račun mogućnost odstupanja spektralnih funkcija u teoriji s međudjelovanjem od onih u izrazu (3.4).
Pogodno nam je redefinirati fermionsko polje na sljedeći način:

$$\psi_r(x) = \frac{\psi(x)}{\sqrt{Z_1}} \tag{3.6}$$

jer tada dominantan jednočestični doprinos korelacijskoj funkciji (redefiniranih) fermionskih polja poprima oblik sličan izrazu (2.4):

$$\begin{aligned} \widetilde{G}_r^{(2)}(k) =& i\frac{\not{k}+\widetilde{m}}{k^2-\widetilde{m}^2} + \\ & \int_{4\widetilde{m}^2}^{\infty} \frac{dM}{2\pi}\, \frac{i(\not{k}\widetilde{\rho}_1(M^2)+\widetilde{\rho}_2(M^2))}{k^2-M^2}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Stoga poopćujemo dosad napravljenu analizu na gluonsko polje i Faddeev-Popovljeve duhove redefinirajući analogno odgovarajuća polja (u nastavku redefinirana polja i parametre nazivamo renormaliziranim):

$$\begin{aligned} G_r^{\mu a}(x) &= \frac{G^{\mu a}(x)}{\sqrt{Z_2}}, \\ c_r^a(x) &= \frac{c^a(x)}{\sqrt{Z_3}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

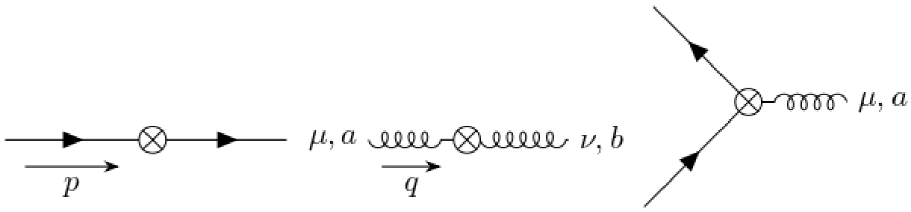
Ubacivanjem renormaliziranih polja u ukupni lagranžijan (1.9) imamo sljedeće (sad početnu masu i konstantu vezanja označavamo s nulom u indeksu, renormalizirane veličine nemaju posebnu oznaku):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} =& Z_1\bar{\psi}(i\not{\partial}-m_0)\psi \\ & -\frac{Z_2}{4}(\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a)(\partial^\mu G^{\nu a} - \partial^\nu G^{\mu a}) \\ & -g_0 Z_2^{\frac{3}{2}} f^{abc} G^{\mu b} G^{\nu c}\partial_\mu G_\nu^a \\ & -\frac{g_0^2 Z_2^2}{4} f^{abc} f^{ade} G^{\mu b} G^{\nu c} G_\mu^d G_\nu^e \\ & +g_0 Z_1\sqrt{Z_2}\bar{\psi}\not{G}^a t^a\psi - \frac{Z_2}{2\eta}(\partial_\mu G^{\mu a})^2 \\ & +Z_3\bar{c}^a(-\delta^{ac}\partial_\mu\partial^\mu - g_0\sqrt{Z_2} f^{abc}\partial_\mu G^{\mu b})c^c. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Nadalje ćemo izraziti lagranžijan u cijelosti preko renormaliziranih fizikalnih veličina (mase i vezanja) kao što smo to napravili za polja, zato je potrebno definirati i pomake njihovih golih vrijednosti od mjerljivih:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= Z_1 - 1, \\ \delta_2 &= Z_2 - 1, \\ \delta_3 &= Z_3 - 1, \\ \delta_m &= Z_1 m_0 - m, \\ \delta_{fgf} &= g_0 Z_1\sqrt{Z_2} - g, \\ \delta_{3g} &= g_0 Z_2^{\frac{3}{2}} - g, \\ \delta_{4g} &= g_0^2 Z_2^2 - g^2, \\ \delta_{cgc} &= g_0 Z_3\sqrt{Z_2} - g. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Time se lagranžijan razdvaja na dva dijela od kojih je prvi identičan početnom (1.9) do na zamjenu golih polja i konstanti njihovim fizikalnim vrijednostima, dok se drugi sastoji od takozvanih protučlanova koji se prepoznaju po svojoj proporcionalnosti s pomakom renorma-




Slika 3. Međudjelovanja (3.12), (3.13) i (3.14) koja proizlaze iz doprinosa protučlanova.

liziranih vrijednosti od prvotnih:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu a}F^a_{\mu\nu} + g\bar{\psi}G\!\!\!/^a t^a\psi \\ &- \frac{1}{2\eta}(\partial_\mu G^{\mu a})^2 + \bar{c}^a(-\delta^{ac}\partial_\mu\partial^\mu - gf^{abc}\partial_\mu G^{\mu b})c^c \\ &+ \bar{\psi}(i\delta_1\partial\!\!\!/ - \delta_m)\psi - \frac{\delta_2}{4}(\partial_\mu G^a_\nu - \partial_\nu G^a_\mu)(\partial^\mu G^{\nu a} - \partial^\nu G^{\mu a}) \\ &- \delta_{3g}f^{abc}G^{\mu b}G^{\nu c}\partial_\mu G^a_\nu - \frac{\delta_{4g}}{4}f^{abc}f^{ade}G^{\mu b}G^{\nu c}G^d_\mu G^e_\nu \\ &+ \delta_{fgf}\bar{\psi}G\!\!\!/^a t^a\psi - \frac{\delta_2}{2\eta}(\partial_\mu G^{\mu a})^2 \\ &+ \delta_3\bar{c}^a(-\delta^{ac}\partial_\mu\partial^\mu)c^c + \delta_{cgc}\bar{c}^a(-f^{abc}\partial_\mu G^{\mu b})c^c \\ &= \mathcal{L}_{ren} + \mathcal{L}_p.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Feynmanova pravila renormaliziranog dijela lagranžijana ostaju jednaka onim izvedenim i popisanim u prethodnom poglavlju, dok iz protučlanova kvantizacijom dobivamo vrhove tretirajući ih kao međudjelovanja iako su neki od njih samo dvočestični. Upravo će nam dvočestični vrhovi za fermionsko polje

$$i(\delta_1 p\!\!\!/ - \delta_m) \tag{3.12}$$

i gluonsko polje

$$-i(q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\delta^{ab}\delta_2 \tag{3.13}$$

biti od velike važnosti u daljnjem perturbativnom računu dijagrama s jednom petljom, kao i protučlan fermion-gluon-fermion međudjelovanja

$$i\delta_{fgf}t^a\gamma^\mu. \tag{3.14}$$

## 4. RENORMALIZACIJSKI UVJETI

Nastavljamo s razmatranjem tri vrste korelacijskih funkcija (k. f.) u impulsnom prostoru. Jedna od njih je dvofermionska k. f. uvedena već u prethodnom poglavlju (s novom podesnijom oznakom $\widetilde{G}^{(2,0)}(p)$), zatim dvogluonska k. f. $\widetilde{G}^{(0,2)}(q)$ i na koncu k. f. koja uključuje dva fermionska te jedno gluonsko polje $\widetilde{G}^{(2,1)}(p, p', q)$. Fermionska i gluonska polja koja se pritom pojavljuju su renormalizirana i opisana u sklopu teorije (3.11). Odabrali smo upravo takve korelacijske funckije zato što je fermion-gluon-fermion interakcija najjednostavniji vrh dopušten teorijom koji sadrži vezanje $g$, a vidjet ćemo u nastavku da se $\widetilde{G}^{(2,1)}(p, p', q)$ može izgraditi iz $\widetilde{G}^{(2,0)}(p)$ i $\widetilde{G}^{(0,2)}(q)$.
Definicije uvedenih korelacijskih funkcija u koordinatnom prostoru su:

$$\begin{aligned}G^{(2,0)}(x,y) &= \langle\Omega|T\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\}|\Omega\rangle, \\ G^{ab\ (0,2)}_{\mu\nu}(x,y) &= \langle\Omega|T\{G^a_\mu(x)G^b_\nu(y)\}|\Omega\rangle, \\ G^{a\ (2,1)}_\mu(x,y,z) &= \langle\Omega|T\{\psi(x)G^a_\mu(y)\bar{\psi}(z)\}|\Omega\rangle.\end{aligned} \tag{4.1}$$

Iako su opći zaključci dosadašnje analize dobiveni egzaktno, kod računa korelacijskih funkcija koristimo račun smetnje na razini granastih dijagrama i dijagrama s jednom petljom. Pored toga, uvodimo pojednostavljenje uzimajući fermione kao bezmasene čestice i koristimo gluonski propagator u Feynmanovom baždarenju ($\eta = 1$), ako nije drugačije navedeno.

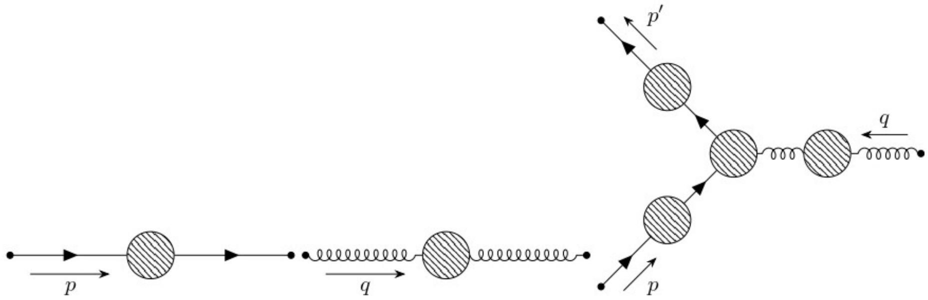
Ukupna korelacijska funkcija dvaju fermionskih polja do razine jedne petlje je dana zbrojem dvaju granastih i jednog jednopetljenog dijagrama:

$$\widetilde{G}^{(2,0)}(p) = \mathcal{A}_1(p) + \mathcal{A}_2(p) + \mathcal{A}_3(p). \tag{4.2}$$

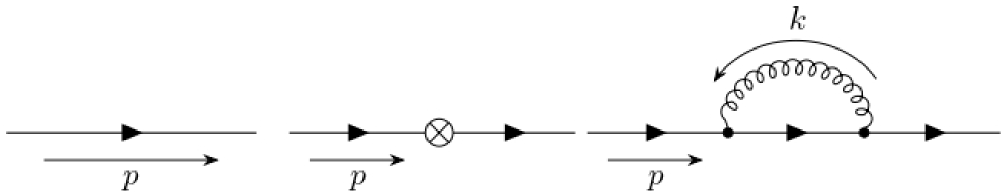
Feynmanovi dijagrami koji stoga doprinose dvofermionskoj korelacijskoj funkciji prikazani su na slici 5. Doprinosi prvog i drugog dijagrama su jednostavni:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= i\frac{p\!\!\!/}{p^2}, \\ \mathcal{A}_2 &= \left(i\frac{p\!\!\!/}{p^2}\right)(i\delta_1 p\!\!\!/)\left(i\frac{p\!\!\!/}{p^2}\right) = -i\delta_1\frac{p\!\!\!/}{p^2}.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Amplitudu petlje u trećem dijagramu dobivamo pomoću Feynmanovih pravila iz drugog poglavlja te Feynmanovom parametrizacijom umnoška nazivnika fermionskog i gluonskog propagatora $\frac{1}{k^2(p+k)^2}$ (opisano u do-




Slika 4. Grafički prikaz korelacijskih funkcija koje razmatramo: $\widetilde{G}^{(2,0)}(p)$, $\widetilde{G}^{(0,2)}(q)$, $\widetilde{G}^{(2,1)}(p,p',q)$.




Slika 5. Feynmanovi dijagrami koji daju najniži doprinos dvofermionskoj korelacijskoj funkciji (do razine jedne petlje).

datku 2):

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\,(ig\gamma^\mu t^a)i\frac{\not{p}+\not{k}}{(p+k)^2}(ig\gamma_\mu t^a)\frac{-i}{k^2} \\
=&(l=k+xp)= \\
=&-g^2C_2(r)\int_0^1 \mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^4l}{(2\pi)^4}\,\gamma^\mu\frac{(1-x)\not{p}}{(l^2+x(1-x)p^2)^2}\gamma_\mu \\
=&2ig^2C_2(r)\not{p}\frac{\Gamma(0)}{(4\pi)^2}\int_0^1 \mathrm{d}x\,(1-x),
\end{aligned} \tag{4.4}$$

gdje smo u trećem retku izveli Wickovu rotaciju $l^0 = il^0_W$, $l^i = l^i_W$ prije primjene relacije (D1.1).
Integrali ovakve vrste pokazuju tzv. logaritamsku divergenciju, koja se u ovom slučaju manifestira kroz prisutnost $\Gamma$ funkcije u rješenju. Zato ćemo iskoristiti metodu dimenzionalne regularizacije koju su uveli 't Hooft i Veltman [7] tako da analitički proširimo integrale koji su divergentni u četiri dimenzije u proizvoljnu kompleksnu dimenziju $d$. Poopćenje dimenzije prostorvremena ima dva najvažnija učinka, prvo je promjena integralne mjere

$$\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\to\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d} \tag{4.5}$$

i modifikacija identiteta vezanih uz $\gamma$ matrice zato što u $d$ dimenzija vrijedi $g^{\mu\nu}g_{\mu\nu}=d$. Time dimenzionalno regularizirana amplituda gluon-fermion petlje postaje:

$$\begin{aligned}
&-g^2C_2(r)\int_0^1 \mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^dl}{(2\pi)^d}\,\gamma^\mu\frac{(1-x)\not{p}}{(l^2+x(1-x)p^2)^2}\gamma_\mu \qquad (4.6)\\
=&ig^2(d-2)C_2(r)\not{p}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\int_0^1 \mathrm{d}x\,\frac{1-x}{(-x(1-x)p^2)^{2-\frac{d}{2}}}.
\end{aligned}$$

Integraciju po Feynmanovom parametru $x$ izvrijednjujemo za $d=4$ bez velikog gubitka na općenitosti budući da je divergencija već sadržana u $\Gamma(2-\frac{d}{2})$, tako da imamo konačno:

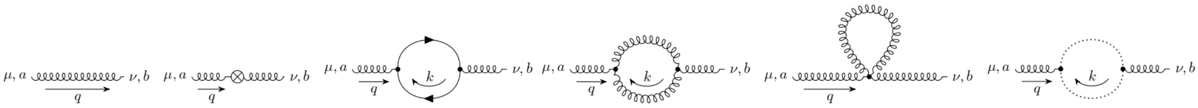
$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_3=&\left(i\frac{\not{p}}{p^2}\right)ig^2C_2(r)\frac{\not{p}}{(-p^2)^{2-\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\left(i\frac{\not{p}}{p^2}\right) \qquad (4.7)\\
=&-ig^2C_2(r)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\frac{1}{(-p^2)^{2-\frac{d}{2}}}\frac{\not{p}}{p^2}.
\end{aligned}$$

Ukupna dvofermionska k. f. do razine jedne petlje stoga glasi:

$$\begin{aligned}
\widetilde{G}^{(2,0)}(p)=&\,i\frac{\not{p}}{p^2} \\
&-i\frac{\not{p}}{p^2}\left(\delta_1+g^2\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}C_2(r)\frac{1}{(-p^2)^{2-\frac{d}{2}}}\right).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Feynmanovi dijagrami koji doprinose gluonskoj k. f. do razine jedne petlje prikazani su na slici 6:

$$\widetilde{G}^{ab\ (0,2)}_{\mu\nu}(q)=\sum_{i=1}^{6}\mathcal{B}^{ab}_{\mu\nu\ i}(q). \tag{4.9}$$




Slika 6. Feynmanovi dijagrami koji daju najniži doprinos gluonskoj korelacijskoj funkciji (do razine jedne petlje).

Prve dvije amplitude su jednostavne i mogu se napisati u Landauovom baždarenju ($\eta = 0$) gluonskog propagatora (2.6) kao:

$$\mathcal{B}^{ab}_{\mu\nu\ 1}(q) = -\frac{i}{q^2}\delta^{ab}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right), \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B}^{ab}_{\mu\nu\ 2}(q) = &\left(\left(-\frac{i}{q^2}\delta^{ac}\left(g_{\mu\alpha} - \frac{q_\mu q_\alpha}{q^2}\right)\right)\right)\cdot\\ &\cdot(-i)(q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta)\delta^{cd}\ \cdot\\ &\left(-\frac{i}{q^2}\delta^{db}\left(g_{\beta\nu} - \frac{q_\beta q_\nu}{q^2}\right)\right)\\ =&i\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\delta^{ab}\frac{\delta_2}{q^2}.\end{aligned}$$

Nastavljamo s izračunom posljednjih četiriju dijagrama sa slike 6. Za nastanak virtualnog fermion-antifermion para imamo (početni negativan predznak za zatvorene fermionske petlje dolazi zbog antikomutativnosti polja):

$$-\operatorname{tr}(t^a t^b)\int\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\operatorname{tr}\left((ig\gamma^\mu t^a)i\frac{\not{q}+\not{k}}{(q+k)^2}(ig\gamma^\mu t^b)i\frac{\not{k}}{k^2}\right) \tag{4.11}$$

$$\begin{aligned}=&(l = k + xq) =\\ =&-4C(r)g^2\delta^{ab}\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^d l}{(2\pi)^d}\ \frac{1}{(l^2+x(1-x)q^2)^2}\cdot\\ &\cdot\left(2l^\mu l^\nu - 2x(1-x)q^\mu q^\nu - l^2 g^{\mu\nu} + x(1-x)q^2 g^{\mu\nu}\right)\\ =&(l^0 = il^0_W, l^i = l^i_W) =\\ =&-4ig^2C(r)\delta^{ab}\int_0^1\mathrm{d}x\int\frac{\mathrm{d}^d l_W}{(2\pi)^d}\ \cdot\\ &\cdot\left(g^{\mu\nu}\frac{l_W^2}{2} + x(1-x)q^2g^{\mu\nu} - 2x(1-x)q^\mu q^\nu\right)\\ =&-8ig^2C(r)\delta^{ab}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\frac{1}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}}(q^2g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\cdot\\ &\cdot\int_0^1\mathrm{d}x\ x(1-x)\\ =&-\frac{4}{3}ig^2C(r)\delta^{ab}(q^2g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu)\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(4\pi)^2}\frac{n_f}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}}\\ =&i\Pi^{\mu\nu\ ab}(q).\end{aligned}$$

U posljednjem retku smo rukom ubacili ukupan broj fermiona koji se veže na gluonsko polje budući da zbog pretpostavke bezmasenosti fermiona svaki daje identičan doprinos ukupnoj amplitudi. Osim toga, vidimo da je i Wardov identitet $q_\mu\Pi^{\mu\nu\ ab}(q) = 0$ zadovoljen, kao što je to slučaj i u kvantnoj elektrodinamici.

Sljedeća petlja se sastoji od para virtualnih gluona (s faktorom simetrije $\frac{1}{2}$ ispred):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\ \frac{-i}{k^2}\frac{-i}{(q+k)^2}g^2 f^{acd}f^{bcd}\cdot \\ &\cdot\left(g^{\mu\rho}(q-k)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2k+q)^m u + g^{\sigma\mu}(-k-2q)^\rho\right)\cdot\\ &\cdot\left(\delta^\nu{}_\rho(k-q)_\sigma + \delta^\nu{}_\sigma(k+2q)_\rho + g_{\rho\sigma}(-2k-q)^\nu\right).\end{aligned} \tag{4.12}$$

Umnožak u zagradama se pojednostavljuje pomoću identiteta (DIV.2), definicijom 4-impulsa u Feynmanovoj parametrizaciji ($l = k + xq$) te zanemarivanjem članova linearnih u $l^\mu$ zbog integracije neparnih funkcija preko simetrične domene:

$$\begin{aligned}&\left(g^{\mu\rho}(q-k)^\sigma + g^{\rho\sigma}(2k+q)^m u + g^{\sigma\mu}(-k-2q)^\rho\right)\cdot\\ &\cdot\left(\delta^\nu{}_\rho(k-q)_\sigma + \delta^\nu{}_\sigma(k+2q)_\rho + g_{\rho\sigma}(-2k-q)^\nu\right)\\ =&-6g^{\mu\nu}\left(1-\frac{1}{d}\right)l^2 - g^{\mu\nu}q^2((2-x)^2 + (1+x)^2) +\\ &+ q^\mu q^\nu((2-d)(1-2x)^2 + 2(1+x)(2-x)).\end{aligned} \tag{4.13}$$

Uvrštavajući posljednji rezultat u integral (4.12) te primijenjujući Wickovu rotaciju pa na to formule (D1.1) i (D1.2) konačno dobivamo:

$$\begin{aligned}&i\frac{g^2}{(4\pi)^2}C_2(G)\delta^{ab}\frac{1}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}}\cdot\\ &\cdot\left(\frac{1}{4}(d-1)\Gamma\left(1-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2 + \frac{7}{3}\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)g^{\mu\nu}q^2\right.\\ &\left.-\Gamma\left(2-\frac{d}{2}\right)q^\mu q^\nu\left(\frac{1}{3}\left(1-\frac{d}{2}\right)+\frac{13}{6}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.14}$$

Nadalje razmatramo dijagram s 4-gluonskim vrhom (ponovno sa simetrijskim faktorom $\frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\ \frac{-ig_{\rho\sigma}}{k^2}\delta^{cd}(-ig^2)\cdot\\ &\cdot\left(f^{abe}f^{cde}(g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\right.\\ &+ f^{ace}f^{bde}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\sigma}g^{\nu\rho})\\ &\left.+ f^{ade}f^{bce}(g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma})\right).\end{aligned} \tag{4.15}$$

Prva kombinacija strukturnih konstanti iščezava zbog njihove antisimetrije, dok se ostatak pojednostavi koristeći $g^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = d$ u:

$$-g^2 C_2(G) g^{\mu\nu} \delta^{ab} (d-1) \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{k^2}. \tag{4.16}$$

Posljednji integral rješavamo metodama kojima smo izračunali prethodne integrale ubacujući jedinicu $1 = \frac{(q+k)^2}{(q+k)^2}$ u podintegralnu funkciju i zatim koristeći Feynmanovu parametrizaciju:

$$\begin{aligned} & - i g^2 C_2(G) \delta^{ab} g^{\mu\nu} (d-1) \int_0^1 \mathrm{d}x \int \frac{\mathrm{d}^d l_W}{(2\pi)^d} \cdot \\ & \cdot \frac{-l_W^2 + (1-x)^2 q^2}{(l_W^2 - x(1-x) q^2)^2} \\ =& i \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} g^{\mu\nu} q^2 \frac{1}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left( -\frac{1}{12} d(d-1) \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) - \frac{1}{3}(d-1)\Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right)\right). \end{aligned} \tag{4.17}$$

Preostaje odrediti oblik dijagrama s parom duhova (antikomutativnost polja opet daje globalan negativan predznak ispred):

$$\begin{aligned} & - \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{-g^2}{k^2 (k+q)^2} f^{dac} f^{cbd} (k+q)^\mu k^\nu \\ =& i \frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(G) \delta^{ab} \frac{1}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}} \cdot \\ & \cdot \left( -\frac{1}{12} \Gamma\left(1 - \frac{d}{2}\right) g^{\mu\nu} q^2 + \frac{1}{6} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) q^\mu q^\nu \right). \end{aligned} \tag{4.18}$$

Amplitude petlji posljednjih triju dijagrama zbrajamo i pojednostavljujemo s identitetom $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$ pa imamo:

$$i \frac{5}{3} \frac{g^2 C_2(G) \delta^{ab}}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(4\pi)^2} (q^2 g^{\mu\nu} - q^\mu q^\nu), \tag{4.19}$$

iz čega vidimo da je Wardov identitet i u ovom slučaju zadovoljen, kao što i očekujemo. Zbroj posljednjih četiriju dijagrama

$$\begin{aligned} & \sum_{i=3}^{6} \mathcal{B}^{ab}_{\mu\nu\ i}(q) = \\ =& \left( \frac{-i g_{\mu\alpha} \delta^{ac}}{q^2} \right) i \frac{g^2 \delta^{cd}}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}} (q^2 g^{\alpha\beta} - q^\alpha q^\beta) \cdot \\ & \cdot \left( \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} C(r) n_f \right) \left( \frac{-i g_{\beta\nu} \delta^{db}}{q^2} \right) = \\ =& - i \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\delta^{ab}}{q^2} \cdot \\ & \cdot \left( \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} C(r) n_f \right), \end{aligned} \tag{4.20}$$

a potom i svih ostalih je:

$$\begin{aligned} & \widetilde{G}^{ab\ (0,2)}_{\mu\nu}(q) = \sum_{i=1}^{6} \mathcal{B}^{ab}_{\mu\nu\ i}(q) = \\ =& - \frac{i}{q^2} \delta^{ab} \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) + i \left( g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{\delta^{ab}}{q^2} \cdot \\ & \cdot \left( \delta_2 - \frac{g^2}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{(-q^2)^{2-\frac{d}{2}}} \left( \frac{5}{3} C_2(G) - \frac{4}{3} C(r) n_f \right) \right). \end{aligned} \tag{4.21}$$

Ukupna korelacijska funkcija $\widetilde{G}^{a\ (2,1)}_{\mu}(p, p', q)$ može se dobiti kao umnožak već poznatih k. f. koje smo izračunali ranije i korekcije fermion-gluon-fermion vrha do razine jedne petlje. Četiri dijagrama koji prikazuju doprinose amplitudi vrha fermion-gluon-fermion prikazani su na slici 7.

Amplitude prvih dvaju vrhova dobivaju se izravno iz Feynmanovih pravila teorije:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mu a}_1 &= i g \gamma^\mu t^a, \\ \mathcal{C}^{\mu a}_2 &= i \delta_{fgf} \gamma^\mu t^a. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Za treći dijagram imamo:

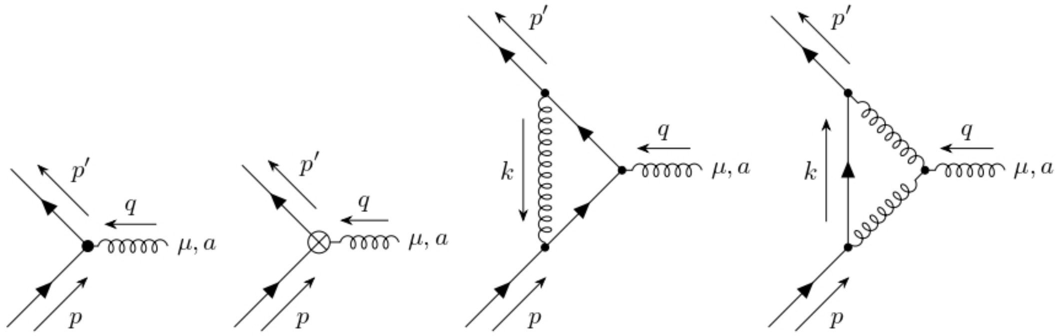
$$\mathcal{C}^{\mu a}_3 = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} g^3 t^b t^a t^b \frac{\gamma^\nu (\not{k} + \not{p}') \gamma^\mu (\not{k} + \not{p}) \gamma_\nu}{k^2 (k+p')^2 (k+p)^2}. \tag{4.23}$$

Trostruki produkt generatora grupe $t^b t^a t^b$ možemo pojednostaviti identitetom (D3.5). Integral po 4-impulsu virtualnog gluona u petlji ćemo aproksimirati uzimanjem da su vanjski 4-impulsi $p$, $p'$ i $q$ zanemarivi u odnosu na $k$, što je očito ispunjeno za najveći dio domene integracije. Tako dobivamo:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^{\mu a}_3 &= g^3 \left( C_2(r) - \frac{C_2(G)}{2} \right) t^a \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{\gamma^\nu \not{k} \gamma_\mu \not{k} \gamma_\nu}{(k^2)^3} \\ &= g^3 \left( C_2(r) - \frac{C_2(G)}{2} \right) t^a \gamma^\mu \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2)^2} \\ &= i g^3 \left( C_2(r) - \frac{C_2(G)}{2} \right) t^a \gamma^\mu \int \frac{\mathrm{d}^d k_W}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k_W^2)^2}. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Posljednji integral divergira i nakon postupka dimenzionalne regularizacije zato što je iz (D1.1) $\Delta = 0$. Stoga ćemo ga regularizirati ubacivanjem proizvoljne energijske skale $\Delta \neq 0$ uz $k_W$ koja bi nam se pojavila iz trostrukog umnoška propagatora egzaktno Feynmanovom parametrizacijom da nismo uzimali $p = p' = q = 0$. Konačnim sređivanjem amplituda prve petlje jest

$$\mathcal{C}^{\mu a}_3 = i \frac{g^3}{(4\pi)^2} \frac{\Gamma(2 - \frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}} t^a \gamma^\mu \left( C_2(r) - \frac{C_2(G)}{2} \right). \tag{4.25}$$




Slika 7. Korekcije fermion-gluon-fermion vrha zajedno s osnovnim granastim vrhom (do razine jedne petlje).

Četvrti dijagram analiziramo na sličan način kao i prethodni:

$$\mathcal{C}_4^{\mu a} = \int \frac{\mathrm{d}^d k}{(2\pi)^d}\,(ig\gamma_\nu t^b)\frac{i\not{k}}{k^2}(ig\gamma_\rho t^c)\frac{-1}{(p'-k)^2(p-k)^2}\cdot \tag{4.26}$$
$$\cdot\, g f^{abc}(g^{\mu\nu}(q+p'-k)^\rho + g^{\nu\rho}(-p'-p+2k)^\mu + g^{\rho\mu}(p-k-q)^\nu).$$

Produkt matrica generatora grupe svodimo na jednostavniji oblik pomoću antisimetričnosti tenzora strukturnih konstanti:

$$f^{abc}t^bt^c = f^{acb}t^ct^b = -f^{abc}t^ct^b = \frac{1}{2}f^{abc}(t^bt^c - t^ct^b) \tag{4.27}$$
$$= \frac{i}{2}f^{abc}f^{dbc}t^d = \frac{i}{2}C_2(G)t^a.$$

Ponovno zanemarujemo vanjske impulse spram virtulanog po kojem integriramo i zatim u zadnjem koraku regulariziramo s veličinom $\Delta \neq 0$, nakon čega se dolazi do:

$$\mathcal{C}_4^{\mu a} = \frac{g^3}{2}C_2(G)t^a\int\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}\,\gamma_\nu\not{k}\gamma_\rho\bigg(\frac{g^{\mu\nu}k^\rho - 2g^{\nu\rho}k^\mu}{(p^2)^3} \tag{4.28}$$
$$+\frac{g^{\rho\mu}k^\nu}{(p^2)^3}\bigg)$$
$$= \frac{g^3}{8}C_2(G)t^a\int\frac{\mathrm{d}^dk}{(2\pi)^d}\,\frac{1}{(k_W^2+\Delta)}(\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\rho - 2\gamma^\rho\gamma^\mu\gamma_\rho + \gamma^\rho\gamma_\rho\gamma^\mu)$$
$$= i\frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{3}{2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}t^a\gamma^\mu C_2(G).$$

Zbroj svih amplituda fermion-gluon-fermion vrha je:

$$\mathcal{C}^{\mu a} = \sum_{i=1}^{4}\mathcal{C}_i^{\mu a} = ig\gamma^\mu t^a + \tag{4.29}$$
$$+\, i\gamma^\mu t^a\bigg(\delta_{fgf} + \frac{g^3}{(4\pi)^2}\frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{\Delta^{2-\frac{d}{2}}}\,(C_2(r)+C_2(G))\bigg).$$

Korelacijska funkcija $\widetilde{G}_\mu^{a\ (2,1)}(p,p',q)$ u impulsnom prostoru se potom dekomponira u umnožak osnovne fermionske i gluonske k. f. kao i interakcijskog vrha koji ih povezuje na način:

$$\widetilde{G}_\mu^{a\ (2,1)}(p,p',q) = \widetilde{G}^{(2,0)}(p)C^{\nu b}\widetilde{G}^{(2,0)}(p')\widetilde{G}_{\nu\mu}^{ba\ (0,2)}(q). \tag{4.30}$$

Međutim, dimenzionalnom regularizacijom nismo riješili problem divergencije svih izračunatih dijagrama dosad u ovome poglavlju. Njih ćemo do kraja ukloniti zahtjevajući kraćenje doprinosa dijagrama s jednom petljom i odgovarajućih protučlanova na proizvoljnoj energijskog skali $p^2 = q^2 = -\Delta = -M^2$ budući da se čestice u korelacijskim funkcijama ne nalaze nužno na ljusci mase. Takav postupak nazivamo postavljanjem renormalizacijskih uvjeta na teoriju. Stoga redom za k. f. dvaju fermionskih polja zahtjevamo

$$\widetilde{G}^{(2,0)}(p;\ p^2=-M^2) = i\frac{\not{p}}{p^2}, \tag{4.31}$$

analogno za k. f. dvaju gluonskih polja

$$\widetilde{G}_{\mu\nu}^{ab\ (0,2)}(q;\ q^2=-M^2) = -i\frac{\delta^{ab}}{q^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right), \tag{4.32}$$

te na koncu za fermion-gluon-fermion međudjelovanje:

$$\mathcal{C}^{\mu a}(\Delta = M^2) = ig\gamma^\mu t^a. \tag{4.33}$$

Mi ovdje to odrađujemo samo na razini jedne petlje, no isto se može poopćiti na proizvoljan red računa smetnje. Na taj način fiksiramo vrijednosti protučlanova $\delta_1, \delta_2$ i $\delta_{fgf}$ primjenom uvjeta (4.31), (4.32) i (4.33) na ranije dobivene izraze (4.8), (4.21) i (4.29) redom kojim su nabrojani:

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{(4\pi)^2} C_2(r) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}}, \tag{4.34}$$
$$\delta_2 = \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{5}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}C(r)n_f\right) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}},$$
$$\delta_{fgf} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}(C_2(r) + C_2(G)) \frac{\Gamma(2-\frac{d}{2})}{(M^2)^{2-\frac{d}{2}}},$$

iz kojih se vidi da su renormalizacije fermionskih i gluonskih polja nedefinirane, isto kao što je i pomak gole konstante vezanja $g_0$ beskonačan u odnosu na fizikalno mjerljivu vrijednost $g$. Tu nema poteškoća zato što goli parametri i polja nisu eksperimentalno opazivi. Postavljanjem dodatnih renormalizacijskih uvjeta na korelacijsku funkciju Faddeev-Popovljevih duhova kao i ostalih dopuštenih vrhova mogle bi se načelno odrediti ostale vrijednosti protučlanova; međutim, nas zanima učinak proizvoljnosti renormalizacijske skale $M^2$ na ponašanje fizikalnog parametra vezanja $g$, koji se mora promijeniti kako bi uvjeti (4.31), (4.32) i (4.33) uvijek držali, neovismo o $M^2$. Zato sljedeće razmatramo kako se tri dosad analizirane korelacijske funkcije, normalizacija polja i parametar vezanja mijenjaju pri promjeni renormalizacijske skale.

## 5. CALLAN-SYMANZIKOVA JEDNADŽBA

Pomakne li se renormalizacijska energijska skala

$$M \to M + \mathrm{d}M \tag{5.1}$$

moraju se promijeniti renormalizirani parametar vezanja, normalizacija polja i posljedično $(n, m)$ korelacijska funkcija, kao što je to obrazloženo u prethodnom poglavlju.
Stoga imamo promjenu parametra vezanja:

$$g \to g + \mathrm{d}g, \tag{5.2}$$

fermionskih i gluonskih polja:

$$\psi \to (1 + \mathrm{d}\eta_1)\psi, \tag{5.3}$$
$$G_a^\mu \to (1 + \mathrm{d}\eta_2)G_a^\mu,$$

i $(n, m)$ korelacijske funkcije:

$$\widetilde{G}^{(n,m)} \to (1 + n\mathrm{d}\eta_1 + m\mathrm{d}\eta_2)\widetilde{G}^{(n,m)} = \widetilde{G}^{(n,m)} + \mathrm{d}\widetilde{G}^{(n,m)}. \tag{5.4}$$

Posljednja relacija (5.4) i činjenica da korelacijske funkcije ovise eksplicitno o parametru vezanja $g$ i renormalizacijskoj skali $M$, u što smo se uvjerili u prethodnom poglavlju, nas potom vodi na:

$$\mathrm{d}\widetilde{G}^{(n,m)} = (n\mathrm{d}\eta_1 + m\mathrm{d}\eta_2)\widetilde{G}^{(n,m)} = \left(\mathrm{d}M\frac{\partial}{\partial M} + \mathrm{d}g\frac{\partial}{\partial g}\right)\widetilde{G}^{(n,m)}. \tag{5.5}$$

Uz redefinicije

$$\beta(g) = M\frac{\partial g}{\partial M}, \tag{5.6}$$
$$\gamma_1(g) = -M\frac{\partial \eta_1}{\partial M} \ ; \ \gamma_2(g) = -M\frac{\partial \eta_2}{\partial M},$$

imamo konačnu jednadžbu za korelacijsku funkciju:

$$\left(M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + n\gamma_1(g) + m\gamma_2(g)\right)\widetilde{G}^{(n,m)} = 0. \tag{5.7}$$

Dobiven rezultat su prvi puta dobili Callan i Symanzik ([8], [9]) u analizi skalarne teorije polja. Međutim, isti se može promijeniti i u slučaju opće ne-Abelove teorije. Želimo ponajprije odrediti $\beta$ funkciju teorije budući da po definiciji (5.6) sadrži informaciju o klizanju parametra vezanja fermionskog i gluonskog polja u ovisnosti o renormalizacijskoj skali. Callan-Symanzikovu jednadžbu (5.7) rješavat ćemo perturbativno, uvrštavajući u nju redom tri korelacijske funkcije dobivene prethodno da bismo dobili $\beta(g)$, $\gamma_1(g)$ i $\gamma_2(g)$ u najnižem redu računa smetnje za koji se dobiva netrivijalan rezultat.

Prvo što moramo primijetiti jest da su korelacijske funkcije teorije beskonačni redovi potencija vezanja (u našem slučaju $g$) i da je najniža neiščezavajuća potencija $\beta$ funkcije za jedan viša od najniže potencije $\gamma$ funkcija. Stoga u prvoj aproksimaciji stavljamo $\beta(g) = 0$ i primijenjujemo C-S jednadžbu na k. f. $\widetilde{G}^{(2,0)}(p)$ i $\widetilde{G}^{ab\ (0,2)}_{\mu\nu}(q)$. Napominjemo također da samo protučlanovi ovise o renormalizacijskoj skali $M$. Pretpostavljamo da je vezanje dovoljno slabo da svaki član C-S jednadžbe doprinosi samo s najnižom mogućom potencijom veličine $g$ (to smo implicitno pretpostavili i kod perturbativnog računa korelacijskih funkcija u prethodnom poglavlju). Na taj način nalazimo:

$$\frac{\partial \widetilde{G}^{(2,0)}}{\partial M} = -i\frac{\not{p}}{p^2}\frac{\partial \delta_1}{\partial M} \tag{5.8}$$
$$- iM\frac{\not{p}}{p^2}\frac{\partial \delta_1}{\partial M} + 2\gamma_1(g)i\frac{\not{p}}{p^2} = 0,$$
$$\gamma_1(g) = \frac{M}{2}\frac{\partial \delta_1}{\partial M}.$$

$$\frac{\partial \widetilde{G}^{ab\ (0,2)}_{\mu\nu}}{\partial M} = i\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\frac{\delta^{ab}}{q^2}\frac{\partial \delta_2}{\partial M} \tag{5.9}$$

$$iM\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\frac{\delta^{ab}}{q^2}\frac{\partial \delta_2}{\partial M} +$$

$$+ 2\gamma_2(g)\left(\frac{-i\delta^{ab}}{q^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\right) = 0,$$

$$\gamma_2(g) = \frac{M}{2}\frac{\partial \delta_2}{\partial M}.$$

Na koncu uvrštavamo $(2,1)$ k. f. koja je dana s (4.30), $\gamma_1$ i $\gamma_2$ u C-S jednadžbu i sređujemo:

$$\left(M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + 2\gamma_1(g) + \gamma_2(g)\right)\widetilde{G}^{(2,1)} = 0, \tag{5.10}$$

$$\left(M\frac{\partial}{\partial M} + \beta(g)\frac{\partial}{\partial g} + M\frac{\partial \delta_1}{\partial M} + \frac{M}{2}\frac{\partial \delta_2}{\partial M}\right)\widetilde{G}^{(2,1)} = 0,$$

$$\left(i\frac{\not{p}}{p^2}\right)\left(i\gamma^\nu t^b\right)\left(i\frac{\not{p}'}{p'^2}\right)\left(\frac{i\delta^{ab}}{q^2}\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(M\frac{\partial}{\partial M}(-\delta_{fgf} + 2g\delta_1 + g\delta_2) - \beta(g) - gM\frac{\partial \delta_1}{\partial M}\right.$$

$$\left. - g\frac{M}{2}\frac{\partial \delta_2}{\partial M}\right) = 0,$$

$$\beta(g) = M\frac{\partial}{\partial M}\left(-\delta_{fgf} + g\delta_1 + \frac{g}{2}\delta_2\right).$$

Ubacujući u posljednji izraz protučlanove (4.34) koje smo eksplicitno dobili nametanjem renormalizacijskih uvjeta na teoriju i korištenjem razvoja

$$\Gamma(z) = \frac{1}{z} + \mathcal{O}(1), \tag{5.11}$$

dobiva se beta funkcija opće ne-Abelove teorije u najnižem redu koja je ujedno dobro definirana u četiri fizikalne dimenzije, što u konačnici očekujemo za sve fizikalno mjerljive veličine:

$$\beta(g) = M\frac{\partial g}{\partial M} = -\frac{g^3}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}C(r)n_f\right). \tag{5.12}$$

Rješenje te diferencijalne jednadžbe nam daje klizanje parametra vezanja $g$ o renormalizacijskoj skali:

$$g^2(k^2) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}C(r)n_f\right)\ln\left(\frac{k^2}{M^2}\right)}, \tag{5.13}$$

gdje je $g_0$ vrijednost fizikalno mjerljivog vezanja na energiji $M$, a ne gola konstanta teorije. U posebnom slučaju SU(N) teorija izraz poprima oblik:

$$g^2(k^2) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}n_f\right)\ln\left(\frac{k^2}{M^2}\right)}. \tag{5.14}$$

Za asimptotski slobodne teorije se izraz (5.13) dodatno pojednostavljuje uz definiciju

$$\beta_0 = \frac{11}{3}C_2(G) - \frac{4}{3}C(r)n_f > 0, \tag{5.15}$$

iz čega slijedi

$$g^2(k^2) = \frac{g_0^2}{1 + \frac{g_0^2}{(4\pi)^2}\beta_0 \ln\left(\frac{k^2}{M^2}\right)} = \frac{16\pi^2}{\frac{16\pi^2}{g_0^2} + \beta_0 \ln\left(\frac{k^2}{M^2}\right)}. \tag{5.16}$$

Ako dio nazivnika u (5.16) zapišemo kao

$$-\beta_0 \ln\left(\Lambda^2\right) = \frac{16\pi^2}{g_0^2} - \beta_0 \ln\left(M^2\right), \tag{5.17}$$

imamo konačno:

$$g^2(k^2) = \frac{16\pi^2}{\beta_0 \ln\left(\frac{k^2}{\Lambda^2}\right)}. \tag{5.18}$$

## 6. RASPRAVA I ZAKLJUČAK

Dobiveni izrazi (5.13) i (5.14) su od velikog fizikalnog značaja i predstavljaju najvažnije rezultate u ovome radu. Oni pokazuju da u općenitoj ne-Abelovoj teoriji, nastaloj kao izravna generalizacija kvantne elektrodinamike, postoji mogućnost asimptotske slobode, odnosno slabljenja vezanja fermionskih i gluonskih polja kako energija procesa raste, čime smo naknadno opravdali dosad napravljen tretman u okvirima računa smetnje. To nije ispunjeno u svim slučajevima; ukoliko je broj vrsta fermionskih čestica koje se vežu na gluone dovoljno velik, asimptotska sloboda nestaje i teorija ima tzv. Landauov pol, energiju na kojoj konstanta vezanja divergira. S druge strane, ako je struktura grupe simetrija na kojoj se teorija temelji dovoljno jednostavna, kao što je to slučaj s KED-om i njenom odgovarajućom grupom U(1), Casimirova invarijanta $C_2(G)$ iščezava i teorija se počinje problematično ponašati na visokim energijama za proizvoljan broj fermiona.

Suprotni predznaci između čistog gluonskog i fermionskog doprinosa u nazivniku (5.14) pokazuju da je postojanje Landauovog pola ili asimptotske slobode određeno dvama efektima koji se međusobno natječu. Prvi od njih je nastanak virtualnih fermion-antifermion parova u gluonskom polju koje se stvara oko realnog gluonski nabijenog fermiona. Postojeće gluonsko polje orijentira virtualan par na način da je fermion sa suprotnim nabojem realnom također mu i bliži, čime se oblikuje virtualan gluonski dipol koji djeluje tako da smanji gluonsko polje fizikalnog fermiona, učinkovitije na nižim energijama nego višim. Drugi efekt klasično analiziramo pomoću Gaussovog zakona za 'električno' gluonsko polje i promatramo pozitivno $a = 1$ nabijen fermion u ishodištu koordinatnog sustava:

$$\partial_i E^{ai} = g\delta^{(3)}(\vec{x})\delta^{a1} + g\epsilon^{abc}G^{bi}E^{ci}, \tag{6.1}$$

gdje smo zbog konkretnosti uzeli teoriju temeljenu na SU(2) čije su strukturne konstante dane Levi-Civita tenzorom $\epsilon^{abc}$. Početno polje $\vec{E}^1$ je radijalno. Uzmimo da se na nekoj udaljenosti (označimo taj položaj s $\vec{d}$) od naboja dogodi fluktuacija polja $G^{2i}$. Tada na tom mjestu električno polje $a = 3$ zadovoljava jednakost:

$$\partial_i E^{3i} = g\epsilon^{abc}G^{bi}E^{ci} = g\epsilon^{321}G^{2i}E^{1i} = -g\vec{G}^2 \cdot \vec{E}^1, \tag{6.2}$$

čime je efektivno na tom mjestu nastao izvor polja $\vec{E}^3 = -|E^3|\mathrm{sgn}(G^2_r)\hat{r}_{\vec{d}}$, gdje je $\hat{r}_{\vec{d}}$ radijalan vektor koji izlazi iz točke $\vec{d}$. Na istom položaju početno polje $E^{1i}$ sada ispunjava sljedeće:

$$\begin{aligned}\partial_i E^{1i} &= g\epsilon^{abc}G^{bi}E^{ci} = g\epsilon^{123}G^{2i}E^{3i} = g\vec{G}^2 \cdot \vec{E}^3 \\ &\approx -g|E^3||G^2|(\mathrm{sgn}(G^2_r))^2(\hat{r}_{\vec{0}} \cdot \hat{r}_{\vec{d}}) \\ &\approx -g|E^3||G^2|(\hat{r}_{\vec{0}} \cdot \hat{r}_{\vec{d}}).\end{aligned} \tag{6.3}$$

Posljednji rezultat pokazuje da se i u ovom slučaju stvara električni gluonski dipol, međutim sada je orijentiran suprotno od virtualnog fermion-antifermion para, pozitivan izvor je bliži početnom fermionskom izvoru u ishodištu, čime se ukupno polje pojačava. Drugi učinak u slučaju dovoljno malog broja vrsta fermiona u teoriji nadvladava prvi, zbog čega dolazi do pojave asimptotske slobode.

Budući da se Standardni model (SM) temelji na lokalnoj baždarnoj simetriji grupa $U(1)_Y \otimes SU(2)_L \otimes SU(3)$, iz dosadašnje analize slijedi da posjeduje Landauov pol zbog prisutnosti U(1) grupe. U načelu Landauov pol bi se mogao javiti i zbog interakcije kvarkova s gluonima, ukoliko bi ih postojalo u 17 ili više okusa, premda eksperimentalni rezultati pokazuju suprotno. Neke analize (npr. [10]) idu korak dalje s razmatranjima i nalaze pod općim pretpostavkama na koji način bi se SM mogao modificirati tako da zadržava svojstvo asimptotske slobode ne-Abelovih teorija tražeći kompliciraniju lokalnu grupu baždarnih transformacija teorije koja se svodi na SM u niskoenergijskom režimu, a istovremeno uklanja prisutne Landauove polove na visokim energijama.

## DODATAK 1: ANALITIČKA PROŠIRENJA DIVERGENTNIH INTEGRALA

S obzirom da nije teško analitički proširiti dvije vrste integrala koje koristimo u ovom radu na proizvoljnu dimenziju, ovdje samo citiramo rezultate relevantne za naša razmatranja zbog potpunosti (izvodi se mogu naći u [2] i [7]):

$$\begin{aligned}I_1(\Delta; d, n) &= \int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^d}\frac{1}{(x^2+\Delta)^n} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2})}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}},\end{aligned} \tag{D1.1}$$

$$\begin{aligned}I_2(\Delta; d, n) &= \int \frac{\mathrm{d}^d x}{(2\pi)^d}\frac{x^2}{(x^2+\Delta)^n} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(n-\frac{d}{2}-1)}{\Gamma(n)}\left(\frac{1}{\Delta}\right)^{n-\frac{d}{2}-1}.\end{aligned} \tag{D1.2}$$

## DODATAK 2: FEYNMANOVA PARAMETRIZACIJA

Umnožak dvaju propagatora s kojima najčešće računamo mogu se kombinirati u jedan izraz korištenjem Feynmanove parametrizacije kojom ga pretvaramo u integral jednostavne funkcije:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{(k^2-m^2)((k+p)^2-m^2)} \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{(k^2+2xk\cdot p+xp^2-m^2)^2} \\ &= (l = k + xp) = \int_0^1 \mathrm{d}x \, \frac{1}{(l^2+x(1-x)p^2-m^2)^2}.\end{aligned} \tag{D2.1}$$

## DODATAK 3: IDENTITETI VEZANI UZ GENERATORE GRUPE SIMETRIJA

Navodimo ukratko identitete i definicije Casimirovih invarijanti koje ispunjavaju generatori i strukturne konstante grupe simetrija ne-Abelove teorije čiji se dokazi mogu pronaći npr. u [3]:

$$\mathrm{tr}(t^a t^b) = C(r)\delta^{ab}, \tag{D3.1}$$

$$f^{acd}f^{bcd} = C_2(G)\delta^{ab}, \tag{D3.2}$$

$$t^a t^a = C_2(r) I_n. \tag{D3.3}$$

U slučaju specijalne unitarne grupe SU(N) nadalje vrijedi posebno:

$$\begin{aligned}C(r) &= \frac{1}{2}, \\ C_2(G) &= N.\end{aligned} \tag{D3.4}$$

Kod računa struktura fermion-gluon-fermion vrha koristimo sljedeći identitet:

$$\begin{aligned} t^b t^a t^b &= t^b t^b t^a + t^b[t^a, t^b] \\ &= C_2(r)t^a + t^b(if^{abc}t^c) \\ &= C_2(r)t^a + \frac{i}{2}f^{abc}[t^b, t^c] \\ &= C_2(r)t^a - \frac{1}{2}f^{abc}f^{bcd}t^d \\ &= C_2(r)t^a - \frac{1}{2}C_2(G)\delta^{ad}t^d \\ &= \left(C_2(r) - \frac{C_2(G)}{2}\right)t^a. \end{aligned} \tag{D3.5}$$

**DODATAK 4: TENZORSKI INTEGRALI**

Integrali neparnih funkcija preko simetričnih domena trivijalno iščezavaju:

$$\int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^\mu = \int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^\mu k^\nu k^\rho = 0. \tag{D4.1}$$

Integrali čije su podintegralne funkcije proporcionalne s $k^\mu k^\nu$ mogu se pojednostavniti na sljedeći način:

$$\begin{aligned} I^{\mu\nu} &= \int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^\mu k^\nu, \\ \to g_{\mu\nu}I^{\mu\nu} &= \int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^2 = \frac{g_{\mu\nu}g^{\mu\nu}}{d}\int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^2, \\ \int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^\mu k^\nu &= \frac{g^{\mu\nu}}{d}\int \mathrm{d}^d k \; f(k^2)k^2, \\ k^\mu k^\nu &\to \frac{g^{\mu\nu}}{d}k^2. \end{aligned} \tag{D4.2}$$


[1] C. N. Yang and R. L. Mills, *Conservation of Isotopic Spin and Isotopic Gauge Invariance*, Phys. Rev. **96**, 191 (1954).

[2] Michael E. Peskin, Dan V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, (Addison-Wesley Pub. Co, 1995).

[3] H. F. Jones, *Groups, Representations and Physics*, (2nd ed., IOP Publishing, 1998).

[4] Faddeev, L. D.; Popov, V., *Feynman diagrams for the Yang-Mills field*, Phys. Lett. B. **25** (1): 29. (1967).

[5] J. Schwinger, *The Quantum Theory of Fields I*, Physical Review. 82 (6): 914–917 (1951).

[6] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, (Cambridge University Press, 1995.)

[7] Hooft, G. 't; Veltman, M. *Regularization and renormalization of gauge fields* Nuclear Physics B, **44** (1): 189–213 (1972.)

[8] Callan, Curtis G. *Broken Scale Invariance in Scalar Field Theory* Physical Review D. American Physical Society (APS). **2** (8): 1541–1547 (1970.)

[9] Symanzik, K. *Small distance behaviour in field theory and power counting* Communications in Mathematical Physics. Springer Science and Business Media LLC. **18** (3): 227–246 (1970.)

[10] G. F. Giudice; G. Isidori; A. Salvio; A. Strumia *Softened Gravity and the Extension of the Standard Model up to Infinite Energy* Journal of High Energy Physics. **2015** (2): 137. (2015)