LINEARNI MODELI 2

STATISTIČKI PRAKTIKUM 2

3. VJEŽBE

Kada je opravdano koristiti linearni regresijski model?

Promatramo linearni regresijski model u p varijabli

$$Y_n = \beta_0 + \beta_1 x_1^{(n)} + \ldots + \beta_p x_p^{(n)} + \varepsilon_n.$$

Četiri glavne pretpostavke koje opravdavaju korištenje LRM-a u svrhu analize podataka i predviđanja su:

(i) *linearni* odnos između varijabli poticaja i odaziva

(ii) *nezavisnost* grešaka

(iii) *homogenost* grešaka

(iv) *normalna distribuiranost* grešaka

Ukoliko neka od pretpostavki nije opravdana, naša previđanja mogu biti nevaljana.

(i) Linearnost podataka

Ukoliko postoji nelinearan odnos jedne ili više varijabli, naša predviđanja (posebno izvan raspona uzorka) mogu biti potpuno netočna.
Detekcija odnosa varijabli i dobar izbor početnog modela ključan je za ispravnu analizu podataka.

Kako prepoznati nelinearnost?

Nelinearnost je najlakše uočiti iz grafičke usporedbe

- stvarnih i predviđenih vrijednosti varijable odaziva ($Y - \hat{Y}$ graf)
- reziduala i predviđenih vrijednosti - *residual-fit plot* ($\hat{Y} -$ e graf)

U prvom grafu očekujemo simetrično raspršenje podataka oko dijagonale, a u drugom oko apscise.

Kako ukloniti nelinearnost?

Potrebno je *transformirati* jednu ili više varijabli poticaja i/ili varijablu odaziva nekom nelinearnom funkcijom. Odabir funkcije ovisi o tipu podataka.

(ii) Nezavisnost grešaka

Problem zavisnosti grešaka javlja se kao moguća posljedica

- "cluster" podataka (uzorkovanje iz određene grupe umjesto cijele populacije)
- longitudinalnih podataka (uzorkovanje populacije kroz vrijeme)
- čiste koreliranosti (loš odabir modela)

Napomena: Nekoreliranost dviju normalnih slučajnih varijabli povlači njihovu nezavisnost.

Serijsku korelaciju među greškama ε možemo procijeniti koristeći reziduale e. U R-u to čini funkcija acf

```
> model=lm(y~x)
> corr=acf(model$res)
> corr$acf
---
> acf(model$res)
```

Output je grafički prikaz vrijednosti *autokorelacijske funkcije*, zajedno s pripadnom 95%-pouzdanom prugom (približne širine $4/\sqrt{n}$).

Problemi uzorkovani “cluster” i longitudinalnim podacima mogu se ukloniti statistički opravdanim skupljanjem podataka. Općenito u slučaju pojave koreliranosti možemo koristiti modele koji uključuju koreliranost podataka (npr. odabirom pravilnog ARIMA modela)

(iii) Homogenost grešaka

Nejednakost varijance grešaka može rezultirati

- preširokim/preuskim intervalima pouzdanosti za procjene
- preferiranjem određenog podskupa podataka pri procjeni

Najčešće se pojavljuje kod vremenskih podataka (varijanca raste s vremenom).

Homogenost se može uočiti iz grafičkog prikaza

- reziduala obzirom na vrijeme (t – e graf)
- residual-fit plot-a ($\hat{Y}$ – e graf).

Kod oba grafa pozornost treba obratiti na rast reziduala.

Moguća rješenja su:

- analiza podataka po dijelovima s jednakom varijancom
- ispitivanje pravilnog odabira modela
- korištenje alternativnih modela (ARCH)

(iv) Normalnost grešaka

Velika odstupanja od normalnosti mogu prouzročiti brojne probleme pri procjeni vrijednosti i pouzdanih intervala. Jedan od uzroka može biti i prisutnost *outliera*, koji mogu stvoriti probleme pri procjeni parametara modela (povećanje kvadratne greške).

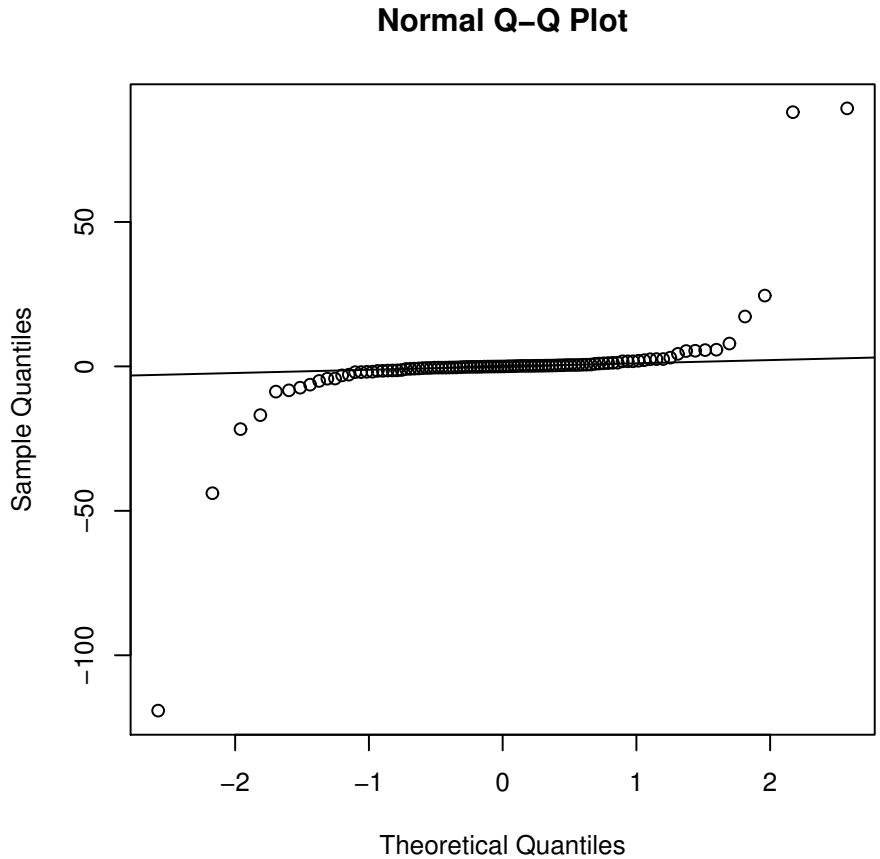
Normalnost grešaka možemo provjeriti preko reziduala, korištenjem

- normalnog vjerojatnosnog grafa
- Lillieforsovog testa
- Shapiro-Wilkovog testa

```
> shapiro.test(model$res)
```

- Jarque-Bera testa

Veliki uzorci iz distribucija *lakog repa* neće prouzročiti probleme u procjeni. Ako su greške kontrolirane i pripadaju distribuciji lakog repa svi rezultati će zbog snage CGT vrijediti asimptotski. Problemi su i dalje mogući kada greške imaju distribuciju *teškog repa*:



Analiza greške ε preko analize ostataka e

Ako su greške ε_i nezavisne i (normalno) jednako distribuirane, ostaci e ne moraju biti. Naime

$$\mathsf{e} = (\mathsf{I} - \mathsf{H})\varepsilon,$$

pa je $\operatorname{Var} \mathsf{e} = (\mathsf{I} - \mathsf{H})\sigma^2$.
Specijalno, uz oznaku $h_i = h_{ii}$ (*leverage*), vrijedi

$$\operatorname{Var} e_i = \sigma^2(1 - h_i).$$

Problem se rješava uvođenjem studentiziranih ostataka

$$r_i = \frac{e_i}{\hat{\sigma}\sqrt{1 - h_i}}.$$

Ako su pretpostavke na grešku modela točne, tada je $\operatorname{Var} r_i = 1$, a korelacija $\operatorname{Cor}(r_i, r_j)$ je mala.
U `R`-u ih dobivamo pomoću naredbe

```
> rstudent(model).
```

Poluga

Poluge h_i

- mjere osjetljivost procijenjenog $\hat{y}_i$ s obzirom na promjenu opažene vrijednosti y_i
- iz intervala $[0, 1]$ (što je poluga veća, utjecaj pojedine opažene vrijednosti na predviđenu je veći)
- $\sum h_i = p + 1$

Točke visoke poluge - neobično velike ili male vrijednosti prediktora ili neobične vrijednosti s obzirom na vrijednosti ostalih prediktora

Outlieri - točka čija opažena vrijednost ne prati trend ostalih točaka (opažena vrijednost značajno odstupa od ostalih opaženih vrijednosti točaka sličnih vrijednosti varijabli prediktora)

Utjecajne točke

Utjecajne točke u modelu - točke koji imaju značajan utjecaj na neki dio procijenjenog modela (npr. predviđene vrijednosti, procijenjene koeficijente ili p-vrijednosti testova). Njihovim uklanjanjem značajno mijenjamo dobivene procjene. Važno ih je uočiti i analizirati da bismo znali trebamo li ih ukloniti. Točke visoke poluge i outlieri su potencijalne utjecajne točke. Ako nismo sigurni trebamo li točku izbaciti iz modela ili ne, napravit ćemo procjenu u oba slučaja i na taj način analizirati model. Jedan način da ih otkrijemo je računajući Cookovu mjeru udaljenosti.

Cookova udaljenost D_i:

- > 0.5 - moguće je da je točka utjecajna
- > 1 - točka je vrlo vjerojatno utjecajna
- D_i poput palca (poput slova T) odskače od ostalih Cookovih udaljenosti D_j - točka je gotovo sigurno utjecajna

Zadatak

Promotrimo model s nenormalno distribuiranim greškama.
Simulirajmo podatke za model

$$Y_i = 1 + x_i + 2\sin(x_i) + \varepsilon_i,$$

gdje je $x_i = i/10$, za $i = 0, 1, \ldots, 100$ i $\varepsilon_i \sim U(-1, 1)$ nezavisne.

(a) Nacrtajmo stvarni model, procjenu modela i pouzdanu prugu za opažanja.

(b) Nacrtajte *residual-fit plot* i analizirajte ga.

(c) Proučite raspon ostataka i nacrtajte pripadni graf *autokorelacijske funkcije*.

(d) Nacrtajte normalni vjerojatnosni graf ostataka i studentiziranih ostataka i usporedite ga s pravcem $y = x$.

Izbor modela

Testiranje (linearnih) hipoteza o parametrima

Ukoliko smo opravdali pretpostavke modela, možemo prijeći na testiranje pouzdanosti modela.
Neka je $C \in M_{m\times(p+1)}(\mathbb{R})$ i $g \in M_{m\times 1}$, t.d. $r(C) = m < p+1$.
Hipotezu

$$H_0: \quad Cb = g$$

testiramo statistikom

$$F = \frac{(C\hat{b} - g)^\tau [C(X^\tau X)^{-1} C^\tau]^{-1} (C\hat{b} - g)}{\hat{\sigma}^2} \overset{H_0}{\sim} F(m, p+1)$$

Parametar m predstavlja broj jednadžbi uz koje je vezana nulta hipoteza (nužno manji od broja parametara modela).

Primjer testiranja linearnih hipoteza

Metodom najmanjih kvadrata podatke iz yy modelirajmo kao

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 \sin x.$$

```
> pl=lm(yy~x+I(x^2)+sin(x))
```

Testirajmo hipotezu

$$H_0 : \quad \beta_2 = 0, \beta_1 = 1.$$

```
> pl2=lm(yy~offset(1*x)+sin(x))
> anova(pl2,pl)
Analysis of Variance Table

Model 1: yy ~ offset(x) + sin(x)
Model 2: yy ~ x + sin(x) + I(x^2)
  Res.Df    RSS Df Sum of Sq      F Pr(>F)
1     99 32.044
2     97 31.403  2     0.641 0.9896 0.3755
```

Izbor varijabli

Procedure za izbor varijabli žele izabrati *najbolji* podskup varijabli poticaja. Zašto?

1. Želimo objasniti podatke na najjednostavniji mogući način. Višak varijabli poticaja treba ukloniti.
2. Višak varijabli poticaja pojačat će *šumove* kod izračunavanja procjena.
3. Može doći do kolinearnosti. Previše varijabli pokušava procijeniti istu stvar. Teško se procjenjuje utjecaj pojedine varijable.
4. Troškovi računanja vrijednosti varijabli poticaja mogu se smanjiti.
5. Višak varijabli neće znatno poboljšati model.

Procedure za izbor varijabli

Neke od često korištenih procedura su:

1. hijerarhijski izbor modela;
2. procedure korak po korak;
3. procedure bazirane na kriterijima.

AIC i BIC kriterij

$$-2\text{log-likelihood} + k(p+1)$$

Ako imamo p mogućih varijabli poticaja, imamo 2^{p+1} mogućih modela. Želimo odabrati najbolji model prema nekom kriteriju. Dva korisna kriterija su *Akaike Information Criterion* (AIC) i *Bayes Information Criterion* (BIC).

$$AIC = -2\text{log-likelihood} + 2(p+1)$$

$$BIC = -2\text{log-likelihood} + p \log n$$

Za linearne modele `-2log-likelihood` je $n \log(SSE/n)$. ($SSE = \sum_{k=1}^{n} (\hat{y}_i - y_i)^2$). Veći modeli imat će manji SSE, no koristit će više parametara. Najbolji model će biti ravnoteža između veličine i pristajanja podacima. BIC strože kažnjava veće modele.

Za određivanje AIC i BIC koristimo naredbu

```
> AIC(ul)
> AIC(ul, k=log(101)).
```

Ukoliko želimo provesti hijerarhijsku analizu optimalnog modela, počevši od najopćenitijeg modela `model`, koristimo funkciju

```
> step(model, k=...)
```

Zadatak

Modelirajmo podatke iz primjera s uniformno distribuiranim greškama i to modelom s funkcijom sinus i polinomom 3. stupnja. Nađimo najpogodniji pod-model za ove podatke

(1) po AIC i BIC kriteriju,
(2) testirajući razliku između modela prigodnim statističkim testom, i to krečući od
    (a) punog modela izbacujući jednu po jednu varijablu
    (b) nul-modela dodajući jednu po jednu varijablu.

Underfitting vs. overfitting

- *underfitting* - prilagodba modela podacima dobra, ali nedovoljno precizna (predviđene vrijednosti daleko od stvarnih)
- *overfitting* - model predobro odgovara podacima (gotovo savršeno) pa greška modela nije mogla biti dobro modelirana. Model će loše predviđati na novom skupu podataka. Moguća rješenja:
  - *cross-validation* (uzimanje slučajnih poduzoraka od početnog uzorka, na njima se provodi prilagodba te potom uzima neki prosjek rješenja)
  - više podataka
  - jednostavniji podaci
  - dodavanje šuma početnim podacima

Ometajuće varijable

Ometajuće varijable (*confounding variables*) - varijable koje ometaju vezu između zavisne i važne nezavisne varijable. Posljedica je da su dobivene procjene pristrane i krivo protumačene. Njihova vrijednost nije balansirana s obzirom na vrijednosti nezavisne varijable.

Kolinearnost - statistička povezanost između nezavisnih varijabli. Mjere:

- **tolerancija** $T = 1 - R^2 = 1/VIF$ (značajno kada je manji od 0.1)
- **VIF** (Variance inflation factor) - značajno kada je veći od 10 (promatraju se već vrijednosti veće od 5)