Teorija brojeva

Filip Najman

10. predavanje

1.6.2023.

Zadatak

Dokažite da je $[1, 1, 1, \dots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Neka je α iracionalan broj. U dokazu prošli put pokazali smo da svaka konvergenta od α zadovoljava nejednakost $|\alpha - \frac{p}{q}| < \frac{1}{q^2}$.

Teorem

Neka su $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_n}{q_n}$ dvije uzastopne konvergente od α. Tada barem jedna od njih zadovoljava nejednakost

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Dokaz: Brojevi $\alpha - \frac{p_n}{q_n}$, $\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ imaju suprotni predznak, pa je

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| + \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \left|\frac{p_n}{q_n} - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| = \frac{1}{q_n q_{n-1}} < \frac{1}{2q_n^2} + \frac{1}{2q_{n-1}^2}$$

(jer je $2ab < a^2 + b^2$ za $a \neq b$, mi uzmemo $a = \frac{1}{q_n}$, $b = \frac{1}{q_{n-1}}$).
Prema tome, vrijedi

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{2q_n^2} \quad \text{ili} \quad \left|\alpha - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right| < \frac{1}{2q_{n-1}^2}.$$

$\square$

Teorem (Borel)

Neka su $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$, $\frac{p_n}{q_n}$ *tri uzastopne konvergente od* α. *Tada barem jedna od njih zadovoljava nejednakost*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

Dokaz: Stavimo $\alpha = [a_0, a_1, \dots]$, $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \dots]$ i $\beta_i = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$ za $i \geq 1$.

Imamo $\alpha = [a_0, a_1, \dots, a_n, \alpha_{n+1}]$, te zapišimo broj s desna kao razlomak p'_{n+1}/q'_{n+1}, (gdje ni brojnik ni nazivnik nisu racionalni brojevi).

Korištenjem ranije dokazane rekurzije dobivamo

$$q_n\alpha - p_n = q_n \cdot \frac{\alpha_{n+1}p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} - p_n =$$

$$\frac{\alpha_{n+1}p_nq_n + p_{n-1}q_n - \alpha_{n+1}p_nq_n - p_nq_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{(-1)^n}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}.$$

Stoga je

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}. \tag{1}$$

Da bi dovršili dokaz, moramo pokazati da ne postoji prirodan broj n takav da za $i = n-1, n, n+1$ vrijedi

$$\alpha_i + \beta_i \leq \sqrt{5}. \tag{2}$$

Pretpostavimo da je (2) ispunjeno za $i = n-1, n$. Tada iz

$$\alpha_{n-1} = a_{n-1} + \frac{1}{\alpha_n},$$

$$\frac{1}{\beta_n} = \frac{q_{n-1}}{q_{n-2}} = \frac{a_{n-1}q_{n-2} + q_{n-3}}{q_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{q_{n-3}}{q_{n-2}} = a_{n-1} + \beta_{n-1}$$

slijedi

$$\frac{1}{\alpha_n} + \frac{1}{\beta_n} = \alpha_{n-1} + \beta_{n-1} \leq \sqrt{5}.$$

Stoga je

$$1 = \alpha_n \cdot \frac{1}{\alpha_n} \leq \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\beta_n}\right) \alpha_n \leq \left(\sqrt{5} - \beta_n\right) \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\beta_n}\right),$$

$$\Longrightarrow 5 - \sqrt{5}\beta_n - \frac{\sqrt{5}}{\beta_n} + 1 \geq 1.$$

Množenjem s $-\beta_n/\sqrt{5}$ dobivamo $\beta_n^2 - \sqrt{5}\beta_n + 1 \leq 0$.

Odavde slijedi da je $\beta_n \in \left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]$, dakle budući da je β_n racionalan, $\beta_n > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Ako bi (2) također bilo ispunjeno za $i = n, n+1$, onda bi korištenjem istih argumenata dobili $\beta_{n+1} > \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, pa iz

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2} \quad \text{slijedi} \quad a_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}},$$

$$1 \le a_n = \frac{q_n}{q_{n-1}} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} = \frac{1}{\beta_{n+1}} - \beta_n < \frac{2}{\sqrt{5}-1} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} = 1,$$

što je kontradikcija. $\square$

Sada želimo dokazati da je Borelov teorem najbolji mogući.

Teorem

Pretpostavimo da α ima razvoj u verižni razlomak oblika

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_N, 1, 1, 1, \ldots].$$

Tada je $\lim_{n\to\infty} q_n^2 \left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Dokaz: Po dokazu Borelovog teorema uz oznake $\alpha_i = [a_i, a_{i+1}, \ldots]$ i $\beta_i = \frac{q_{i-2}}{q_{i-1}}$ za $i \geq 1$ imamo:

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| = \frac{1}{q_n^2(\alpha_{n+1} + \beta_{n+1})}.$$

Ovdje je, za n dovoljno velik, $\alpha_{n+1} = [1, 1, 1, \ldots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ i

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_{n+1}} &= \frac{q_n}{q_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{q_{n-1}}{q_{n-2}}} = a_n + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{\frac{q_{n-2}}{q_{n-3}}}} \\ &= \cdots = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1] = [\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-N}, a_N, \ldots, a_1]. \end{aligned}$$

Budući da su $[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-N-1}]$ i $[\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{n-N}]$ susjedne konvergente od $\frac{1}{\beta_{n+1}}$, slijedi da se $\frac{1}{\beta_{n+1}}$ nalazi između njih. Stoga je $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta_{n+1}} = [1, 1, 1, \ldots] = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$. Prema tome,

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n+1} = \Big(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\Big)^{-1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha_{n+1} + \beta_{n+1}) = \sqrt{5}.$$

$\square$

Teorem (Legendre)

Neka su p, q cijeli brojevi takvi da je $q \geq 1$ i

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}.$$

Tada je $\frac{p}{q}$ neka konvergenta od α.

Dokaz: Možemo pretpostaviti da je $\alpha \neq \frac{p}{q}$; inače je tvrdnja trivijalno zadovoljena.

Tada možemo pisati $\alpha - \frac{p}{q} = \frac{\varepsilon\vartheta}{q^2}$, gdje je $0 < \vartheta < \frac{1}{2}$ i $\varepsilon = \pm 1$. Neka je

$$\frac{p}{q} = [b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}]$$

razvoj od $\frac{p}{q}$ u jednostavni verižni razlomak, gdje je n izabran tako da vrijedi $(-1)^{n-1} = \varepsilon$. To uvijek možemo postići jer je $[a_0, a_1, \ldots, a_m] = [a_0, a_1, \ldots, a_m - 1, 1]$.

Definirajmo ω sa

$$\alpha = \frac{\omega p_{n-1} + p_{n-2}}{\omega q_{n-1} + q_{n-2}}, \tag{3}$$

tako da je $\alpha = [b_0, b_1 \ldots, b_{n-1}, \omega]$ (zbog relacije koja je dokazana ako "uvrstimo" $a_n = \omega$).

Neka je $\frac{p_i}{q_i} = [b_0, b_1, \ldots, b_i]$. Primjetimo da je $p_{n-1}/q_{n-1} = p/q$.

Sada je, po formuli dokazanoj u dokazu Borelovog teorema, imamo $q_n\alpha - p_n = \frac{(-1)^n}{\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1}}$ vrijedi

$$\frac{\varepsilon\vartheta}{q^2} = \alpha - \frac{p}{q} = \frac{1}{q_{n-1}}(\alpha q_{n-1} - p_{n-1}) = \frac{1}{q_{n-1}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}},$$

$$= \frac{1}{q_{n-1}} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{\omega q_{n-1} + q_{n-2}},$$

pa je $\vartheta = \frac{q_{n-1}}{\omega q_{n-1} + q_{n-2}}$.

Rješavanjem ove relacije po ω, dobivamo $\omega = \frac{1}{\vartheta} - \frac{q_{n-2}}{q_{n-1}}$.

Odavde slijedi da je $\omega > 2 - 1 = 1$. Razvijmo ω u jednostavan verižni razlomak: $\omega = [b_n, b_{n+1}, b_{n+2}, \ldots]$.

Budući da je $\omega > 1$, svi b_j $(j = n, n+1, \dots)$ su prirodni brojevi.

Stoga je

$$\alpha = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}, \dots]$$

razvoj u jednostavni verižni razlomak od α i

$$\frac{p}{q} = \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} = [b_0, b_1, \dots, b_{n-1}]$$

je konvergenta od α, što je i trebalo dokazati. $\square$

Teorem (Hurwitz)

(i) Za svaki iracionalan broj α postoji beskonačno mnogo racionalnih brojeva $\frac{p}{q}$ takvih da je

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}q^2}.$$

(ii) Tvrdnja (i) ne vrijedi ukoliko se $\sqrt{5}$ zamijeni s bilo kojom konstantom $A > \sqrt{5}$.

Dokaz: Tvrdnja (i) slijedi direktno iz Borelovog teorema, dok tvrdnja (ii) slijedi iz dva teorema koja smo sada dokazali.

Naime, ako je iracionalan broj α oblika $[a_0, a_1, \ldots, a_N, 1, 1, 1, \ldots]$, onda se po Legendrevom Teoremu sva rješenja nejednadžbe $q^2\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{A}$, gdje je $A > \sqrt{5}$, nalaze među konvergentama od α. Međutim po dokazanom teoremu je $\lim_{\to\infty} q_n^2|\alpha - \frac{p_n}{q_n}| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ovu nejednadžbu zadovoljava samo konačno mnogo konvergenti od α. $\square$

Teorem (Zakon najboljih aproksimacija)

Neka je α iracionalan broj, te $\frac{p_0}{q_0}, \frac{p_1}{q_1}, \ldots$ konvergente od α. Tada vrijedi:

(i) $|\alpha q_0 - p_0| > |\alpha q_1 - p_1| > |\alpha q_2 - p_2| > \cdots$

(ii) Ako je $n \geq 1$ i $1 \leq q \leq q_n$, te ako je $(p, q) \neq (p_{n-1}, q_{n-1})$, (p_n, q_n), onda je $|\alpha q - p| > |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}|$.

Dokaz: Po ranije dokazanoj formuli je

$$\begin{aligned} |\alpha q_n - p_n| &= \frac{1}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}} < \frac{1}{q_n + q_{n-1}}, \\ |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}| &= \frac{1}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}} > \frac{1}{(a_n + 1) q_{n-1} + q_{n-2}} \\ &= \frac{1}{q_{n-1} + q_n}, \end{aligned}$$

čime je dokazana tvrdnja (i).

Da bi dokazali (ii), definirajmo brojeve μ, ν pomoću jednadžbi

$$\begin{aligned} \mu p_n + \nu p_{n-1} &= p, \\ \mu q_n + \nu q_{n-1} &= q. \end{aligned}$$

Matrica ovog sustava (s nepoznanicama μ, ν) ima determinantu $p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n = \pm 1$, pa su brojevi μ, ν cijeli brojevi (jer se determinanta pojavljuje u nazivniku u rješenju sustava po Cramerovom pravilu).

Ako je $\nu = 0$, onda je $p = \mu p_n$, $q = \mu q_n$, a to je nemoguće jer je $0 < q \leq q_n$ i $(p, q) \neq (p_n, q_n)$.

Ako je $\mu = 0$, onda je $p = \nu p_{n-1}$, $q = \nu q_{n-1}$.

Budući da je $(p, q) \neq (p_{n-1}, q_{n-1})$, slijedi $\nu \geq 2$ i zato je

$$|\alpha q - p| \geq 2 |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}| > |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}|.$$

Ako su $\mu \neq 0$, $\nu \neq 0$, onda zbog $1 \leq q \leq q_n$, μ i ν imaju suprotne predznake, pa brojevi $\mu(\alpha q_n - p_n)$ i $\nu(\alpha q_{n-1} - p_{n-1})$ imaju iste predznake (pošto su susjedne konvergente s različitih strana od α).

Stoga je

$$\begin{aligned} |\alpha q - p| &= |\alpha(\mu q_n + \nu q_{n-1}) - \mu p_n - \nu p_{n-1}| \\ &= |\mu(\alpha q_n - p_n)| + |\nu(\alpha q_{n-1} - p_{n-1})|, \end{aligned}$$

pa je, zbog $\mu\nu \neq 0$, $|\alpha q - p| > |\alpha q_{n-1} - p_{n-1}|$. $\square$

Razlomke oblika $\dfrac{p_{n,r}}{q_{n,r}} = \dfrac{rp_{n+1} + p_n}{rq_{n+1} + q_n}$, $r = 1, 2, \ldots, a_{n+2} - 1$, $n \geq -1$, nazivamo *sekundarne konvergente* verižnog razlomka $[a_0, a_1, \ldots]$.

Uočimo: $\dfrac{p_{n,0}}{q_{n,0}} = \dfrac{p_n}{q_n}$, $\dfrac{p_{n,a_{n+2}}}{q_{n,a_{n+2}}} = \dfrac{p_{n+2}}{q_{n+2}}$.

Propozicija

Za n paran vrijedi

$$\frac{p_n}{q_n} < \cdots < \frac{p_{n,r}}{q_{n,r}} < \frac{p_{n,r+1}}{q_{n,r+1}} < \cdots < \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}},$$

dok za n neparan vrijedi

$$\frac{p_n}{q_n} > \cdots > \frac{p_{n,r}}{q_{n,r}} > \frac{p_{n,r+1}}{q_{n,r+1}} > \cdots > \frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}.$$

Nadalje, za svaki prirodan broj n vrijedi

$$q_{n,r+1}p_{n,r} - p_{n,r+1}q_{n,r} = (-1)^{n+1}. \tag{4}$$

Dokaz: Dovoljno je dokazati relaciju (4). Imamo:

$$\begin{aligned} &q_{n,r+1}p_{n,r} - p_{n,r+1}q_{n,r} \\ &\quad = [(r+1)q_{n+1} + q_n](rp_{n+1} + p_n) - [(r+1)p_{n+1} + p_n](rq_{n+1} + q_n) \\ &\quad = q_{n+1}p_n - p_{n+1}q_n = (-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

$\square$

Definicija

Za beskonačni verižni razlomak $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ *kažemo da je periodski ako postoje cijeli brojevi* $k \geq 0$, $m \geq 1$ *takvi da je* $a_{m+n} = a_n$ *za sve* $n \geq k$. *U tom slučaju verižni razlomak pišemo u obliku*

$$[a_0, a_1, \dots, a_{k-1}, \overline{a_k, a_{k+1}, \dots, a_{k+m-1}}],$$

gdje "crta" iznad brojeva $a_k, \dots, a_{k+m-1}$ *znači da se taj blok brojeva ponavlja u nedogled.*

Primjer

(i) Neka je $\beta = [2, 3, 2, 3, \dots] = [\overline{2, 3}]$. *Tada je* $\beta = 2 + \frac{1}{3+\frac{1}{\beta}}$. *To daje kvadratnu jednadžbu za* β: $3\beta^2 - 6\beta - 2 = 0$, *pa zbog* $\beta > 0$, *dobivamo da je* $\beta = \frac{3+\sqrt{15}}{3}$.

Zadatak: Neka je $\alpha = [3, \overline{1, 3}]$. Odredite α. $\diamondsuit$

Ova dva primjera ilustriraju opću situaciju.

Definicija

Za iracionalan broj α *kažemo da je kvadratna iracionalnost ako je* α *korijen kvadratne jednadžbe s racionalnim koeficijentima.*

Teorem (Euler, Lagrange)

Razvoj u jednostavni verižni razlomak realnog broja α *je periodski ako i samo ako je* α *kvadratna iracionalnost.*

Dokaz: Neka je $\alpha = [b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, \overline{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}}]$, te neka je $\beta = [\overline{a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}}]$, tj. neka je β čisto periodski dio od α. Iz

$$\beta = [a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}, \beta]$$

slijedi da je

$$\beta = \frac{\beta p_{m-1} + p_{m-2}}{\beta q_{m-1} + q_{m-2}},$$

a to je kvadratna jednadžba za β (s cjelobrojnim koeficijentima). Budući da je β iracionalan (jer mu je razvoj beskonačan), slijedi da je β kvadratna iracionalnost.

Zapišimo α pomoću β:

$$\alpha = \frac{\beta p + p'}{\beta q + q'}, \tag{5}$$

gdje su $\frac{p}{q}$ i $\frac{p'}{q'}$ zadnje dvije konvergente od $[b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}]$.

Međutim, β ima oblik $\frac{a+\sqrt{b}}{c}$, pa iz (5) slijedi da i α ima isti oblik. Budući da α nije racionalan, prvi dio teorema je dokazan.

Dokažimo sada obrat. Neka je α kvadratna iracionalnost, tj. neka je $\alpha = \frac{a+\sqrt{b}}{c}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $b > 0$, $c \neq 0$ i b nije potpun kvadrat.

Množeći brojnik i nazivnik od α sa $|c|$, dobivamo

$$\alpha = \frac{ac + \sqrt{bc^2}}{c^2} \quad \text{ili} \quad \alpha = \frac{-ac + \sqrt{bc^2}}{-c^2},$$

u ovisnosti o tome je li c pozitivan ili negativan.

Stoga α možemo zapisati u obliku

$$\alpha = \frac{s_0 + \sqrt{d}}{t_0},$$

gdje su $d, s_0, t_0 \in \mathbb{Z}$, $t_0 \neq 0$, d nije potpun kvadrat i $t_0 | (d - s_0^2)$.

Sada ćemo opisati razvoj $[a_0, a_1, \ldots]$ u jednostavni verižni razlomak broja α. Neka je $\alpha_0 = \alpha$, te neka je

$$a_i = \lfloor \alpha_i \rfloor, \quad \alpha_i = \frac{s_i + \sqrt{d}}{t_i}, \quad s_{i+1} = a_i t_i - s_i, \quad t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i}. \tag{6}$$

Imamo:

$$\begin{aligned} \alpha_i - a_i &= \frac{s_i + \sqrt{d} - a_i t_i}{t_i} = \frac{\sqrt{d} - s_{i+1}}{t_i} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i(\sqrt{d} + s_{i+1})} \\ &= \frac{t_{i+1}}{\sqrt{d} + s_{i+1}} = \frac{1}{\alpha_{i+1}}, \end{aligned}$$

pa je zaista $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$.

Pokažimo sada matematičkom indukcijom da su s_i, t_i cijeli brojevi takvi da je $t_i \neq 0$ i $t_i | (d - s_i^2)$.
To vrijedi za $i = 0$. Ako tvrdnja vrijedi za neki i, onda iz $s_{i+1} = a_i t_i - s_i$ slijedi da je broj s_{i+1} cijeli.

Relacija

$$t_{i+1} = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_i} = \frac{d - s_i^2}{t_i} + 2a_i s_i - a_i^2 t_i$$

pokazuje da je i t_{i+1} cijeli broj.

Nadalje, $t_{i+1} \neq 0$, jer bi inače $d = s_{i+1}^2$ bio potpun kvadrat.

Konačno, iz $t_i = \frac{d - s_{i+1}^2}{t_{i+1}}$ slijedi da $t_{i+1} | (d - s_{i+1}^2)$.

Sa α_i' označimo konjugat od α_i, tj. $\alpha_i' = \frac{s_i - \sqrt{d}}{t_i}$. Budući da je konjugat kvocijenta jednak kvocijentu konjugata, imamo:
$\alpha_0' = \frac{\alpha_n' p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n' q_{n-1} + q_{n-2}}$.

Odavde je

$$\alpha_n' = -\frac{q_{n-2}}{q_{n-1}} \left(\frac{\alpha_0' - \frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}}{\alpha_0' - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}} \right).$$

Kad n teži u ∞, $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ i $\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}$ teže prema α_0, a $\alpha_0 \neq \alpha_0'$.

Stoga izraz u zagradi teži prema 1, pa je zbog toga pozitivan za dovoljno velike n, recimo za $n > N$.

Sada je za $n > N$ broj α'_n negativan. No, α_n je pozitivan za $n \geq 1$, pa je $\alpha_n - \alpha'_n = \frac{2\sqrt{d}}{t_n} > 0$.

Dakle, $t_n > 0$ za $n > N$. Nadalje, za $n > N$ imamo:

$$s_n^2 < s_n^2 + t_{n-1}t_n = d \implies |s_n| < \sqrt{d},$$

dok iz $\alpha_n > 1$ i upravo dokazanog slijedi

$$t_n < s_n + \sqrt{d} < 2\sqrt{d}.$$

Odavde slijedi da uređeni parovi (s_n, t_n) mogu poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti, pa postoje prirodni brojevi j, k, $j < k$, takvi da je $s_j = s_k$, $t_j = t_k$.

Sada (6) povlači da je $\alpha_j = \alpha_k$, pa je

$$\alpha = [a_0, \ldots, a_{j-1}, \overline{a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{k-1}}],$$

što je i trebalo dokazati. $\square$