

Aritmetičke funkcije

Za funkciju $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je multiplikativna ako je $f(1) = 1$, te ako je $f(mn) = f(m)f(n)$ za $(m, n) = 1$.

Aritmetičke funkcije

Za funkciju $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je multiplikativna ako je $f(1) = 1$, te ako je $f(mn) = f(m)f(n)$ za $(m, n) = 1$.

Jedan primjer multiplikativne funkcije je Eulerova funkcija za koju je ranije dokazano da zadovoljava ovo svojstvo.

Aritmetičke funkcije

Za funkciju $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je multiplikativna ako je $f(1) = 1$, te ako je $f(mn) = f(m)f(n)$ za $(m, n) = 1$.

Jedan primjer multiplikativne funkcije je Eulerova funkcija za koju je ranije dokazano da zadovoljava ovo svojstvo.

Često uz multiplikativnu funkciju f vežemo funkciju $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Aritmetičke funkcije

Za funkciju $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ kažemo da je multiplikativna ako je $f(1) = 1$, te ako je $f(mn) = f(m)f(n)$ za $(m, n) = 1$.

Jedan primjer multiplikativne funkcije je Eulerova funkcija za koju je ranije dokazano da zadovoljava ovo svojstvo.

Često uz multiplikativnu funkciju f vežemo funkciju $g(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Pokažimo da je g također multiplikativna. Neka je $(m, n) = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} g(mn) &= \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(dd') = \sum_{d|m} \sum_{d'|n} f(d)f(d') \\ &= \left(\sum_{d|m} f(d) \right) \left(\sum_{d'|n} f(d') \right) = g(m)g(n). \end{aligned}$$

Često ćemo koristiti i da za proizvoljnu funkciju f vrijedi

$$\sum_{d|n} f(n) = \sum_{d|n} f(n/d).$$

Često ćemo koristiti i da za proizvoljnu funkciju f vrijedi

$$\sum_{d|n} f(n) = \sum_{d|n} f(n/d).$$

Na primjer za $n = 6$ vrijedi

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(6) = f(6/1) + f(6/2) + f(6/3) + f(6/6).$$

Često ćemo koristiti i da za proizvoljnu funkciju f vrijedi

$$\sum_{d|n} f(n) = \sum_{d|n} f(n/d).$$

Na primjer za $n = 6$ vrijedi

$$f(1) + f(2) + f(3) + f(6) = f(6/1) + f(6/2) + f(6/3) + f(6/6).$$

Također često mijenjamo redoslijed sumacije, pa imamo

$$\sum_d \sum_{d'} f(d, d') = \sum_{d'} \sum_d f(d, d'),$$

s tim da moramo paziti po čemu idu d i d' tako da se s obje strane pojavljuju isti $f(d, d')$.

Definicija

Möbiusova funkcija $\mu(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je definirana sa

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako } n \text{ nije kvadratno slobodan} \\ (-1)^k, & \text{ako je } n = p_1 p_2 \cdots p_k, p_i \text{ različiti prosti brojevi.} \end{cases}$$

Očito je funkcija μ multiplikativna, pa je i funkcija $\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ također multiplikativna.

Definicija

Möbiusova funkcija $\mu(n)$, $n \in \mathbb{N}$ je definirana sa

$$\mu(n) = \begin{cases} 0, & \text{ako } n \text{ nije kvadratno slobodan} \\ (-1)^k, & \text{ako je } n = p_1 p_2 \cdots p_k, p_i \text{ različiti prosti brojevi.} \end{cases}$$

Očito je funkcija μ multiplikativna, pa je i funkcija $\nu(n) = \sum_{d|n} \mu(d)$ također multiplikativna.

Dakle, $\nu(1) = 1$, dok za $n > 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} \nu(n) &= \nu(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \nu(p_1^{\alpha_1}) \cdots \nu(p_k^{\alpha_k}) \\ &= (\mu(1) + \mu(p_1) + \mu(p_1^2) + \cdots) \cdots (\mu(1) + \mu(p_k) + \mu(p_k^2) + \cdots) \\ &= (1 - 1 + 0 + \cdots) \cdots (1 - 1 + 0 + \cdots) = 0. \end{aligned}$$

Teorem (Möbiusova formula inverzije)

Neka je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija, te neka je

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad n \in \mathbb{N}. \quad \text{Tada je } f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Teorem (Möbiusova formula inverzije)

Neka je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija, te neka je

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d), \quad n \in \mathbb{N}. \quad \text{Tada je } f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right).$$

Obrnuto, ako je $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d) F\left(\frac{n}{d}\right)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, onda je

$$F(n) = \sum_{d|n} f(d).$$

Teorem (Möbiusova formula inverzije)

Neka je $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ proizvoljna funkcija, te neka je

$F(n) = \sum_{d|n} f(d)$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(\frac{n}{d})$.

Obrnuto, ako je $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(\frac{n}{d})$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, onda je $F(n) = \sum_{d|n} f(d)$.

Dokaz: Dokažemo prvu tvrdnju. Imamo:

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right) &= \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{d'|\frac{n}{d}} f(d') = \sum_{d'|n} f(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu(d) \\ &= \sum_{d'|n} f(d') \nu\left(\frac{n}{d'}\right) = f(n). \end{aligned}$$

Da bi dokazali obrat, zapišimo jednakost $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)$ u obliku $f(n) = \sum_{d'|n} \mu\left(\frac{n}{d'}\right)F(d')$.

Da bi dokazali obrat, zapišimo enakost $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F\left(\frac{n}{d}\right)$ u obliku $f(n) = \sum_{d'|n} \mu\left(\frac{n}{d'}\right)F(d')$. Sada je

$$\sum_{d|n} f(d) = \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd'}\right)F(d') = \sum_{d'|n} \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu\left(\frac{n}{dd'}\right)F(d')$$

Da bi dokazali obrat, zapišimo jednakost $f(n) = \sum_{d|n} \mu(d)F(\frac{n}{d})$ u obliku $f(n) = \sum_{d'|n} \mu(\frac{n}{d'})F(d')$. Sada je

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} f(d) &= \sum_{d|n} f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{d'|\frac{n}{d}} \mu\left(\frac{n}{dd'}\right)F(d') = \sum_{d'|n} \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu\left(\frac{n}{dd'}\right)F(d') \\ &= \sum_{d'|n} F(d') \sum_{d|\frac{n}{d'}} \mu\left(\frac{n}{dd'}\right) = \sum_{d'|n} F(d')\nu\left(\frac{n}{d'}\right) = F(n). \end{aligned}$$



Primjenimo li Möbiusovu formulu inverzije na relaciju $\sum_{d|n} \varphi(d) = n = id(n)$, dobivamo

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) id \left(\frac{n}{d} \right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \quad (1)$$

Primjenimo li Möbiusovu formulu inverzije na relaciju $\sum_{d|n} \varphi(d) = n = id(n)$, dobivamo

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) id \left(\frac{n}{d} \right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \quad (1)$$

Definicija

Neka je n prirodan broj. S $\tau(n)$ ćemo označavati broj pozitivnih djelitelja broja n , a sa $\sigma(n)$ sumu svih pozitivnih djelitelja broja n .

Primjenimo li Möbiusovu formulu inverzije na relaciju $\sum_{d|n} \varphi(d) = n = id(n)$, dobivamo

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) id \left(\frac{n}{d} \right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \quad (1)$$

Definicija

Neka je n prirodan broj. S $\tau(n)$ ćemo označavati broj pozitivnih djelitelja broja n , a sa $\sigma(n)$ sumu svih pozitivnih djelitelja broja n .

Jasno je da vrijedi $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

Primjenimo li Möbiusovu formulu inverzije na relaciju $\sum_{d|n} \varphi(d) = n = id(n)$, dobivamo

$$\varphi(n) = \sum_{d|n} \mu(d) id \left(\frac{n}{d} \right) = n \sum_{d|n} \frac{\mu(d)}{d}. \quad (1)$$

Definicija

Neka je n prirodan broj. S $\tau(n)$ ćemo označavati broj pozitivnih djelitelja broja n , a sa $\sigma(n)$ sumu svih pozitivnih djelitelja broja n .

Jasno je da vrijedi $\tau(n) = \sum_{d|n} 1$, $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

Pošto su konstantna funkcija i identita multiplikativna, slijedi da su funkcije τ i σ također multiplikativne.

Budući da je $\tau(p^j) = j + 1$, $\sigma(p^j) = 1 + p + p^2 + \dots + p^j = \frac{p^{j+1}-1}{p-1}$,
dobivamo sljedeće formule za τ i σ :

Budući da je $\tau(p^j) = j + 1$, $\sigma(p^j) = 1 + p + p^2 + \dots + p^j = \frac{p^{j+1}-1}{p-1}$,
dobivamo sljedeće formule za τ i σ :

$$\tau(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1),$$

Budući da je $\tau(p^j) = j + 1$, $\sigma(p^j) = 1 + p + p^2 + \dots + p^j = \frac{p^{j+1}-1}{p-1}$,
dobivamo sljedeće formule za τ i σ :

$$\tau(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1),$$

$$\sigma(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Budući da je $\tau(p^j) = j + 1$, $\sigma(p^j) = 1 + p + p^2 + \dots + p^j = \frac{p^{j+1}-1}{p-1}$,
dobivamo sljedeće formule za τ i σ :

$$\tau(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1),$$
$$\sigma(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Često ćemo aproksimirati sumu integralima. Za rastuću integrabilnu funkciju f vrijedi

$$\int_{a-1}^b f(x) dx \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^{b+1} f(x) dx.$$

Budući da je $\tau(p^j) = j + 1$, $\sigma(p^j) = 1 + p + p^2 + \dots + p^j = \frac{p^{j+1}-1}{p-1}$,
dobivamo sljedeće formule za τ i σ :

$$\tau(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k (\alpha_i + 1),$$
$$\sigma(p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}) = \prod_{i=1}^k \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1}.$$

Često ćemo aproksimirati sumu integralima. Za rastuću integrabilnu funkciju f vrijedi

$$\int_{a-1}^b f(x) dx \leq \sum_{k=a}^b f(k) \leq \int_a^{b+1} f(x) dx.$$

Posebno

$$\int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx.$$

Propozicija

1) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za $n \geq 2$.

Propozicija

1) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za $n \geq 2$.

2) $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ za $n \geq 2$.

Propozicija

- 1) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za $n \geq 2$.
- 2) $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ za $n \geq 2$.

Dokaz:

1) Imamo:

$$\sigma(n) = \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{\frac{n}{d}} \leq n \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} = n \left(\frac{1}{n} + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right)$$

Propozicija

- 1) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za $n \geq 2$.
- 2) $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ za $n \geq 2$.

Dokaz:

1) Imamo:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{\frac{n}{d}} \leq n \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} = n \left(\frac{1}{n} + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right) \\ &< n \left(1 + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right) \leq n \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) = n(1 + \ln n).\end{aligned}$$

Propozicija

- 1) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za $n \geq 2$.
- 2) $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ za $n \geq 2$.

Dokaz:

- 1) Imamo:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{\frac{n}{d}} \leq n \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} = n \left(\frac{1}{n} + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right) \\ &< n \left(1 + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right) \leq n \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) = n(1 + \ln n).\end{aligned}$$

- 2) Funkcija $f(n) = \frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2}$ je multiplikativna.

Propozicija

- 1) $\sigma(n) < n(1 + \ln n)$ za $n \geq 2$.
- 2) $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$ za $n \geq 2$.

Dokaz:

1) Imamo:

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sum_{d|n} d = \sum_{d|n} \frac{n}{\frac{n}{d}} \leq n \sum_{d \leq n} \frac{1}{d} = n \left(\frac{1}{n} + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right) \\ &< n \left(1 + \sum_{d=1}^{n-1} \frac{1}{d} \right) \leq n \cdot \left(1 + \int_1^n \frac{1}{x} dx \right) = n(1 + \ln n).\end{aligned}$$

2) Funkcija $f(n) = \frac{\sigma(n)\varphi(n)}{n^2}$ je multiplikativna. Nadalje,

$$f(p^j) = \frac{(p^{j+1} - 1)p^{j-1}(p-1)}{(p-1)p^{2j}} = 1 - \frac{1}{p^{j+1}} \geq 1 - \frac{1}{p^2},$$

pa je

$$f(n) \geq \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) \geq \prod_{m=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{m^2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \cdot \frac{2 \cdot 4}{3 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 4} \cdot \frac{4 \cdot 6}{5 \cdot 5} \cdots = \frac{1}{2}.$$

Prema tome, $\sigma(n)\varphi(n) \geq \frac{1}{2}n^2$. Iz 1) slijedi $\sigma(n) < 2n \ln n$ za $n > 2$, odakle je $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$. Za $n = 2$ eksplicitno provjerimo. □

Prema tome, $\sigma(n)\varphi(n) \geq \frac{1}{2}n^2$. Iz 1) slijedi $\sigma(n) < 2n \ln n$ za $n > 2$, odakle je $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$. Za $n = 2$ eksplicitno provjerimo. □

Često je od interesa ispitati asimptotsko ponašanje aritmetičkih funkcija, tj. ocijeniti sume oblika $\sum_{n \leq x} f(n)$, gdje je x dovoljno velik realan broj.

Prema tome, $\sigma(n)\varphi(n) \geq \frac{1}{2}n^2$. Iz 1) slijedi $\sigma(n) < 2n \ln n$ za $n > 2$, odakle je $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$. Za $n = 2$ eksplicitno provjerimo. □

Često je od interesa ispitati asimptotsko ponašanje aritmetičkih funkcija, tj. ocijeniti sume oblika $\sum_{n \leq x} f(n)$, gdje je x dovoljno velik realan broj.

Mi ćemo to učiniti za funkcije τ , σ i φ . Pritom ćemo rabiti sljedeću oznaku: $f(x) = O(g(x))$ ako postoji konstanta C takva da je $|f(x)| \leq Cg(x)$ za sve x .

Prema tome, $\sigma(n)\varphi(n) \geq \frac{1}{2}n^2$. Iz 1) slijedi $\sigma(n) < 2n \ln n$ za $n > 2$, odakle je $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$. Za $n = 2$ eksplicitno provjerimo. □

Često je od interesa ispitati asimptotsko ponašanje aritmetičkih funkcija, tj. ocijeniti sume oblika $\sum_{n \leq x} f(n)$, gdje je x dovoljno velik realan broj.

Mi ćemo to učiniti za funkcije τ , σ i φ . Pritom ćemo rabiti sljedeću oznaku: $f(x) = O(g(x))$ ako postoji konstanta C takva da je $|f(x)| \leq Cg(x)$ za sve x .

Na primjer, budući da je $\lfloor x \rfloor = x - \{x\}$, a $\{x\}$ je omeđena funkcija, možemo pisati: $\lfloor x \rfloor = x + O(1)$.

Prema tome, $\sigma(n)\varphi(n) \geq \frac{1}{2}n^2$. Iz 1) slijedi $\sigma(n) < 2n \ln n$ za $n > 2$, odakle je $\varphi(n) > \frac{1}{4} \cdot \frac{n}{\ln n}$. Za $n = 2$ eksplicitno provjerimo. □

Često je od interesa ispitati asimptotsko ponašanje aritmetičkih funkcija, tj. ocijeniti sume oblika $\sum_{n \leq x} f(n)$, gdje je x dovoljno velik realan broj.

Mi ćemo to učiniti za funkcije τ , σ i φ . Pritom ćemo rabiti sljedeću oznaku: $f(x) = O(g(x))$ ako postoji konstanta C takva da je $|f(x)| \leq Cg(x)$ za sve x .

Na primjer, budući da je $[x] = x - \{x\}$, a $\{x\}$ je omeđena funkcija, možemo pisati: $[x] = x + O(1)$.

Također, zbog

$$\int_1^{[x]} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < 1 + \int_1^x \frac{1}{t} dt,$$

tj. $\ln [x] \leq \sum_{n \leq x} \frac{1}{n} < 1 + \ln x$, možemo pisati:

$$\sum_{n \leq x} \frac{1}{n} = \ln x + O(1).$$

Sljedeću lemu ostavljamo bez dokaza.

Lema

Vrijedi:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Sljedeću lemu ostavljamo bez dokaza.

Lema

Vrijedi:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Propozicija

- 1) $\sum_{n \leq x} \tau(n) = x \ln x + O(x)$
- 2) $\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \frac{1}{12} \pi^2 x^2 + O(x \ln x)$
- 3) $\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \frac{3}{\pi^2} \cdot x^2 + O(x \ln x)$

Dokaz:

1)

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \tau(n) &= \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} 1 = \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} 1 = \sum_{d \leq x} \left[\frac{x}{d} \right] = \sum_{d \leq x} \left(\frac{x}{d} + O(1) \right) \\ &= x \sum_{d \leq x} \left(\frac{1}{d} + O(1) \right) = x \ln x + O(x) \end{aligned}$$

2) Primijetimo da je

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{n=md \leq x} \frac{md}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

2) Primijetimo da je

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{n=md \leq x} \frac{md}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Nadalje je

$$\sum_{m \leq \frac{x}{d}} m = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O\left(\frac{x}{d} \right).$$

2) Primijetimo da je

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{n=md \leq x} \frac{md}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Nadalje je

$$\sum_{m \leq \frac{x}{d}} m = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O\left(\frac{x}{d} \right).$$

Sada je

$$\sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = O\left(\int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} dt \right) = O\left(\frac{1}{x} \right).$$

Konačno je, po Lemi koju nismo dokazivali $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Slijedi

2) Primijetimo da je

$$\sum_{n \leq x} \sigma(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} d = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{n=md \leq x} \frac{md}{d} = \sum_{d \leq x} \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Nadalje je

$$\sum_{m \leq \frac{x}{d}} m = \frac{1}{2} \left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor \left(\left\lfloor \frac{x}{d} \right\rfloor + 1 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right).$$

Sada je

$$\sum_{d \leq x} \frac{1}{d^2} - \sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = O\left(\int_x^{\infty} \frac{1}{t^2} dt\right) = O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Konačno je, po Lemi koju nismo dokazivali $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} = \frac{\pi^2}{6}$. Slijedi

$$\begin{aligned} \sum_{n \leq x} \sigma(n) &= \sum_{d \leq x} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d} \right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right) \right] = \frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \left(\frac{1}{d} \right)^2 + x \sum_{d \leq x} O\left(\frac{1}{d}\right) \\ &= \left[\frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x) \right] + xO(\ln x) = \frac{\pi^2}{12} x^2 + O(x \ln x). \end{aligned}$$

3) Prema (1), imamo:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

3) Prema (1), imamo:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Već smo vidjeli da je zadnja suma jednaka $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)$.

3) Prema (1), imamo:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Već smo vidjeli da je zadnja suma jednaka $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)$. Nadalje

$$\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

3) Prema (1), imamo:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Već smo vidjeli da je zadnja suma jednaka $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)$. Nadalje

$$\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da bi izračunali $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$, pomnožimo je s $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2}$.

3) Prema (1), imamo:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{n \leq x} \sum_{d|n} \mu(d) \cdot \frac{n}{d} = \sum_{d \leq x} \mu(d) \sum_{m \leq \frac{x}{d}} m.$$

Već smo vidjeli da je zadnja suma jednaka $\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right)$. Nadalje

$$\sum_{d \leq x} \frac{\mu(d)}{d^2} = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Da bi izračunali $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$, pomnožimo je s $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2}$. Dobivamo:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} \right) \left(\sum_{d=1}^{\infty} \frac{1}{d^2} \right) &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{dd'=m} 1 \cdot \mu(d) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{d|m} \mu(d) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\nu(m)}{m^2} = 1. \end{aligned}$$

Prema tome, dobili smo da je $\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2} = \frac{6}{\pi^2}$, pa konačno imamo:

$$\sum_{n \leq x} \varphi(n) = \sum_{d \leq x} \mu(d) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{d}\right)^2 + O\left(\frac{x}{d}\right) \right] = \frac{x^2}{2} \sum_{d \leq x} \left(\frac{\mu(d)}{d^2} \right) + \sum_{d \leq x} O\left(\frac{x}{d}\right)$$

$$= \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x).$$



Budući da je $\sum_{n \leq x} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2}x^2$, $\sum_{n \leq x} n \sim \frac{1}{2}x^2$, rezultat iz Propozicije 3) može se interpretirati i tako da kažemo da je vjerojatnost da su dva nasumce izabrana cijela broja relativno prosta jednaka $\frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079$.

$$= \frac{3}{\pi^2}x^2 + O(x \ln x).$$



Budući da je $\sum_{n \leq x} \varphi(n) \sim \frac{3}{\pi^2}x^2$, $\sum_{n \leq x} n \sim \frac{1}{2}x^2$, rezultat iz Propozicije 3) može se interpretirati i tako da kažemo da je vjerojatnost da su dva nasumce izabrana cijela broja relativno prosta jednaka $\frac{6}{\pi^2} \approx 0.6079$.

Godine 1896. Hadamard i de la Vallée Poussin su dokazali da je $\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x}$ kad $x \rightarrow \infty$.