

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

- a) Koristeći tablice istinitosti, dokažite da su sudovi

$$(A \Leftrightarrow B) \vee C \quad \text{i} \quad (A \Rightarrow (B \vee C)) \wedge (B \Rightarrow (A \vee C))$$

semantički jednaki.

- b) Zadana je tvrdnja:

Ako su svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva disjunktna, onda svaki podskup skupa prirodnih brojeva ima minimalni element.

- (b1) Zapišite zadanu tvrdnju simbolima.
(b2) Zapišite simbolima obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
(b3) Odredite istinitost zadane tvrdnje, njezinog obrata, negacije i obrata po kontrapoziciji. Sve svoje zaključke detaljno obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 2. (10 bodova)a) Neka su A , B , C i D skupovi. Ako je $A \subset C$, dokažite da vrijedi

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = A \times (B \setminus D).$$

b) Neka su X , Y i Z podskupovi univerzalnog skupa \mathcal{U} . Zapišite skup $X \setminus (Y \cup Z)$ koristeći samo operacije unije i komplementa.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 3. (10 bodova)

- a) Navedite relaciju ekvivalencije $\rho \subseteq A \times A$ definiranu na skupu $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ tako da je kvocijentni skup $A/\rho = \{\{1, 2\}, \{3, 4, 5\}, \{6\}\}$.
- b) Navedite najmanju relaciju parcijalnog uređaja $\tau \subseteq B \times B$ definiranu na skupu $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ koja sadrži uređene parove $(2, 6)$ i $(6, 3)$.
- c) Za skupove $K, L, M \subseteq \mathbb{R}$, $K = [1, 2] \cup \{3\}$, $L = [1, 4]$ i $M = [2, 3] \cup \{4\}$, u Kartezijevom koordinatnom sustavu skicirajte skup $(L \times M) \setminus (K \times L)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 4. (10 bodova) Na partitivnom skupu skupa prirodnih brojeva, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, definirana je binarna relacija ρ na sljedeći način:

$$A\rho B \iff \exists n \in \mathbb{N}, \quad B = \{n \cdot a : a \in A\}.$$

- a) Je li ρ relacija ekvivalencije? Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.
- b) Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 5. (10 bodova) Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru. Vrijeme rješavanja je 120 minuta. Nije dozvoljeno koristiti ništa osim pribora za pisanje.

Zadatak 1. (10 bodova)

- a) Koristeći tablice istinitosti, dokažite da su sudovi

$$A \vee (B \Leftrightarrow C) \quad \text{i} \quad ((A \vee B) \Rightarrow C) \wedge (B \Rightarrow (A \vee C))$$

semantički jednaki.

- b) Zadana je tvrdnja:

Ako je presjek svaka dva podskupa skupa prirodnih brojeva neprazan, onda svaki podskup skupa prirodnih brojeva ima infimum.

- (b1) Zapišite zadanu tvrdnju simbolima.
(b2) Zapišite simbolima obrat, negaciju i obrat po kontrapoziciji zadane tvrdnje.
(b3) Odredite istinitost zadane tvrdnje, njezinog obrata, negacije i obrata po kontrapoziciji. Sve svoje zaključke detaljno obrazložite.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 2. (10 bodova)a) Neka su A , B , C i D skupovi. Ako je $B \subset D$, dokažite da vrijedi

$$(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times B.$$

b) Neka su X , Y i Z podskupovi univerzalnog skupa \mathcal{U} . Zapišite skup $(X \cup Y) \setminus Z$ koristeći samo operacije presjeka i komplementa.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 3. (10 bodova)

- a) Navedite relaciju ekvivalencije $\rho \subseteq A \times A$ definiranu na skupu $A = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ tako da je kvocijentni skup $A/\rho = \{\{2\}, \{3, 4, 5\}, \{6, 7\}\}$.
- b) Navedite najmanju relaciju parcijalnog uređaja $\tau \subseteq B \times B$ definiranu na skupu $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ koja sadrži uređene parove $(1, 4)$ i $(4, 3)$.
- c) Za skupove $K, L, M \subseteq \mathbb{R}$, $K = \{2\} \cup [3, 4]$, $L = [1, 4]$ i $M = [2, 3] \cup \{4\}$, u Kartezijevom koordinatnom sustavu skicirajte skupove $(M \times L) \setminus (L \times K)$.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 4. (10 bodova) Na partitivnom skupu skupa cijelih brojeva, $\mathcal{P}(\mathbb{Z})$, definirana je binarna relacija ρ na sljedeći način:

$$A\rho B \iff \exists k \in \mathbb{Z}, B = \{a + k : a \in A\}.$$

- a) Je li ρ relacija ekvivalencije? Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.
- b) Je li ρ relacija parcijalnog uređaja? Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom.

ELEMENTARNA MATEMATIKA 1

Prvi kolokvij – 28. studenog 2023.

Zadatak 5. (10 bodova) Dokažite da za sve prirodne brojeve n vrijedi

$$(n + 1)(n + 2) \cdots (2n) = 2^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n - 1).$$