

Euklidske konstrukcije

U skripti za predavanja proučite str. 7-13 (o elementarnim zadaćama i primjeri 1.8 i 1.9).

1 Metoda presjeka

U skripti za predavanja cjelina 1.4, posebno osnovne neodređene zadaće (str. 13-14).

1.1. Konstruirajte trokut ABC kojemu je duljina stranice \overline{AB} jednaka c , duljina težišnice iz vrha C jednaka t_c i mjera kuta u vrhu C jednaka γ , $\gamma < 90^\circ$.

1.2. Dane su duljine c , t_c i omjer $p : q > 1$. Konstruirajte trokut ABC tako da bude $|AB| = c$, $|CD| = t_c$, gdje je D polovište dužine \overline{AB} i $|AC| : |BC| = p : q$.

1.3. Konstruirajte kružnicu koja dodiruje dva dana paralelna pravca i danu kružnicu.

1.4. Konstruirajte kružnicu danog radijusa r koja dira danu kružnicu k_1 i s danom kružnicom k_2 ima zajedničku tetivu dane duljine d .

1.5. Dana je točka A na pravcu a i točka P izvan pravca a . Konstruirajte kružnicu koja prolazi točkom P i dira pravac a u točki A .

2 Algebarska metoda

U skripti za predavanja cjelina 1.5, posebno konstrukcije prikazane na slici 1.14.

2.1. Dane su dužine duljina a i b . Konstruirajte dužine duljina

$$a\sqrt{35}, \frac{4b}{\sqrt{3}}, \sqrt{a^2 + 2ab + 3b^2}.$$

2.2. Dane su dužine duljina a i b . Konstruirajte kut β takav da vrijedi

$$\cos \beta = \frac{\sqrt{3a^2 - 2b^2}}{2a}.$$

2.3. Dane su dvije koncentrične kružnice. Konstruirajte krug čija je površina jednaka površini prstena koji određuju te dvije kružnice.

2.4. Dan je trokut. Konstruirajte kvadrat iste površine.

2.5. Dan je trokut. Konstruirajte paralelu s odabranom osnovicom trokuta koja dijeli trokut na dva dijela jednakih površina.

2.6. Dan je trokut ABC . Oko njegovih vrhova opišite kružnice koje se u parovima dodiruju izvana.

2.7. Konstruirajte pravokutni trokut ako su dani c , duljina njegove hipotenuze i l , duljina onog dijela simetrale pravog kuta koji leži unutar trokuta.

Izometrije euklidske ravnine

3 Osna simetrija i centralna simetrija

3.1. Dan je pravac p i točke B i C s iste strane tog pravca. Konstruirajte točku A na pravcu p tako da polupravci AB i AC zatvaraju s pravcem p sukladne kutove.

3.2. Dan je pravac p i točke B i C s iste strane tog pravca. Konstruirajte točku A na pravcu p tako da vrijedi $\sphericalangle(AB, p) = 2\sphericalangle(AC, p)$.

3.3. Dani su pravci d , e i f koji prolaze točkom O . Konstruirajte trokut ABC tako da su mu dani pravci simetrale kutova.

3.4. Konstruirajte četverokut $ABCD$ kojemu dijagonala AC raspolavlja kut u vrhu A ako su mu dane duljine stranica $|AB| = a$, $|BC| = b$, $|CD| = c$, $|DA| = d$.

3.5. Dana je kružnica k , točka A i pravac p . Konstruirajte pravac q koji prolazi točkom A te siječe kružnicu k i pravac p u točkama B i C tako da točka A bude polovište dužine \overline{BC} .

3.6. Dane su kružnice k_1 i k_2 sa zajedničkom točkom A . Kroz A konstruirajte pravac p na kojem leže sukladne tetive kružnica k_1 i k_2 .

4 Translacija, rotacija i klizna simetrija

4.1. Dane su kružnice k_1 i k_2 , pravac p i duljina a . Konstruirajte pravac paralelan s p tako da sjecišta A i B tog pravca s kružnicama k_1 i k_2 vrijedi $|AB| = a$.

4.2. Na različitim obalama rijeke nalaze se naselja A i B . Gdje treba sagraditi most preko rijeke tako da put od A do B bude najkraći? Obale rijeke su međusobno paralelne, a most treba biti okomit na rijeku.

4.3. Dane su kružnice k_1 i k_2 te pravac p . Konstruirajte pravac paralelan s p tako da su tetive kružnica k_1 i k_2 određene tim pravcem sukladne.

4.4. Dani su paralelni pravci a , b i c . Konstruirajte jednakostranični trokut ABC tako da je $A \in a$, $B \in b$ i $C \in c$. (primjer 1.18. riješen na predavanjima algebarskom metodom)

4.5. Zadane su točke S , K i L . Konstruirajte kvadrat kojemu je S središte, a pravci na kojima mu leže dvije susjedne stranice prolaze točkama K i L .

4.6. Dane su točke B_1, B_2, \dots, B_n i kut φ . Konstruirajte mnogokut $A_1A_2\dots A_n$ tako da trokuti $A_1A_2B_1, A_2A_3B_2, \dots, A_{n-1}A_nB_{n-1}$ i $A_nA_1B_n$ budu jednakokračni ($|A_kB_k| = |A_{k+1}B_k|$) s kutom φ u vrhovima B_1, \dots, B_n .

4.7. Dan je pravac p , točke A i B s iste strane toga pravca i dužina duljine a . Na pravcu p konstruirajte točke C i D tako da je $|CD| = a$ i da je zbroj duljina $|AC| + |CD| + |DB|$ najmanji mogući.

Homotetija i inverzija

5 Homotetija

5.1. U dani trokut ABC upišite trokut DEF tako da je $D \in \overline{BC}$, $E \in \overline{CA}$, $F \in \overline{AB}$ i da su stranice \overline{EF} , \overline{FD} i \overline{DE} redom paralelne danim pravcima d , e i f .

5.2. Konstruirajte kružnicu koja prolazi danom točkom A i dira dva dana (neparalelna) pravca b i c .

5.3. U zadani trokut ABC upišite kvadrat kojemu dva susjedna vrha leže na stranici BC , a po jedan vrh na stranicama \overline{AB} i \overline{AC} .

5.4. Konstruirajte trokut kojemu su dani kutovi i opseg.

5.5. Konstruirajte trokut ako su zadane duljine njegovih visina.

6 Inverzija

6.1. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Konstruirajte njihovu potencijalu.

6.2. Inverzija je zadana svojom kružnicom inverzije $k(O, r)$.

(i) Konstruirajte inverznu sliku dane točke A s obzirom na kružnicu k .

(ii) Konstruirajte inverznu sliku danog pravca p .

(iii) Konstruirajte inverznu sliku dane kružnice l .

6.3. Inverzija je zadana svojim središtem O i parom pridruženih točaka A, A' .

(i) Konstruirajte sliku dane točke B po toj inverziji.

(ii) Konstruirajte kružnicu inverzije.

6.4. Dana je kružnica $k(O, r)$. Konstruirajte inverznu sliku vrhova i stranica kvadrata upisanog kružnici k , njegovih dijagonala, te polovišta njegovih stranica s obzirom na kružnicu k .

6.5. Dane su dvije kružnice koje se ne sijeku. Nađite inverziju koja ih preslikava u dvije koncentrične kružnice.

6.6. Konstruirajte skup dirališta dviju kružnica koje se diraju pri čemu svaka od tih dviju kružnica dira dane kružnice k_1 i k_2 koje se sijeku.

6.7. Konstruirajte kružnicu k koja prolazi danom točkom O , dira danu kružnicu k_1 i ortogonalna je na danu kružnicu k_2 .

7 Apolonijev problem

7.1. Dane su tri kružnice k_1 , k_2 i k_3 koje prolaze zajedničkom točkom T . Koristeći metodu inverzije, konstruirajte kružnicu koja dodiruju kružnice k_1 , k_2 i k_3 . Koliko zadatak ima rješenja?

7.2. Dani su kružnica k , pravac p koji dodiruje kružnicu k i točka T koja leži na pravcu p . Konstruirajte kružnicu koja prolazi točkom T , dodiruje pravac p i kružnicu k .

Zadatak pokušajte riješiti na dva načina: ne koristeći inverziju te pomoću inverzije.

7.3. Zadani su kružnica k i pravac p koji se sijeku u dvije točke. Unutar kružnice dana je točka A . Konstruirajte kružnicu koja dodiruju pravac p i kružnicu k te prolazi točkom A .

7.4. Dane su dvije sukladne kružnice k_1 i k_2 koje se diraju u točki D te treća kružnica k_3 . Konstruirajte sve kružnice koje dodiruju kružnice k_1 , k_2 i k_3 . Koliko zadatak može imati rješenja?

7.5. Riješite opći Apolonijev problem: Dane su tri kružnice k_1 , k_2 i k_3 (u bilo kakvom međusobnom položaju). Konstruirajte kružnicu koja dodiruju kružnice k_1 , k_2 i k_3 .

7.6. Analizirajte pojedini Apolonijev problem u kojem pojedinu kružnicu možete zamijeniti točkom ili pravcem. Neki od tako nastalih slučajeva su:

TTT Dane su tri točke. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz sve tri dane točke.

PTT Dane su dvije točke i pravac. Konstruirati kružnicu koja prolazi danim točkama i dodiruje dani pravac.

KPT Dani su točka, pravac i kružnica. Konstruirati kružnicu koja prolazi danom točkom, dodiruje dani pravac i danu kružnicu.

Pronađite sve slučajeve i razmislite kako biste ih riješili. Također, uvjet dodira možete ponegdje zamijeniti s uvjetom ortogonalnosti i tako dobiti još općenitije probleme.

Projektivna preslikavanja

8 Perspektivna kolineacija i perspektivna afinost

8.1. Neka su A, B i C tri kolinearne točke. Ako je djelišni omjer $(ABC) = t$, odredite (BAC) , (ACB) i (CBA) .

8.2. Neka su A, B, C i D četiri kolinearne točke. Ako je dvoomjer $(ABCD) = t$, odredite $(BACD)$, $(CDAB)$ i $(ACBD)$.

8.3. Konstruirajte sliku i prasiliku beskonačno dalekog pravca pri perspektivnoj kolineaciji (O, o) .

8.4. Perspektivna kolineacija određena je s dva para pridruženih točaka, $A \mapsto A', B \mapsto B'$, te parom pridruženih pravaca $c \mapsto c'$. Konstruirajte centar i os.

8.5. Dani su pravci a, b, c sa zajedničkom točkom O i točke K, L, M . Konstruirajte trokut ABC tako da je $A \in a, B \in b, C \in c$ i pravci BC, CA i AB prolaze redom točkama K, L i M .

8.6. Zadan je četverokut $ABCD$ koji nije paralelogram. Postoji li pravac o koji prolazi točkom C i perspektivna kolineacija sa središtem A i osi o koja zadani četverokut preslikava u paralelogram?

8.7. Pravilnom osmerokutu $ABCDEFGH$ konstruirajte perspektivno afinu sliku ako je pravac AC os afinosti, a točki F je pridružena točka H .

8.8. Dana je perspektivna afinost s osi o i parom pridruženih točaka $T \mapsto T'$. Konstruirajte par okomitih pravaca a, b točkom T koji se preslikavaju u par okomitih pravaca.

Krivulje drugog stupnja

9 Elipsa, hiperbola, parabola

9.1. Dana je elipsa s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ i točka T . Konstruirajte tangente elipse točkom T .

9.2. Dana je elipsa s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ i pravac p . Konstruirajte tangente elipse paralelne s pravcem p .

9.3. Konstruirajte tangente hiperbole s fokusima F, F' i velikom osi $2a$ iz središta O te hiperbole. Konstruirajte dirališta tih tangenata.

9.4. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d i točka T . Konstruirajte tangente parabole točkom T .

9.5. Dana je parabola s fokusom F i ravnalicom d i pravac p . Konstruirajte tangentu parabole paralelnu s pravcem p .

10 Pascalov i Brianchonov teorem

10.1. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne i pravac t točkom A . Konstruirajte drugo sjecište pravca t s krivuljom drugog stupnja koja prolazi kroz tih pet točaka.

10.2. Dane su točke A, B, C, D, E od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Konstruirajte tangentu t u točki A krivulje drugog stupnja određene s tih pet točaka.

10.3. Dani su pravci a, b, c, d, e od kojih nikoja tri nemaju zajedničku točku i točka T na pravcu a . Konstruirajte tangentu f iz točke T na krivulju drugog stupnja koja dira tih pet pravaca.

10.4. Dani su pravci a, b, c, d, e od kojih nikoja tri nemaju zajedničku točku. Konstruirajte diralište T pravca a s krivuljom drugog stupnja određenom tangentama a, b, c, d, e .

10.5. Dani su pravci a, c, d od kojih nijedna dva nisu međusobno paralelna. Konstruirajte diralište pravca a s hiperbolom kojoj su c i d asimptote, a a tangenta.

11 Krivulje drugog stupnja kao perspektivno kolinearne slike kružnice

11.1. Zadana je perspektivna kolineacija κ s centrom O , osi o i parom pridruženih točaka $T \mapsto T'$. Odaberite neku kružnicu k tako da je $\kappa(k) = k'$ hiperbola te konstruirajte asimptote i jednu točku te hiperbole.

11.2. Zadane su asimptote OU' i OV' (U i V su u beskonačnosti), točka T hiperbole k' i pravac p' . Konstruirajte sjecište hiperbole k' i pravca p' .

11.3. Zadana je dužina \overline{AB} i pravac t' koji ju ne siječe. Konstruirajte elipsu kojoj je \overline{AB} jedna os, a t' tangenta. Odredite diralište tangente.

11.4. Dane su osi $\overline{A'B'}$ i $\overline{C'D'}$ elipse k' te pravac p' koji ju siječe. Konstruirajte sjecište pravca p' i elipse k' .

11.5. Zadan je par konjugiranih promjera $\overline{M'N'}$, $\overline{P'Q'}$ elipse. Konstruirajte osi te elipse.

Konstrukcije ograničenim sredstvima

12 Konstrukcije ograničenim sredstvima

12.1. Dan je trokut i jedna njegova srednjica. Konstruirajte druge dvije srednjice koristeći samo ravnalo.

12.2. Dana je kružnica i njen promjer, te točka T . Konstruirajte okomicu iz točke T na promjer kružnice koristeći samo ravnalo.

12.3. Dane su točke A i B . Koristeći samo šestar konstruirajte točku P kolinearnu s danim točkama takvu da je $|AP| = 4|AB|$ i B se nalazi između A i P .

12.4. Dane su točke A i B . Koristeći samo šestar konstruirajte polovište dužine \overline{AB} .

12.5. Koristeći ravnalo konačne duljine l i šestar maksimalnog otvora r konstruirajte dužinu \overline{AB} ako su dane točke A i B udaljene za manje od $2r$ i više od l .

12.6. Dane su točke A i B udaljene barem d . Dvobridnim ravnalom širine d konstruirajte točku C tako da je B polovište dužine \overline{AC} .

12.7. Dana je dužina \overline{AB} , njeno polovište P te točka T koja nije na pravcu AB . Konstruirajte paralelu s pravcem AB točkom T koristeći samo ravnalo.

12.8. Dana su dva paralelna pravca i točke A i B na jednom od njih. Konstruirajte polovište dužine \overline{AB} koristeći samo ravnalo.

12.9. Dana su dva paralelna pravca i točka T izvan njih. Konstruirajte pravac točkom T paralelan zadanim pravcima koristeći samo ravnalo.

12.10. Dane su točke A i B . Dvobridnim ravnalom konstruirajte polovište dužine \overline{AB} .

12.11. Dane su točke A i B i dva pravca paralelna s AB . Konstruirajte točku C tako da je B polovište od \overline{AC} koristeći samo ravnalo.

12.12. Dani su točka T i pravac p . Konstruirajte paralelu s p točkom T koristeći dvobridno ravnalo.

12.13. Konstruirajte kvadrat koristeći samo dvobridno ravnalo.

12.14. Dan je kut $\sphericalangle aOb$ i točka A na kraku a . Dvobridnim ravnalom konstruirajte točku B na kraku b tako da je $|OB| = |OA|$.

12.15. Dana su dva paralelna pravca i na jednom točke A i B . Konstruirajte točku C na pravcu AB (različitu od A) tako da je $|AB| = |BC|$. Koristite samo ravnalo!

12.16. Dana je kružnica i njeno središte S . Koristeći samo ravnalo konstruirajte tri paralelna pravca tako da je jedan jednako udaljen od druga dva.

12.17. Dana je kružnica i njeno središte, te pravac p i točka T . Koristeći samo ravnalo konstruirajte paralelu s pravcem p kroz točku T .

12.18. Dana je kružnica, njeno središte i jedan njen promjer. Koristeći samo ravnalo konstruirajte promjer kružnice okomit na dani promjer.