JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do srijede, 8. prosinca u 12 sati na web-stranici kolegija.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Precizno definirajte pojam vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (2 boda) Neka su E i F događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvi da je $E \subset F$. Detaljno dokažite da tada vrijedi $\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$. Smijete koristiti samo aksiome vjerojatnosti i činjenicu da je $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(c) (3 boda) Tri oženjena para sjedaju na slučajan način za okrugli stol. Kolika je vjerojatnost da niti jedan par ne sjedi jedan pored drugog (tj. da niti jedna osoba ne sjedi kraj svog partnera)?

(d) (3 boda) Neka je $\mathbb{P}\colon \mathcal{F} \to [0,1]$ konačno aditivna na σ-algebri $\mathcal{F}$, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $(B_j)_{1\le j\le n}$ po parovima disjunktnih događaja $B_j \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{j=1}^n B_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B_j)$. Pretpostavite nadalje da za svaki nerastući niz $(A_n)_{n\ge1}$ događaja iz $\mathcal{F}$ takav da je $\cap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. Precizno dokažite ili opovrgnite tvrdnju: $\mathbb{P}$ je σ-aditivna na $\mathcal{F}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) (3 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a) dokažite da je tada i $(A \backslash B) \cup C^c \in \mathcal{F}$.

(c) (3 boda) Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Definirajmo $\mathcal{F}' := \{F^c \colon F \in \mathcal{F}\}$. Dokažite da je $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}')$. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

(d) (2 boda) Neka je $\mathcal{A}$ neka σ-algebra na X i y neki element koji ne pripada skupu X. Odredite najmanju σ-algebru na $X \cup \{y\}$ koja sadrži familiju $\mathcal{A} \cup \{\{y\}\}$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Precizno definirajte nezavisnost familije događaja na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Neka je $E_n, n \in \mathbb{N}$, niz događaja takav da vrijedi $E_n \subseteq E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ i F događaj takav da su E_n i F nezavisni, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $E := \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pokažite da su E i F nezavisni događaji.

(c) (3 boda) Precizno iskažite i dokažite formulu potpune vjerojatnosti.

(d) (3 boda) Idete na put i zamolite susjedu da vam zalijeva cvijet dok vas nema. Bez zalijevanja cvijet će uvenuti s vjerojatnošću 0.8, a ako se zalijeva uvenut će s vjerojatnošću 0.15. Vjerojatnost da susjeda ne zaboravi i zalije cvijet je 0.9. Ako je cvijet uvenuo dok vas nije bilo, kolika je vjerojatnost da je susjeda zaboravila i nije ga zalila?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ te neka su $p_1, \ldots, p_n \in [0,1]$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Pokažite da postoji te da je jedinstvena vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ takva da je $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$.

(b) U kutiji imamo n kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, n$.

(b1) (4 boda) Ako na slučajan način izvučemo 3 kuglice (bez vraćanja), odredite vjerojatnost da se izvučeni brojevi mogu poredati tako da sadrže točno dva uzastopna broja (npr. 2,3 i 6)?

(b2) (3 boda) Ako na slučajan način izvučemo $n - 5$ kuglica (s vraćanjem) te je

$$A_n = \{\text{točno 3 puta je izvučena kuglica s brojem 1}\},$$

koristeći zakon rijetkih događaja odredite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

(b) (3 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ te neka je $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ njena funkcija distribucije. Dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}\,(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - F(n)).$$

(c) (3 boda) Kutija sadrži 100 bijelih i 12 crnih kuglica. Iz kutije je na slučajan način izvučeno 5 kuglica (bez vraćanja). Neka je X broj izvučenih crnih kuglica. Nađite $\mathbb{E}\,(X)$.

(d) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}\,(X^2) < \infty$. Dokažite da za $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.