VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Precizno definirajte pojam vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (2 boda) Neka su E i F događaji na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ takvi da je $E \subset F$. Detaljno dokažite da tada vrijedi $\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$. Smijete koristiti samo aksiome vjerojatnosti i činjenicu da je $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

(c) (3 boda) Tri oženjena para sjedaju na slučajan način za okrugli stol. Kolika je vjerojatnost da niti jedan par ne sjedi jedan pored drugog (tj. da niti jedna osoba ne sjedi kraj svog partnera)?

(d) (3 boda) Neka je $\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to [0,1]$ konačno aditivna na σ-algebri $\mathcal{F}$, tj. za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki konačan niz $(B_j)_{1 \le j \le n}$ po parovima disjunktnih događaja $B_j \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{j=1}^n B_j) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(B_j)$. Pretpostavite nadalje da za svaki nerastući niz $(A_n)_{n \ge 1}$ događaja iz $\mathcal{F}$ takav da je $\cap_{n=1}^\infty A_n = \emptyset$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = 0$. Precizno dokažite ili opovrgnite tvrdnju: $\mathbb{P}$ je σ-aditivna na $\mathcal{F}$.

Rješenje.

(a) Vjerojatnost na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} \colon \mathcal{F} \to [0,1]$ koja zadovoljava sljedeća tri aksioma:

(A1) Za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \ge 0$;

(A2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(A3) Za svaki niz $(A_j)_{j \in \mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja $A_j \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(\cup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(A_j)$.

(b) Prvo dokazujemo da za disjunktne događaje $A_1, A_2 \in \mathcal{F}$ vrijedi $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$. Stavimo $A_j = \emptyset$, $j \ge 3$. Tada je $A_1 \cup A_2 = \cup_{j=1}^\infty A_j$. Budući da je $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja, po aksiome (A3) vrijedi

$$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(\cup_{j=1}^\infty A_j) = \sum_{j=1}^\infty \mathbb{P}(A_j) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + 0 + 0 + \cdots = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2).$$

Neka su sada $E, F \in \mathcal{F}$ takvi da je $E \subset F$. Tada je $F = E \cup (F \setminus E)$, E i $F \setminus E$ su disjunktni, pa po prvom dijelu rješenja slijedi $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \setminus E)$. Dakle, $\mathbb{P}(F \setminus E) = \mathbb{P}(F) - \mathbb{P}(E)$.

(c) Uočimo prvo da šest osoba može sjesti za okrugli stol na 5! načina. Neka je E_i događaj da i-ti par sjedi jedan pored drugog, $i = 1, 2, 3$. Tada je $\mathbb{P}(E_i) = \frac{2 \cdot 4!}{5!} = \frac{2}{5}$. Zaista, ako i-ti par promatramo kao jednu jedinku (jer sjede zajedno), onda četiri preostale osobe i i-ti par može sjesti za okrugli stol na 4! načina. No, unutar i-tog para muž može biti lijevo ili desno, što daje faktor 2. Na isti način zaključujemo da za $i \ne j$ vrijedi $\mathbb{P}(E_i \cap E_j) = \frac{2^2 \cdot 3!}{5!} = \frac{1}{5}$. Konačno, $\mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = \frac{2^3 \cdot 2!}{5!} = \frac{2}{15}$. Upotrebom formule uključivanja-isključivanja dobivamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_1 \cup E_2 \cup E_3) &= \sum_{i=1}^4 \mathbb{P}(E_i) - \sum_{i<j} \mathbb{P}(E_i \cap E_j) + \mathbb{P}(E_1 \cap E_2 \cap E_3) \\
&= \binom{3}{1} \cdot \frac{2 \cdot 4!}{5!} - \binom{3}{2} \frac{2^2 \cdot 3!}{5!} + \frac{2^3 \cdot 2!}{5!} \\
&= 3 \cdot \frac{2}{5} - 3 \cdot \frac{1}{5} + \frac{2}{15} = \frac{11}{15}.
\end{aligned}$$

Zaključujemo da je tražena vjerojatnost jednaka $1 - \frac{11}{15} = \frac{4}{15}$.

(Nije dovoljno fiksirati jedan par koji sjedi zajedno pa tada činiti samo permutacije -> $4! \cdot 2$ jer to odgovara broju $|E_i|$ za jedan fiksni i.)

(d) Tvrdnja je točna - vidi Teorem 1.17 (b).

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) (3 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a) dokažite da je tada i $(A \backslash B) \cup C^c \in \mathcal{F}$.

(c) (3 boda) Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Definirajmo $\mathcal{F}' := \{F^c \colon F \in \mathcal{F}\}$. Dokažite da je $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}')$. Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.

(d) (2 boda) Neka je $\mathcal{A}$ neka σ-algebra na X i y neki element koji ne pripada skupu X. Odredite najmanju σ-algebru na $X \cup \{y\}$ koja sadrži familiju $\mathcal{A} \cup \{\{y\}\}$.

Rješenje.

(a) Skripta s predavanja, Definicija 1.4.

(b) Uočimo da vrijedi $(A \backslash B) \cup C^c = (A^c \cup B)^c \cup C^c$. Prema (ii) iz definicije zaključujemo da $A^c, C^c \in \mathcal{F}$. Kako je $\emptyset = \Omega^c$, iz (i) i (ii) zaključujemo da je i $\emptyset \in \mathcal{F}$. Sada po (iii) iz definicije za $A_1 = A^c, A_2 = B, A_j = \emptyset, \forall j \geq 3$ dobijemo $A^c \cup B \in \mathcal{F}$, pa prema (ii) i $(A^c \cup B)^c \in \mathcal{F}$. Koristeći opet (iii) uz $A_1 = (A^c \cup B)^c, A_2 = C^c, A_j = \emptyset, \forall j \geq 3$ dobijemo $(A \backslash B) \cup C^c = (A^c \cup B)^c \cup C^c \in \mathcal{F}$.

(c) Uočimo da za svaki $F \in \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ vrijedi i da je $F^c \in \sigma(\mathcal{F})$, pa je $\mathcal{F}' \subseteq \sigma(\mathcal{F})$ iz čega po definiciji slijedi $\sigma(\mathcal{F}') \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Postupajući analogno, dobivamo $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \sigma(\mathcal{F}')$, iz čega slijedi $\sigma(\mathcal{F}) = \sigma(\mathcal{F}')$.

(d) Tražena σ-algebra (jednostavno se dokaže da je ovo σ-algebra, a sadržana je u svakoj drugoj σ-algebri koja sadrži familiju $\mathcal{A} \cup \{\{y\}\}$ je $\mathcal{A} \cup \{A \cup \{y\} \colon A \in \mathcal{A}\}$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Precizno definirajte nezavisnost familije događaja na nekom vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(b) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Neka je $E_n, n \in \mathbb{N}$, niz događaja takav da vrijedi $E_n \subseteq E_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ i F događaj takav da su E_n i F nezavisni, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Označimo s $E := \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. Pokažite da su E i F nezavisni događaji.

(c) (3 boda) Precizno iskažite i dokažite formulu potpune vjerojatnosti.

(d) (3 boda) Idete na put i zamolite susjedu da vam zalijeva cvijet dok vas nema. Bez zalijevanja cvijet će uvenuti s vjerojatnošću 0.8, a ako se zalijeva uvenut će s vjerojatnošću 0.15. Vjerojatnost da susjeda ne zaboravi i zalije cvijet je 0.9. Ako je cvijet uvenuo dok vas nije bilo, kolika je vjerojatnost da je susjeda zaboravila i nije ga zalila?

Rješenje.

(a) Skripta s predavanja, Definicija 2.11. c)

(b) Kako je $E = \lim_n E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$, pokažimo da je $\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F)$. Uočimo da vrijedi $E_n \cap F \subseteq E_{n+1} \cap F$. Sada imamo

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_n \cap F)) = \lim_n \mathbb{P}(E_n \cap F) = \lim_n \mathbb{P}(E_n)\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(E)\mathbb{P}(F),$$

gdje smo u drugoj i zadnjoj jednakosti koristili neprekidnost vjerojatnosti na neopadajući niz događaja, a u predzadnjoj nezavisnost događaja E_n i F.

(c) Skripta s predavanja, Propozicija 2.4.

(d) Definirajmo s $A := \{\text{cvijet je uvenuo}\}$, $H_1 := \{\text{susjeda je zalila cvijet}\}$, $H_2 := \{\text{susjeda nije zalila cvijet}\}$. Traži se $\mathbb{P}(H_2|A)$. U zadatku su zadane vjerojatnosti $\mathbb{P}(H_1) = 0.9, \mathbb{P}(H_2) = 0.1, \mathbb{P}(A|H_1) = 0.15, \mathbb{P}(A|H_2) = 0.8$. Sada je po Bayesovoj formuli

$$\mathbb{P}(H_2|A) = \frac{\mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)}{\mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A|H_2)} = \frac{0.1 \cdot 0.8}{0.9 \cdot 0.15 + 0.1 \cdot 0.8} = 0.3721.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 4.

(a) (3 boda) Neka je $\Omega = \{1, \ldots, n\}$ za neki $n \in \mathbb{N}$ te neka su $p_1, \ldots, p_n \in [0, 1]$ takvi da je $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$. Pokažite da postoji te da je jedinstvena vjerojatnost $\mathbb{P}$ na $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$ takva da je $\mathbb{P}(\{i\}) = p_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$.

(b) U kutiji imamo n kuglica označenih brojevima $1, 2, \ldots, n$.

(b1) (4 boda) Ako na slučajan način izvučemo 3 kuglice (bez vraćanja), odredite vjerojatnost da se izvučeni brojevi mogu poredati tako da sadrže točno dva uzastopna broja (npr. 2,3 i 6)?

(b2) (3 boda) Ako na slučajan način izvučemo $n - 5$ kuglica (s vraćanjem) te je

$$A_n = \{\text{točno 3 puta je izvučena kuglica s brojem 1}\},$$

koristeći zakon rijetkih događaja odredite $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Rješenje.

(a) Za sve $A = \{i_1, \ldots, i_k\} \in \mathcal{P}(\Omega)$, konačna aditivnost povlači da svaka takva vjerojatnost $\mathbb{P}$ mora zadovoljavati i

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{k} \mathbb{P}(\{i_j\}) = \sum_{j=1}^{k} p_{i_j}, \tag{1}$$

uz $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$. Iz ovoga slijedi jedinstvenost pa preostaje pokazati da je funkcija $\mathbb{P}$ na $\mathcal{P}(\Omega)$ zadana pomoću (1) zaista vjerojatnost.

Očito je da $\mathbb{P}$ poprima vrijednosti u $[0, 1]$ te da je $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Preostaje provjeriti σ-aditivnost, ali budući da je Ω konačan skup i $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, dovoljno je provjeriti konačnu aditivnost. Neka su $A_j \in \mathcal{P}(\Omega), j = 1, \ldots, m$, međusobno disjunktni. Tada $A := \cup_{j=1}^{m} A_j$ možemo zapisati kao

$$A = \{i_1, \ldots, i_{k^{(1)}}, i_{k^{(1)}+1}, \ldots, i_{k^{(1)}+k^{(2)}}, \ldots\ldots\}$$

pri čemu je $A_1 = \{i_1, \ldots, i_{k^{(1)}}\}, A_2 = \{i_{k^{(1)}+1}, \ldots, i_{k^{(1)}+k^{(2)}}\}$ i tako dalje. Sada koristeći (1) dva puta dobivamo da je

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{k^{(j)}} p_{i_{k^{(1)}+\cdots+k^{(j-1)}+k}} = \sum_{j=1}^{m} \mathbb{P}(A_j).$$

(b1) Za prostor elementarnih događaja možemo uzeti $\Omega = \{\text{svi 3-člani podskupovi skupa}\,\{1, \ldots, n\}\}$. Očito je $|\Omega| = \binom{n}{3}$. Neka je $A \subseteq \Omega$ traženi događaj. Ako je $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ prvi od dva uzastopna broja, za $k \notin \{1, n-1\}$ postoji $n - 4$ mogućnosti za odabir trećeg broja, dok za $k \in \{1, n-1\}$ treći broj možemo odabrati na $n - 3$ načina. Dakle,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{(n-1-2)(n-4) + 2(n-3)}{\binom{n}{3}} = \frac{6(n-3)}{n(n-1)}.$$

(b2) Ako je X_n ukupan broj puta u kojima smo izvukli broj 1 (u $n - 5$ izvlačenja iz kutije s n kuglica), očito je $X_n \sim B(n-5, p_n)$ uz $p_n = \frac{1}{n}$. Budući da je $\lim_{n\to\infty}(n-5)p_n = 1$, zakon rijetkih događaja povlači da je

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = 3) = \frac{1^3}{3!} e^{-1} = \frac{e^{-1}}{6}.$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 1. prosinca 2021.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s razdiobom

$$X \sim \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots \\ p_1 & p_2 & \dots \end{pmatrix}.$$

Definirajte matematičko očekivanje slučajne varijable X.

(b) (3 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ te neka je $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ njena funkcija distribucije. Dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty}(1 - F(n)).$$

(c) (3 boda) Kutija sadrži 100 bijelih i 12 crnih kuglica. Iz kutije je na slučajan način izvučeno 5 kuglica (bez vraćanja). Neka je X broj izvučenih crnih kuglica. Nađite $\mathbb{E}(X)$.

(d) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla takva da je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$. Dokažite da za $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2\mathrm{Var}(X)$.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje ukoliko je $\sum_{j\geq 1} |a_j|p_j$ konačno, te je u tom slučaju matematičko očekivanje slučajne varijable X jednako

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{j\geq 1} a_j p_j.$$

(b) Uočimo prvo da je $1 - F(n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n) = \mathbb{P}(X > n)$. Zato je

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty}(1 - F(n)) &= \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X > n) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}(X \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}(X = k) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{k}\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty}k\mathbb{P}(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty}k\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X). \end{aligned}$$

Napomena: Za sve bodove nije bilo dovoljno pozvati se na Teorem 4.36 u kojem je pokazano da vrijedi $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{P}(X > n)$.

(c) Numerirajmo crne kuglice brojevima od 1 do 12. Za $i = 1, 2, \dots, 12$, neka je A_i događaj da je izvučena crna kuglica s brojem i, te neka je $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$. Uočite da je $X_i = 1$ ako i samo ako je izvučena crna kuglica s brojem i (inače $X_i = 0$). Tada vrijedi

$$X = \sum_{i=1}^{12} X_i,$$

pa je

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{i=1}^{12}\mathbb{E}\left(X_i\right)=\sum_{i=1}^{12}\mathbb{P}(A_i).$$

Nadalje,

$$\mathbb{P}(A_i)=\frac{\binom{1}{1}\binom{111}{4}}{\binom{112}{5}}=\frac{5}{112}.$$

Slijedi $\mathbb{E}\left(X\right)=12\cdot\frac{5}{112}=\frac{60}{112}$. (Pogledajte Primjer 4.46)

Alternativno, zadatak se mogao riješiti na sljedeći način: slučajna varijabla X iam *hipergeometrijsku* distribuciju (s vrijednostima u skupu $\{0,1,2,3,4,5\}$) te vrijedi

$$\mathbb{P}(X=i)=\frac{\binom{12}{i}\binom{100}{5-i}}{\binom{112}{5}},\quad i=0,1,\ldots,5.$$

Zato je

$$\mathbb{E}\left(X\right)=\sum_{i=0}^{5}i\frac{\binom{12}{i}\binom{100}{5-i}}{\binom{112}{5}}.$$

Ta formula je nosila 2 boda. Meeđutim, korištenjem identiteta

$$i\binom{12}{i}=12\binom{11}{i-1}\quad\text{i}\quad 12\binom{112}{5}=112\binom{111}{4},$$

dovivamo da je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X\right) &= \sum_{i=1}^{5}\frac{12\binom{11}{i-1}\binom{100}{5-i}}{\frac{112}{5}\binom{111}{4}}=\frac{5\cdot 12}{112}\sum_{i=1}^{5}\frac{\binom{11}{i-1}\binom{100}{5-i}}{\binom{111}{4}}\\ &= \frac{60}{112}\sum_{j=0}^{5}\frac{\binom{11}{j}\binom{100}{4-j}}{\binom{111}{4}}=\frac{60}{112}.\end{aligned}$$

Zadnja suma jednaka je 1, jer je to zbroj vjerojatnosti da ćemo izvlačenjem 4 kuglice iz kutije sa 100 bijelih i 11 crnih izvuči točno j crnih kuglica.

Napomena: kad bismo kuglice izvlačili *s vraćanjem*, te interpretirali crnu izvučenu kuglicu kao uspjeh, tada bi broj izvučenih crnih kuglica Y bila *binomna* slučajna varijabla s parametrima $n=5$ i $p=12/100$. Očekivanje bi bilo $\mathbb{E}\left(Y\right)=np=5\times\frac{12}{112}=\frac{60}{112}$, tj. isto kao za X. Za odgovor 60/112 s argumentacijom da je X binomna slučajna varijabla dobilo se nula bodova.

(d) Iz pretpostavke $\mathbb{E}\left(X^2\right)<\infty$ slijedi da X ima očekivanje (nije trebalo pokazati). Korištenjem definicije varijance i linearnosti očekivanja, $\mathbb{E}\left(aX+b\right)=a\mathbb{E}\left(X\right)+b$, slijedi

$$\mathrm{Var}(aX+b)=\mathbb{E}\left[(aX+b-\mathbb{E}\left(aX+b\right))^2\right]=\mathbb{E}\left[(aX+b-a\mathbb{E}\left(X\right)-b)^2\right]=a^2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}\left(X\right))^2\right]=a^2\mathrm{Var}(X),$$

(vidi Propoziciju 4.39).