VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 1.

(a) Neka su X i Y diskretne slučajne varijable za koje je $\mathbb{E}(X^2) < \infty$, $\mathbb{E}(Y^2) < \infty$.

(a1) [2 boda] Definirajte koeficijent korelacije ρ slučajnog vektora (X, Y).

(a2) [2 boda] Pokažite da je $-1 \leq \rho(X, Y) \leq 1$.

(a3) [3 boda] Ako je $\rho(X, Y) = -1$, što to znači za slučajne varijable X i Y? Pokažite i detaljno obrazložite.

(b) [3 boda] Na stolu su četiri karte; dvije su crne (dama i as) i dvije su crvene (dama i desetka). Na slučajan način istovremeno okrećemo dvije karte. Neka slučajna varijabla X modelira broj okrenutih crnih karata, a slučajna varijabla Y broj okrenutih asova. Odredite $\mathbb{E}(XY)$.

Rješenje.

(a1) Neka su X i Y kao u pretpostavkama zadatka. Koeficijent korelacije slučajnog vektora (X, Y) definiramo kao:

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X} \cdot \sqrt{\operatorname{Var} Y}}$$

pri čemu je $\operatorname{Cov}(X, Y)$ kovarijanca slučajnog vektora (X, Y), a $\operatorname{Var} X$ i $\operatorname{Var} Y$ su varijance slučajnih varijabli X i Y, redom.

(a2) Promotrimo slučajne varijable $\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} + \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}$ i $\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} - \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}$. Obje slučajne varijable imaju nenegativnu varijancu, a s obzirom da je $\operatorname{Var}(aU + bV) = a^2 \operatorname{Var} U + 2ab\operatorname{Cov}(U, V) + b^2 \operatorname{Var} V$ za slučajne varijable U i V i realne brojeve a i b, imamo:

$$0 \leq \operatorname{Var}\left(\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} + \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}\right) = \frac{\operatorname{Var} X}{\operatorname{Var} X} + \frac{\operatorname{Var} Y}{\operatorname{Var} Y} + 2\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y}} = 2 + 2\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y}}$$
$$0 \leq \operatorname{Var}\left(\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} - \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}\right) = \frac{\operatorname{Var} X}{\operatorname{Var} X} + \frac{\operatorname{Var} Y}{\operatorname{Var} Y} - 2\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y}} = 2 - 2\frac{\operatorname{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\operatorname{Var} X \cdot \operatorname{Var} Y}}$$

Iz prve nejednakosti slijedi donja granica za $\rho(X, Y)$, a iz druge slijedi gornja granica.

(a3) U slučaju $\rho(X, Y) = -1$, možemo iz prethodnog dijela vidjeti kako to znači da je

$$\operatorname{Var}\left(\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} + \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}\right) = 0$$

U tom slučaju slučajna varijabla $\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} + \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}$ mora biti jednaka konstanti c za neki $c \in \mathbb{R}$. (Jer ako je $\operatorname{Var} Z = 0$, onda je $\mathbb{E}((Z - \mathbb{E} Z)^2) = 0$, a s obzirom da je riječ o očekivanju neneg. sl. var., onda i sama sl. var. mora biti 0 s vjerojatnošću 1, tj. $\mathbb{P}(Z = \mathbb{E} Z = c \in \mathbb{R}) = 1$.)

$$\frac{X}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} + \frac{Y}{\sqrt{\operatorname{Var} Y}} = c$$
$$Y = -\frac{\sqrt{\operatorname{Var} Y}}{\sqrt{\operatorname{Var} X}} X + c$$

Dakle, tada za slučajnu varijablu Y vrijedi $\mathbb{P}(Y = aX + c) = 1$ za $a < 0, c \in \mathbb{R}$.

(b) Odredimo tablicu distribucije slučajnog vektora (X,Y). Znamo kako je $\mathcal{R}(X)=\{0,1,2\}$ i $\mathcal{R}(Y)=\{0,1\}$. Računamo npr.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=0,Y=0) &= \frac{\binom{2}{2}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{6} \\
\mathbb{P}(X=1,Y=0) &= \frac{\binom{1}{1}\binom{2}{1}}{\binom{4}{2}} = \frac{1}{3} \\
\mathbb{P}(X=2,Y=0) &= 0
\end{aligned}$$

Slično odredimo i drugi stupac tablice:

$X\backslash Y$	0	1	f_X
0	$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{6}$
1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
f_Y	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

Vrijedi

$$\mathbb{E}\,(XY) = \sum_{x,y\in\mathbb{R}} x\cdot y\cdot \mathbb{P}(X=x,Y=y)$$

Iz tablice iščivatamo vrijednosti. Jedine nenul vrijednosti koje prežive u sumi su:

$$\mathbb{E}\,(XY) = 1\cdot 1\cdot \mathbb{P}(X=1,Y=1) + 2\cdot 1\cdot \mathbb{P}(X=2,Y=1) = \frac{1}{3}+\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 2.

(a) [2 boda] Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s diskretnom vjerojatnosnom funkcijom gustoće f. Definirajte uvjetnu diskretnu funkciju gustoće slučajne varijable X uz dano $Y = y$.

(b) [3 boda] Neka su X i Y nezavisne slučajne varijable, X Poissonova s parametrom 3, Y Poissonova s parametrom 2 te neka je $Z := X + Y$. Nađite (tj. izračunajte i prepoznajte) uvjetnu distribuciju slučajne varijable X uz dano $Z = 4$. (Bez dokaza možete koristiti rezultat o funkciji gustoće slučajne varijable Z.)

(c) [3 boda] Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor takav da postoje $\mathbb{E}(X)$ i $\mathbb{E}(X|Y)$. Dokažite da vrijedi

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) = \mathbb{E}(X).$$

(d) [2 boda] Simetrična igraća kocka baca se 20 puta. Neka je X_i broj koji je pao u i-tom bacanju, $i = 1, 2, \ldots, 20$. Označimo sa $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, zbroj brojeva u prvih n bacanja, $n = 1, 2 \ldots, 20$. Izračunajte

$$\mathbb{E}[S_{10}|S_{20} = 66].$$

Detaljno obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.

(a) Neka je f_Y marginalna funkcija gustoće slučajne varijable Y. Uvjetna (diskretna) funkcija gustoće slučajne varijable X uz dano $Y = y$ definira se s

$$f_{X|Y}(x|y) := \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

za sve $y \in \mathbb{R}$ za koje je $f_Y(y) > 0$.

(b) Slučajna varijabla Z ima Poissonovu distribuciju s parametrom $3 + 2 = 5$. Tražimo $f_{X|Z}(i|4) = \mathbb{P}(X = i|Z = 4)$. Zbog $X \leq Z$, ta uvjetna vjerojatnosti je jednaka 0 za sve $i > 4$. Neka je $i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Tada je

$$\begin{aligned} P(X = i|Z = 4) &= \frac{\mathbb{P}(X = i, Z = 4)}{\mathbb{P}(Z = 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = i, Y = 4 - i)}{\mathbb{P}(Z = 4)} = \frac{\mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = 4 - i)}{\mathbb{P}(Z = 4)} \\ &= \frac{\left(\frac{3^i}{i!}e^{-3}\right)\left(\frac{2^{4-i}}{(4-i)!}e^{-2}\right)}{\frac{5^4}{4!}e^{-5}} = \frac{4!}{i!(4-i)!}\left(\frac{3}{5}\right)^i\left(\frac{2}{5}\right)^{4-i} = \binom{4}{i}\left(\frac{3}{5}\right)^i\left(\frac{2}{5}\right)^{4-i}. \end{aligned}$$

Dakle, uvjetna distribucija od X uz dano $Z = 4$ je binomna distribucija s parametrima $n = 4$ i $p = 3/5$, tj., $X|Z = 4 \sim B(4, 3/5)$.

(c) Stavimo $g(y) := \mathbb{E}(X|Y=y)$. Tada je

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|Y)) &= \mathbb{E}(g(Y)) = \sum_{y\in\mathbb{R}} g(y) f_Y(y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \mathbb{E}(X|Y=y) f_Y(y) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y) f_Y(y) = \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} x \frac{f(x,y)}{f_Y(y)} f_Y(y) \\ &= \sum_{y\in\mathbb{R}} \sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x,y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x \sum_{y\in\mathbb{R}} f(x,y) = \sum_{x\in\mathbb{R}} x f_X(x) = \mathbb{E}(X).\end{aligned}$$

(d) Definiramo $S_{10}^\star := X_{11} + \cdots + X_{20}$. Očito vrijedi $S_{20} = S_{10} + S_{10}^\star$. Nadalje, slučajne varijable S_{10} i $S_{10}^\star$ su jednako distribuirane, jer je svaka zbroj od 10 nezavisnih slučajnih varijabli s istom distribucijom. Zbog simetrije je tada

$$\mathbb{E}[S_{10}|S_{20}=66] = \mathbb{E}[S_{10}^\star|S_{20}=66].$$

Nadalje,

$$\mathbb{E}[S_{20}|S_{20}=66] = 66.$$

To je intuitivno potpuno jasno, a formalno slijedi iz Definicije 5.32:

$$\mathbb{E}[S_{20}|S_{20}=66] = \sum_{x\in\mathbb{R}} x\mathbb{P}(S_{20}=x|S_{20}=66) = 66,$$

jer $\mathbb{P}(S_{20}=x|S_{20}=66) = 0$ za $x \neq 66$, te $\mathbb{P}(S_{20}=66|S_{20}=66) = 1$. Sada iz linearnosti uvjetnog očekivanja zaključujemo

$$66 = \mathbb{E}[S_{20}|S_{20}=66] = \mathbb{E}[S_{10}+S_{10}^\star|S_{20}=66] = \mathbb{E}[S_{10}|S_{20}=66]+\mathbb{E}[S_{10}^\star|S_{20}=66] = 2\mathbb{E}[S_{10}|S_{20}=66].$$

Slijedi da je $\mathbb{E}[S_{10}|S_{20}=66] = 33$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 3.

(a) [2 boda] Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Precizno definirajte pojam matematičkog očekivanja od X.

(b) [3 boda] Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f, funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Dokažite da vrijedi $\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - \mathbb{P}(X \leq x))\, dx$.

(c) [3 boda] Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće

$$f(x) = \begin{cases} c - cx^2, & 0 \leq x \leq 1; \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Izračunajte konstantu c i funkciju distribucije slučajne varijable X.

(d) [2 boda] Neka je $X \sim N(0, 4)$. Nađite sve realne brojeve $c > 0$ za koje vrijedi

$$\mathbb{P}(X^2 \leq c) \geq 0.901.$$

Detaljno obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.

(a) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty$, onda postoji matematičko očekivanje od X koje definiramo sa

$$\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

(b) Za $y > 0$, uz primjenu parcijalne integracije, imamo

$$\begin{aligned} \int_0^y x f(x) dx &= -x(1 - F(x))\Big|_0^y + \int_0^y (1 - F(x)) dx \\ &= -y(1 - F(y)) + \int_0^y (1 - F(x)). \end{aligned}$$

Međutim,

$$0 \leq y(1 - F(y)) = y \int_y^\infty f(x) dx \leq \int_y^\infty x f(x) dx$$

te zadnji član u gornjoj relaciji teži u 0 kada y teži u ∞ jer $\int_0^\infty x f(x) dx = \mathbb{E}(X) < \infty$. Dakle,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_0^\infty x f(x) dx = \lim_{y \to \infty} \int_0^y x f(x) dx = \lim_{y \to \infty} \int_0^y (1 - F(x)) dx \\ &= \int_0^\infty (1 - F(x)) dx = \int_0^\infty (1 - \mathbb{P}(X \leq x)) dx. \end{aligned}$$

(c) Mora vrijediti $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 (c - cx^2)\,dx = \frac{2}{3}c$ iz čega zaključujemo da je $c = \frac{3}{2}$. Kako je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$, za $0 \le x \le 1$ vrijedi $F(x) = \int_0^x \frac{3}{2}(1 - x^2)\,dx = \frac{3}{2}x(1 - \frac{x^2}{3})$. Dakle, funkcija distribucije slučajne varijable X je dana formulom

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ \frac{3}{2}x(1 - \frac{x^2}{3}), & 0 \le x \le 1; \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

(d) Uočimo da je $\frac{X}{2} \sim N(0,1)$ i da vrijedi $\mathbb{P}(X^2 \le c) = \mathbb{P}(-\frac{\sqrt{c}}{2} \le \frac{X}{2} \le \frac{\sqrt{c}}{2}) = 2\Phi(\frac{\sqrt{c}}{2}) - 1$, gdje je Φ funkcija distibucije jedinične normalne razdiobe. Pronađimo prvo $c \in \mathbb{R}$ takav da je $\mathbb{P}(X^2 \le c) = 0.901$. Tada mora vrijediti da je $2\Phi(\frac{\sqrt{c}}{2}) - 1 = 0.901$, odnosno $\Phi(\frac{\sqrt{c}}{2}) = 0.9505$, pa iz tablice isčitavamo da je $\frac{\sqrt{c}}{2} = 1.65$, odnosno $c = 10.89$. Kako za sve $c \ge 10.89$ vrijedi $\mathbb{P}(X^2 \le c) \ge \mathbb{P}(X^2 \le 10.89) = 0.901$ zaključujemo da će tvrdnja vrijediti za $c \in [10.89, \infty\rangle$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 4.

(a) [2 boda] Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) [3 boda] Neka su $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ i $Y \sim P(5)$ dvije nezavisne slučajne varijable. Neka je Z diskretna slučajna varijabla definirana sa $Z := 2X + Y$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable Z.

(c) [2 boda] Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$ čija je funkcija izvodnica vjerojatnosti dana formulom $G_X(s) = \frac{1+2s}{4-s}$, $|s| \leq 1$. Izračunajte $\mathbb{E}[X]$ i $\operatorname{Var} X$.

(d) [3 boda] U toku jednog sata na autobusni kolodvor u Zagrebu dolaze putnički autobusi na način da je broj dolazaka autobusa slučajna varijabla koja ima Poissonovu razdiobu s parametrom 15. Autobusi koji dolaze imaju 56 putnika s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$, 45 putnika s vjerojatnošću $\frac{1}{6}$ i 30 putnika s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$. Izračunajte očekivani ukupan broj putnika koji dolaze u toku jednog sata na autobusni kolodvor u Zagrebu.

Rješenje.

(a) Neka je X diskretna slučajna varijabla definirana na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, koja poprima vrijednosti u $\mathbb{Z}_+$. Stavimo $p_n := \mathbb{P}(X = n)$, $n \geq 0$. Funkciju izvodnicu (vjerojatnosti) od X definiramo kao

$$G(s) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

za $s \in \mathbb{R}$ za koje $\sum_{n=0}^{\infty} p_n |s|^n < \infty$.

(b) Funkcije izvodnice vjerojatnosti slučajnih varijabli X i Y su redom $G_X(s) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{4}s^3, s \in \mathbb{R}$ i $G_Y(s) = e^{5(s-1)}, s \in \mathbb{R}$. Za slučajnu varijablu Z vrijedi

$$G_Z(s) = \mathbb{E}\left[s^{2X+Y}\right] = \mathbb{E}\left[s^{2X}s^Y\right] = \mathbb{E}\left[(s^2)^X\right]\mathbb{E}\left[s^Y\right] = G_X(s^2)G_Y(s) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}s^4 + \frac{1}{4}s^6\right)e^{5(s-1)},\ |s| \leq 1,$$

pri čemu smo u trećoj jednakosti koristili nezavisnost slučajnih varijabli X i Y.

(c) Vrijedi

$$\begin{aligned} G'_X(s) &= \frac{9}{(4-s)^2} \\ G''_X(s) &= \frac{18}{(4-s)^3} \\ G'_X(1) &= 1 \\ G''_X(1) &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

pa zaključujemo da je $\mathbb{E}\left[X\right] = G'_X(1) = 1$ i $\operatorname{Var} X = G''_X(1) + G'_X(1) - G'_X(1)^2 = \frac{2}{3} + 1 - 1^2 = \frac{2}{3}$.

(d) Neka je $N \sim P(15)$ i neka su $X_n, n \in \mathbb{N}$ nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable s razdiobom $X_n \sim \begin{pmatrix} 56 & 45 & 30 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Tada je ukupan broj putnika koji dođu u toku jednog sata jednak slučajnoj sumi $S = \sum_{n=1}^{N} X_n$. S predavanja znamo da je $\mathbb{E}\, S = \mathbb{E}\, N \cdot \mathbb{E}\, X$, pa je očekivani broj putnika na kolodvoru u toku jednog sata jednak $\mathbb{E}\, S = 15 \cdot \frac{247}{6} = 617.5$.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 16. veljače 2021.

Zadatak 5.

(a1) [2 boda] Precizno iskažite slabi zakon velikih brojeva.

(a2) [2 boda] Dokažite slabi zakon velikih brojeva.

(b) [3 boda] Asistent Ivan treba ispraviti 50 ispita te ih ispravlja jedan za drugim. Vremena potrebna za ispravljanje tih ispita su nezavisna i sva imaju istu distribuciju s očekivanjem 15 minuta i standardnom devijacijom 5 minuta. Nađite približnu vjerojatnost da će asistent ispraviti sve ispite za manje od 12 sati ispravljanja.

(c) [3 boda] Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Distribucija slučajne varijable X_n dana je tablicom

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2n^\alpha} & 1-\frac{1}{n^\alpha} & \frac{1}{2n^\alpha} \end{pmatrix}$$

gdje je $\alpha \in (0,\infty)$. O ovisnosti o parametru α, ispitajte konvergira li niz $(X_n)_{n\geq 1}$ po vjerojatnosti i/ili gotovo sigurno.

Rješenje.

(a) Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada

$$\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu.$$

(a2) Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Vrijedi $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ i, zbog nezavisnosti, $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Sada, primjenom Čebiševljeve nejednakosti, imamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

što teži u 0 kada n teži u ∞.

(b) Označimo sa X_i vrijeme (u minutama) potrebno za ispraviti i-ti ispit. Po pretpostavci su $(X_i)_{1\leq i\leq 50}$ nezavisne i jednako distribuirane slučajne varijable za koje je $\mathbb{E}(X_i) = 15$, $\sigma(X_i) = 5$ (tj. $\mathrm{Var}(X_i) = 5^2 = 25$). Vrijeme potrebno za ispraviti sve ispite je $S = \sum_{i=1}^{50} X_i$. Vrijedi $\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1 + \cdots + X_{50}) = 50 \times 15 = 750$, $\mathrm{Var}(S) = \mathrm{Var}(X_1 + \cdots + X_{50}) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_{50}) = 50 \times 25$, otkud $\sigma(S) = 25\sqrt{2}$. Po centralnom graničnom teoremu slučajna varijabla

$$\frac{S-750}{25\sqrt{2}} = \frac{S - \mathbb{E}(S)}{\sigma(S)}$$

ima približno standardnu normalnu distribuciju. Zato je (12 sati je 720 minuta)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S \leq 720) &= \mathbb{P}\left(\frac{S-750}{25\sqrt{2}} \leq \frac{720-750}{25\sqrt{2}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S-750}{25\sqrt{2}} \leq \frac{-30}{25\sqrt{2}}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{S-750}{25\sqrt{2}} \leq -0.848528\right) \\ &\approx \mathbb{P}(N(0,1) \leq -0.848528) = \Phi(-0.848528) = 0.198072.\end{aligned}$$

(c) Neka je $\epsilon \in (0,1)$. Tada je

$$\mathbb{P}(|X_n| > \epsilon) = \mathbb{P}(\{X_n = -1\} \cup \{X_n = 1\}) = \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} = 0.$$

To znači da za sve $\alpha > 0$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ po vjerojatnosti.

Ako niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira g.s., onda zbog gore pokazanog konverira g.s. prema slučajnoj varijabli $X = 0$. Stavimo $A_n = \{|X_n| > 1/2\}$. Vrijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}. \tag{1}$$

Gornji red konvergira ako i samo ako je $\alpha > 1$. U slučaju konvergencije je po Borel-Cantellijevoj lemi $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 0$, pa uzimanjem komplementa $\mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty} A_n^c) = \mathbb{P}(\liminf_{n\to\infty}(\{X_n = 0\})) = 1$. To znači da je vjerojatnosti skupa svih $\omega \in \Omega$ takvih da je $X_n(\omega) = 0$ za sve osim konačno mnogo n jednaka 1. Dakle, $\lim_{n\to\infty} X_n = 0$ g.s.

U slučaju da je $\alpha \in (0,1]$, red (1) divergira pa je po obratu Borel-Cantellijeve leme $\mathbb{P}(\limsup_{n\to\infty} A_n) = 1$. Dakle, na događaju vjerojatnosti 1 je $|X_n| > 1/2$ za beskonačno mnogo n. Dakle, niz $(X_n)_{n\geq 1}$ ne konvergira g.s.