JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje.
- Trajanje: 2 sata.

Zadatak 1. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Neka su X_1, X_2, X_3 slučajne varijable s vrijednostima u skupu $\mathbb{N}_0$. Precizno definirajte što znači da su X_1, X_2, X_3 nezavisne.

(b) Tijekom radnog tjedna (koji traje 5 dana), Marko svaki dan naručuje jedno od triju jela: pizzu margheritu, špagete bolognese ili varivo od mahuna. Pritom svaki dan nezavisno na slučajan način bira koje će jelo naručiti, s vjerojatnostima redom $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ i $\frac{1}{4}$ za navedena jela. Neka su X, Y, Z slučajne varijable koje redom označavaju koliko je puta Marko naručio pojedino jelo.

(b1) (*3 boda*) Koja je distribucija slučajnog vektora (X, Y, Z)? Izračunajte vjerojatnost da je Marko dva puta naručio pizzu, dva puta špagete i jednom varivo.

(b2) (*5 bodova*) Odredite $\mathrm{Cov}\,(Y, Z)$. Jesu li Y i Z nezavisne?

(b3) (*3 boda*) Odredite $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 2. (*13 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno definirajte kada kažemo da postoji funkcija izvodnica momenata M proizvoljne slučajne varijable X, te ju definirajte u tom slučaju.

(b) (*2 boda*) Odredite (ako postoji) funkciju izvodnicu momenata standardne normalne slučajne varijable.

(c) Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da X_n ima eksponencijalnu razdiobu s parametrom n, $n \geq 1$.

(c1) (*2 boda*) Odredite funkciju distribucije slučajne varijable $M_n := \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, za sve $n \geq 1$.

(c2) (*2 boda*) Odredite očekivanje slučajne varijable $L_n := \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, za sve $n \geq 1$.

(d) (*5 bodova*) Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli, ali takvih da su $X_1, X_3, \ldots$ jednako distribuirane sa očekivanjem $\mu_1 := \mathbb{E}[X_1]$ i varijancom $0 < \sigma_1^2 := \operatorname{Var}(X_1) < \infty$, te $X_2, X_4, \ldots$ jednako distribuirane sa očekivanjem $\mu_2 := \mathbb{E}[X_2]$ i varijancom $0 < \sigma_2^2 := \operatorname{Var}(X_2) < \infty$; dakle, X_{2k} i X_{2k+1} nemaju nužno istu razdiobu. Pretpostavimo da postoje funkcije izvodnice momenata od X_1 i X_2. Ako je $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i$, $n \geq 1$, odredite konstante a_{2n} i b_{2n} tako da niz $Z_n := \frac{S_{2n} - a_{2n}}{b_{2n}}$, $n \geq 1$ konvergira po distribuciji prema standardnoj normalnoj slučajnoj varijabli. Precizno dokažite! *Uputa:* Smijete koristiti sve tvrdnje dokazane na predavanjima.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 3. (*12 bodova*)

(a) (*3 boda*) Definirajte funkciju distribucije F proizvoljne slučajne varijable X i pokažite da je

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = 1\,.$$

(b) Neka je funkcija distribucije F apsolutno neprekidne slučajne varijable X dana sa

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ a - 8x^{-3}, & x > 2. \end{cases}$$

(b1) (*4 boda*) Odredite konstantu a, odredite pripadnu funkciju gustoće, te izračunajte $\mathbb{E}\,(X)$.

(b2) (*2 boda*) Neka je $Y := \min\{4, X\}$. Je li Y apsolutno neprekidna slučajna varijabla? Detaljno obrazložite odgovor.

(c) (*3 boda*) Neka je $X \sim N(4, \sigma^2), \sigma > 0$. Ako znamo da je $\Phi(0.25) = 0.6$, nađite σ tako da vrijedi $\mathbb{P}((X-2)(X-6) \geq 0) = 0.8$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 5. veljače 2024.

Zadatak 4. (*12 bodova*)

(a) (*2 boda*) Precizno definirajte pojam konvergencije po vjerojatnosti niza slučajnih varijabli.

(b) (*4 boda*) Neka je $X_1, X_2, \ldots$ niz nezavisnih slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}[X_i] = 0$ te $\mathrm{Var}(X_i) \leq 5$, za sve $i \in \mathbb{N}$; ne pretpostavljamo da je $\mathrm{Var}(X_i) = \mathrm{Var}(X_j)$, za sve $i \neq j$. Iskažite i precizno dokažite slabi zakon velikih brojeva u ovom slučaju.

(c) (*2 boda*) Neka je X nenegativna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pronađite konstantu $c > 0$ tako da vrijedi

$$\mathbb{P}(X \geq 2) \leq c\mathbb{E}(X^4).$$

(d) (*4 boda*) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, za koje vrijedi

$$X_n \sim \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ \frac{1}{2n^3} & 1 - \frac{1}{n^3} & \frac{1}{2n^3} \end{pmatrix}, n \in \mathbb{N}.$$

Konvergira li zadani niz slučajnih varijabli gotovo sigurno?

Sve svoje tvrdnje detaljno obrazložite.