VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F})$ izmjeriv prostor. Precizno definirajte pojam vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (3 boda) Iskažite teorem o neprekidnosti vjerojatnosti s obzirom na neopadajuće i nerastuće nizove događaja. Dokažite da je vjerojatnost neprekidna s obzirom na neopadajuće nizove događaja.

(c) (2 boda) Dva lovca gađaju metu. Vjerojatnost da prvi pogodi je 0.8, vjerojatnost da drugi pogodi je 0.7, a da barem jedan pogodi je 0.9. Kolika je vjerojatnost da prvi pogodi, a drugi ne?

(d) (3 boda) Neka je $\Omega = \mathbb{N}$ i $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Definirajmo funkciju $\mathbb{P} : \{\{n\} : n \in \mathbb{N}\} \to \mathbb{R}$ sa $\mathbb{P}(\{n\}) = \frac{4}{n(n+1)(n+2)}$. Može li se funkcija $\mathbb{P}$ proširiti do vjerojatnosti na $(\Omega, \mathcal{F})$? Obrazložite Vaše tvrdnje.

Rješenje.

(a) Vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$ je funkcija $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava sljedeće:

(i) za sve $A \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$;

(ii) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$;

(iii) za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ po parovima disjunktnih događaja vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)\,.$$

(b) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor. Tada za svaki neopadajući niz događaja $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $(A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots)$ iz $\mathcal{F}$ i svaki nerastući niz događaja $(B_i)_{i\in\mathbb{N}}$ $(B_1 \supseteq B_2 \supseteq \dots)$ iz $\mathcal{F}$ vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(A_i) \qquad \text{i} \qquad \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \lim_{i\to\infty} \mathbb{P}(B_i).$$

Neka je $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ neopadajući niz događaja. Definirajmo niz $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sa $C_1 := A_1$ te za $n \geq 2$, $C_n := A_n \setminus A_{n-1}$. Tada je $(C_i)_{i\in\mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja za koje vrijedi $A_n = C_1 \cup \dots \cup C_n$, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, $\mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i)$. Također, vrijedi $\cup_{i=1}^{\infty} A_i = \cup_{i=1}^{\infty} C_i$. Sada je

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(C_i) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(A_n)\,.$$

(c) Stavimo $L_1 = \{1.\text{ lovac je pogodio metu}\}$ i $L_2 = \{2.\text{ lovac je pogodio metu}\}$. Vrijedi $\mathbb{P}(L_1) = 0.8$, $\mathbb{P}(L_2) = 0.7$ i $\mathbb{P}(L_1 \cup L_2) = 0.9$. Računamo

$$\mathbb{P}(L_1 \cap L_2^c) = \mathbb{P}(L_1 \setminus L_2) = \mathbb{P}(L_1 \setminus (L_1 \cap L_2)) = \mathbb{P}(L_1) - \mathbb{P}(L_1 \cap L_2).$$

S druge strane, $\mathbb{P}(L_1 \cap L_2) = \mathbb{P}(L_1) + \mathbb{P}(L_2) - \mathbb{P}(L_1 \cup L_2) = 0.6$. Dakle, $\mathbb{P}(L_1 \cap L_2^c) = 0.2$.

(d) Budući je $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, dovoljno je provjeriti da je $\mathbb{P}(\mathbb{N}) = 1$. Imamo

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\mathbb{N}) &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} 4\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4}{n(n+2)} - \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{4}{(n+1)(n+2)} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) - \sum_{n\in\mathbb{N}} 4\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{2}{n} - \frac{4}{n+1} + \frac{2}{n+2}\right) = 1.\end{aligned}$$

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 2.

(a) (2 boda) Precizno definirajte pojam σ-algebre na nepraznom skupu Ω.

(b) (3 boda) Neka je $\mathcal{F}$ σ-algebra na Ω, te $A, B, C \in \mathcal{F}$. Koristeći samo definiciju pod (a), dokažite da je tada i $A \cap B^c \cap C \in \mathcal{F}$.

(c) (3 boda) Ako je $f\colon X \to Y$ funkcija, te $\mathcal{G}$ neka σ-algebra na Y, dokažite da je tada i

$$\mathcal{F} = \{f^{-1}(B)\colon B \in \mathcal{G}\}$$

σ-algebra na X.

(d) (2 boda) Ako je $f\colon X \to Y$ funkcija, te $\mathcal{F}$ neka σ-algebra na X, pokažite da tada

$$\mathcal{G} = \{f(A)\colon A \in \mathcal{F}\}$$

nije nužno σ-algebra na Y.

Rješenje.

(a) Familija podskupova $\mathcal{F}$ skupa Ω je σ-algebra ako vrijede sljedeća tri svojstva:

(i) $\Omega \in \mathcal{F}$,

(ii) ako je $A \in \mathcal{F}$, onda je i $A^c \in \mathcal{F}$,

(iii) ako su $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathcal{N}$, onda je i $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

(b) Primjenivši svojstvo (ii) za skupove A i C, dobivamo da je $A^c, C^c \in \mathcal{F}$. Ako uzmemo da je $A_1 = A^c$, $A_2 = B$, $A_3 = C^c$, te $A_n = \emptyset = \Omega^c$ za $n \geq 4$, tada iz svojstava (i), (ii) i (iii) dobivamo da je

$$A^c \cup B \cup C^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}.$$

Ponovnim korištenjem svojstva (ii) zaključujemo da je $A \cap B^c \cap C = (A^c \cup B \cup C^c)^c \in \mathcal{F}$.

(c) Uočimo da je $X = f^{-1}(Y)$, a kako je $Y \in \mathcal{G}$ (jer je $\mathcal{G}$ σ-algebra), po definiciji familije skupova $\mathcal{F}$ zaključujemo da je $X \in \mathcal{F}$.

Neka je $A \in \mathcal{F}$. Tada je postoji neki $B \in \mathcal{G}$ takav da je $A = f^{-1}(B)$, pa je $X \setminus A = f^{-1}(Y) \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B)$. Budući da je $Y \setminus B \in \mathcal{G}$, slijedi i da je $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Konačno, neka su $A_n \in \mathcal{F}, n \in \mathbb{N}$. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji $B_n \in \mathcal{G}$ takav da je $A_n = f^{-1}(B_n)$, pa je

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right).$$

Budući da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{G}$, slijedi i da je $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{F}$.

(d) Neka je $X = Y = \{1, 2\}$, te $f\colon X \to Y$ takva da je $f \equiv 1$. Tada je $\mathcal{G} = \{\emptyset, \{1\}\}$, što nije σ-algebra na Y jer npr. $Y \notin \mathcal{G}$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 3.

(a) (2 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka je $B \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(B) > 0$. Precizno definirajte uvjetnu vjerojatnost uz dano B te pokažite da je tako definirana funkcija vjerojatnost na $(\Omega, \mathcal{F})$.

(b) (3 boda) Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vjerojatnosni prostor te neka su $A, B \in \mathcal{F}$. Definirajte nezavisnost događaja A i B. Nadalje, neka je $C \in \mathcal{F}$ takav da $\mathbb{P}(C) > 0$. Definirajte uvjetnu nezavisnost od A i B uz dano C. Uz koje je uvjete događaj $A \in \mathcal{F}$ nezavisan sam sa sobom? Uz koje je uvjete događaj $A \in \mathcal{F}$ nezavisan sam sa sobom uz dano C? Pokažite da ako je A nezavisan sam sa sobom, onda je nezavisan sam sa sobom uz dano C.

(c) (2 boda) Kuharica zna pripremiti 5 vrsta jela: grah, sarmu, pašticadu, maneštru i čobanac. Tjedan započinje bilo kojim jelom s jednakom vjerojatnošću. Zatim ponavlja jelo od prethodnog dana s vjerojatnošću 0.4 ili s jednakom vjerojatnošću odabire jedno od preostalih jela. Kolika je vjerojatnost da će izbor jela biti sarma, sarma, maneštra, čobanac i čobanac?

(d) (3 boda) Simetrična kocka ima četiri strane obojene crnom bojom te dvije bijelom. Kocka je bačena 5 puta. Odredite vjerojatnost da se crna boja nije pojavila dva puta zaredom u tih 5 bacanja.

Rješenje.

(a) Uvjetna vjerojatnost je definirana sa $\mathbb{P}(\cdot|B) := \mathbb{P}(\cdot \cap B)/\mathbb{P}(B)$.

Očito je $\mathbb{P}(A|B) \geq 0$ za sve $A \in \mathcal{F}$ te $\mathbb{P}(\Omega|B) = \mathbb{P}(\Omega \cap B)/\mathbb{P}(B) = 1$. Neka je sada $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ niz po parovima disjunktnih događaja. Tada vrijedi

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \middle| B\right) = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \cap B\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \cap B)\right)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B)\,.$$

(b) Događaji A i B su nezavisni ako $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$.

Događaji A i B su uvjetno nezavisni uz dani C ako $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(B|C)$.

Događaj A je nezavisan sam sa sobom ako, i samo ako, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap A) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$. Dakle, A je nezavisan sam sa sobom ako, i samo ako, $\mathbb{P}(A) = 0$ ili 1 (jer mora vrijediti $\mathbb{P}(A)^2 - \mathbb{P}(A) = 0$).

Analogno, A je nezavisan sam sa sobom uz dani C ako, i samo ako, $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A \cap A|C) = \mathbb{P}(A|C)\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A|C)^2$. Zadnja relacija je ekvivalentna s $\mathbb{P}(A|C)^2 - \mathbb{P}(A|C) = 0$, iz čega zaključujemo da je $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A \cap C)/\mathbb{P}(C) = 0$, tj. $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$, ili $\mathbb{P}(A|C) = \mathbb{P}(A \cap C)/\mathbb{P}(C) = 1$, tj. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(C)$.

Iz gornje diskusije trivijalno slijedi da ako je A nezavisan sam sa sobom, onda je i nezavisan sam sa sobom uz dani C. Preciznije, ako je $\mathbb{P}(A) = 0$, onda je i $\mathbb{P}(A \cap C) = 0$. S druge strane, ako je $\mathbb{P}(A) = 1$, onda je $\mathbb{P}(A \cap C) = 1 - \mathbb{P}(A^c \cup C^c) = 1 - \mathbb{P}(A^c) - \mathbb{P}(C^c) + \mathbb{P}(A^c \cap C^c) = 1 - \mathbb{P}(C^c) = \mathbb{P}(C)$.

(c) Stavimo $A_1 = \{1.\ \text{izabrano jelo je sarma}\}$, $A_2 = \{2.\ \text{izabrano jelo je sarma}\}$, $A_3 = \{3.\ \text{izabrano jelo je maneštra}\}$, $A_4 = \{4.\ \text{izabrano jelo je čobanac}\}$, $A_5 = \{5.\ \text{izabrano jelo je čobanac}\}$ i $A = \{\text{kuharica je skuhala, redom, sarmu, sarmu, maneštru, čobanac i čobanac}\}$. Očito, $A = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$. Sada imamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\ &= \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1 \cap A_2)\mathbb{P}(A_4|A_1 \cap A_2 \cap A_3)\mathbb{P}(A_5|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 0.2 \cdot 0.4 \cdot 0.15 \cdot 0.15 \cdot 0.4. \end{aligned}$$

(d) Stavimo $H_1 = \{\text{u prvom bacanju je pala crna boja}\}$ te $H_2 = \{\text{u prvom bacanju je pala bijela boja}\}$. Očito $\mathbb{P}(H_1) = 2/3$ i $\mathbb{P}(H_2) = 1/3$. Nadalje, stavimo $A_i = \{\text{crna boja se nije pojavila dva puta zaredom u } i \text{ bacanja}\}$, $i = 2, 3, 4, 5$. Imamo

$$\mathbb{P}(A_5) = \mathbb{P}(H_1)\mathbb{P}(A_5|H_1) + \mathbb{P}(H_2)\mathbb{P}(A_5|H_2) = \frac{2}{3}\frac{1}{3}\mathbb{P}(A_3) + \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_4) + \frac{2}{9}\mathbb{P}(A_3).$$

Analogno zaključujemo

$$\mathbb{P}(A_4) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(A_3) + \frac{2}{9}\mathbb{P}(A_2).$$

Kako je $\mathbb{P}(A_2) = 5/9$ i $\mathbb{P}(A_3) = 11/27$, imamo $\mathbb{P}(A_5) = 43/3^5$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 4.

(a) U ćeliji je 10 zatvorenika, pri čemu su svaka dvojica različite visine. Policajac na slučajan način odabere četiri zatvorenika i poreda ih u red za prepoznavanje.

(a1) (3 boda) Kolika je vjerojatnost da su zatvorenici poredani po visini, od višeg prema nižem?

(a2) (3 boda) Policijski nadzornik nakon toga razmješta zatvorenike po visini tako da stoje poredani od višeg prema nižem. Kolika je vjerojatnost da je u tom razmještanju barem jedan zatvorenik ostao na istom mjestu u redu gdje je i bio?

(b) (4 boda) Nakon prepoznavanja zatvorenici idu na večeru. Ivica, Zdravko i još 8 zatvorenika sjedaju za okrugli stol na slučajan način. Kolika je vjerojatnost da Ivica i Zdravko ne sjede jedan do drugoga, ali da su najviše tri čovjeka između njih?

Rješenje.

(a1) Označimo zatvorenike brojevima $1, 2, \ldots, 10$ redom po visini (1 je najviši, a 10 najniži). Tada je

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \in \{1, \ldots, 10\}, x_i \neq x_j\}\,,\ |\Omega| = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7.$$

Traženi događaj je

$$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \,:\, x_i \in \{1, \ldots, 10\}, x_1 < x_2 < x_3 < x_4\}\,,\ |A| = \binom{10}{4}.$$

Dakle, $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{\binom{10}{4}}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7} = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$.

Alternativno rješenje: odabrana su četiri zatvorenika. Ta četiri zatvorenika mogu biti poredana na $4! = 24$ načina. U samo jednom će biti poredani po visini. Tražena vjerojatnost je dakle $1/24$.

(a2) Promotrimo samo odabrane zatvorenike i označimo ih brojevima $1, 2, 3, 4$ redom po visini (1 je najviši, a 4 najniži). Opisanih razmještaja ima koliko i permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4\}$ sa barem jednom fiksnom točkom. Odnosno:

$$A_i = \{\text{zatvorenik } i \text{ se u početnom razmještaju nalazi na } i\text{-tom mjestu}\},\ i = 1, 2, 3, 4.$$

Tražena vjerojatnost je

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) &= \sum_{i=1}^{4} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i \neq j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i \neq j \neq k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) \\ &= 4 \cdot \frac{3!}{4!} - \binom{4}{2}\frac{2!}{4!} + \binom{4}{3}\frac{1}{4!} - \frac{1}{4!} = \frac{15}{24} = \frac{5}{8}.\end{aligned}$$

(b) Označimo događaje

$$B_i = \{\text{točno } i \text{ osobe sjede između Zdravka i Ivice}\},\ i = 1,2,3.$$

Budući da je $\Omega = \{\text{svi mogući kružni rasporedi 10 osoba}\}$ i $|\Omega| = 9!$, vrijedi:

$$\mathbb{P}(B_1) = \frac{8 \cdot 7! \cdot 2}{9!} = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{P}(B_2) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6! \cdot 2}{9!} = \frac{2}{9}$$
$$\mathbb{P}(B_3) = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5! \cdot 2}{9!} = \frac{2}{9}.$$

Tražena vjerojatnost je $\mathbb{P}(B_1) + \mathbb{P}(B_2) + \mathbb{P}(B_3) = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

Alternativno rješenje: Ivica može sjesti za stol na bilo koje mjesto. Nakon što je Ivica sjeo za stol, Zdravko može odabrati jedno od preostalih devet mjesta. Od tih devet šest ih je takvih da ne sjedi do Ivice te da su između njih najviše tri čovjeka (zabranjena mjesta su dva do Ivica i mjesto za četiri stolice udaljeno od Ivice). Dakle, tražena vjerojatnost je $6/9$.

VJEROJATNOST

Prvi kolokvij – 29. studenog 2017.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ s diskretnom vjerojatnosnom funkcijom gustoće f_X. Precizno definirajte pojam matematičkog očekivanja slučajne varijable X.

(b) (3 boda) Pretpostavite da je $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ prebrojiv skup, te $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$. Neka su $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ dvije slučajne varijable na Ω koje imaju matematičko očekivanje. Dokažite da tada i slučajna varijabla $X+Y$ ima matematičko očekivanje te da vrijedi $\mathbb{E}\,(X+Y) = \mathbb{E}\,(X) + \mathbb{E}\,(Y)$.

(c) (2 boda) Igrač se kladi na jedan od brojeva između 1 i 6. Bace se tri (simetrične) igraće kocke. Ako se broj na koji se igrač kladio pojavi i puta, $i = 1, 2, 3$, igrač dobiva i kuna. Ako se broj na koji se igrač kladio ne pojavi niti na jednoj kocki, igrač gubi 1 Kn. Neka je X slučajni dobitak (gubitak) igrača. Izračunajte $\mathbb{E}\,(X)$.

(d) (3 boda) Neka je X broj fiksnih točaka slučajne permutacije skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Nađite $\mathbb{E}\,(X)$. (Uputa: napišite X kao zbroj od n jednostavnijih slučajnih varijabli.)

Rješenje.

(a) Neka je X diskretna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Ako vrijedi $\sum_{x\in\mathbb{R}} |x| f(x) < \infty$, onda kažemo da X ima *matematičko očekivanje* koje definiramo kao

$$\mathbb{E}\,(X) := \sum_{x\in\mathbb{R}} x f(x).$$

(b) Računamo

$$\begin{aligned}\sum_{\omega\in\Omega} |X+Y|(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) &= \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)+Y(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &\leq \sum_{\omega\in\Omega} |X(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} |Y(\omega)|\mathbb{P}(\{\omega\}) < \infty\,.\end{aligned}$$

Po Propoziciji 4.23 zaključujemo da $X+Y$ ima matematičko očekivanje. Nadalje, ponovno koristeći Propoziciju 4.23 dobivamo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,(X+Y) &= \sum_{\omega\in\Omega}(X+Y)(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in\Omega}(X(\omega)+Y(\omega))\mathbb{P}(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) + \sum_{\omega\in\Omega} Y(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{E}\,(X) + \mathbb{E}\,(Y)\,.\end{aligned}$$

(c) Slučajni dobitak (gubitak) X je slučajna varijabla koja prima vrijednosti u skupu $\{-1, 1, 2, 3\}$. Odredimo distribuciju od X:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=-1) &= \binom{3}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}\,, \\ \mathbb{P}(X=1) &= \binom{3}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}\,, \\ \mathbb{P}(X=2) &= \binom{3}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{15}{216}\,, \\ \mathbb{P}(X=3) &= \binom{3}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(\frac{5}{6}\right)^0 = \frac{1}{216}\,.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\mathbb{E}(X) = \frac{(-1)\cdot 125}{216} + \frac{1\cdot 75}{216} + \frac{2\cdot 15}{216} + \frac{3\cdot 1}{216} = \frac{-125+75+30+3}{216} = -\frac{17}{216}\,.$$

Alternativno rješenje: za $j=1,2,3$, neka je A_j događaj da se broj na koji se igrač kladi pojavi u j-tom bacanju kocke, te B događaj da se broj na koji se igrač kladi ne pojavi niti jednom ($B = (A_1 \cup A_2 \cup A_3)^c$). Stavimo $Y_j := \mathbf{1}_{A_j}$, $j=1,2,3$, te $Z := \mathbf{1}_B$. Riječima, $Y_j = 1$ ako se broj na koji se igrač kladi pojavi u j-tom bacanju kocke, a 0 inače; slično i za Z. Uočite da je $Y_1+Y_2+Y_3$ broj koliko puta je pao broj na koji se igrač kladi. Zato je ukupni dobitak(gubitak) jednak $X = Y_1+Y_2+Y_3-Z$. Slučajne varijable Y_j, $j=1,2,3$, su Bernoullijeve s parametrom $1/6$, dok je Z Bernoullijeva s parametrom $(5/6)^3$ (vjerojatnost da u tri bacanja nije pao broj na koji se igrač kladi). Slijedi: $\mathbb{E}(Y_j) = 1/6$, $j=1,2,3$, te $\mathbb{E}(Z) = (5/6)^3$. Iz linearnosti očekivanja zaključujemo da je

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1+Y_2+Y_3-Z) = \mathbb{E}(Y_1)+\mathbb{E}(Y_2)+\mathbb{E}(Y_3)-\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{6}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\left(\frac{5}{6}\right)^3 = -\frac{17}{216}\,.$$

(d) Za $i=1,2,\ldots,n$, neka je $A_i = \{i \text{ je fiksna točka permutacije}\}$, te $X_i = 1_{A_i}$. Tada je $X = X_1+X_2+\cdots+X_n$ i zbog linearnosti očekivanja

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}(X_i)\,.$$

Svaka od slučajnih varijabli X_i je Bernoullijeva pa je

$$\mathbb{E}(X_i) = \mathbb{P}(A_i) = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}\,.$$

Zato je $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$.