JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje, kalkulator, te tablicu vrijednosti funkcije distribucije jedinične normalne razdiobe koju će student dobiti zajedno s kolokvijem.
- Rješenja i rezultati će biti objavljeni do četvrtka, 7. veljače u 22 sata na web-stranici kolegija.
- Uvid u kolokvij održat će se u petak, 8. veljače u 11:30 u prostoriji 201.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli s pripadajućim funkcijama distribucije F_{X_n}, te neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X. Detaljno definirajte *konvergenciju po distribuciji* niza slučajnih varijabli $(X_n)_{n\geq 1}$ prema slučajnoj varijabli X.

(b) (4 boda) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ te X također slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Detaljno dokažite sljedeću tvrdnju: ako za sve $j \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X = j)$$

tada niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira prema X po distribuciji.

(c) (2 boda) Vjerojatnost da je mandarina gnjila je 0.05. Pomoću Poissonove aproksimacije nađite približnu vjerojatnost da u kutiji od trideset mandarina ne bude više od jedne gnjile.

(d) (2 boda) Neka je X nenegativna diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dokažite sljedeću nejednakost: za svaki $c > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X > \sqrt[3]{c}) \leq \frac{\mathbb{E}\,(X^3)}{c}\,.$$

JMBAG

IME I PREZIME

BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 2.

(a) Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s funkcijom gustoće f.

- (a1) (2 boda) Precizno iskažite definiciju uvjetne (diskretne) funkcije gustoće slučajne varijable X uz dano $Y = y$, te definiciju uvjetnog očekivanja slučajne varijable X uz dano $Y = y$.
- (a2) (3 boda) Dokažite da vrijedi $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$, ukoliko oba očekivanja postoje.

(b) Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & (x,y) = (0,1); \\ \frac{1}{6}, & (x,y) = (0,3); \\ \frac{1}{3}, & (x,y) = (1,2); \\ \frac{1}{3}, & (x,y) = (1,3); \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

- (b1) (1 bod) Izračunajte $\mathbb{E}[2XY]$.
- (b2) (2 boda) Izračunajte $\mathbb{E}[Y|X = 1]$.
- (b3) (2 boda) Odredite marginalne razdiobe slučajnih varijabli X i Y. Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable?

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 3.

(a) (1 bod) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Precizno definirajte pojam matematičkog očekivanja od X.

(b) (2 boda) Navedite primjer jedne apsolutno neprekidne slučajne varijable čije matematičko očekivanje postoji. Navedite primjer jedne apsolutno neprekidne slučajne varijable čije matematičko očekivanje ne postoji. (Sve svoje tvrdnje dokažite i detaljno obrazložite.)

(c) (3 boda) Neka je $X \sim \mathrm{N}(0,1)$ te neka je $X^+ = \max\{0, X\}$. Je li X^+ apsolutno neprekidna slučajna varijabla? Je li X^+ diskretna slučajna varijabla? (Sve svoje tvrdnje dokažite i detaljno obrazložite.)

(d) (4 boda) Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s neprekidnom funkcijom gustoće f, funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Pokažite da je $\mathbb{E}\,(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx$.

JMBAG | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (2 boda) Neka je X Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X.

(c) (3 boda) Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ i neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$, te neka je $\mathbb{P}(Y \leq a) = 1$. Neka su G_X, G_Y i G_Z funkcije izvodnice vjerojatnosti slučajnih varijabli X, Y i $Z := a + bX - Y$. Dokažite da vrijedi $G_Z(t) = t^a G_X(t^b) G_Y(t^{-1})$, $t \neq 0$. Obrazložite svaki korak dokaza.

(d) (3 boda) Neka su $X \sim P(1)$ i $Y \sim U(1, 2, 3)$ nezavisne slučajne varijable i neka je $Z = 3 + 3X - Y$. Odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable Z. Kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla Z poprimi parnu vrijednost?

Napomena: Oznaka $Y \sim U(1, 2, 3)$ znači da je Y uniformna slučajna varijabla na skupu $\{1, 2, 3\}$.

JMBAG	IME I PREZIME	BROJ BODOVA

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Precizno iskažite centralni granični teorem.

(b) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}\,(X_n) = \mu$ i $\mathrm{Var}\,(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b1) (2 boda) Uz dodatnu prepostavku da su slučajne varijable $(X_n)_{n\geq 1}$ nezavisne, dokažite slabi zakon velikih brojeva, odnosno da niz

$$\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$$

konvergira prema μ po vjerojatnosti.

(b2) (2 boda) Vrijedi li nužno isti zaključak i ako slučajne varijable $(X_n)_{n\geq 1}$ *nisu* nezavisne?

(c) (4 boda) Slastičar Goran odlučio je zaraditi novce na *Torti djeveruši*, svojoj najnovijoj kulinarskoj kreaciji, koju prodaje po cijeni od 120 kuna. Troškovi izrade jedne takve torte iznose 80 kuna, a za svaku tortu vjerojatnost da će je uspjeti prodati je 80%. Koliko torti Goran treba napraviti kako bi s vjerojatnosti od barem 95% bio siguran da će zaraditi barem 1600 kuna?