VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 1.

(a) (2 boda) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli s pripadajućim funkcijama distribucije F_{X_n}, te neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X. Detaljno definirajte *konvergenciju po distribuciji* niza slučajnih varijabli $(X_n)_{n\geq 1}$ prema slučajnoj varijabli X.

(b) (4 boda) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$ te X također slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{Z}_+$. Detaljno dokažite sljedeću tvrdnju: ako za sve $j \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \mathbb{P}(X = j)$$

tada niz $(X_n)_{n\geq 1}$ konvergira prema X po distribuciji.

(c) (2 boda) Vjerojatnost da je mandarina gnjila je 0.05. Pomoću Poissonove aproksimacije nađite približnu vjerojatnost da u kutiji od trideset mandarina ne bude više od jedne gnjile.

(d) (2 boda) Neka je X nenegativna diskretna slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dokažite sljedeću nejednakost: za svaki $c > 0$ vrijedi

$$\mathbb{P}(X > \sqrt[3]{c}) \leq \frac{\mathbb{E}\,(X^3)}{c}\,.$$

Rješenje.

(a) Niz slučajnih varijabli $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira po distribuciji* slučajnoj varijabli X ako niz pripadnih funkcija distribucije konvergira funkciji distribucije od X. Niz funkcija distribucije $(F_{X_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergira funkciji distribucije F_X ako vrijedi

$$F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x), \qquad x \in C_{F_X},$$

gdje je C_{F_X} skup točaka neprekidnosti funkcije F_X.

(b) Neka su F_{X_n} i F_X redom funkcije distribucije slučajnih varijabli X_n, odnosno X. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \sum_{j=0}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{P}(X = j) = \sum_{j=0}^{\lfloor x\rfloor} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{\lfloor x\rfloor} \mathbb{P}(X_n = j) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x).$$

Zamjena limesa i sume (četvrta jednakost gore) opravdana je činjenicom da je broj sumanada konačan. Dakle, vrijedi $F_X(x) = \lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$, te specijalno i za sve $x \in C_{F_X}$.

(c) Neka je X broj gnjilih mandarina u kutiji. Tada je $X \sim B(30, 0.05)$. Zanima nas $\mathbb{P}(X \leq 1) = P(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)$. Slučajnu varijablu X možemo po zakonu rijetkih događaja aproksimirati Poissonovom slučajnom varijablom, recimo Y, s parametrom $\lambda = \mathbb{E}\,(X) = 30 \times 0.05 = 1.5$. Vrijedi

$$\mathbb{P}(Y = 0) = e^{-1.5}, \quad \mathbb{P}(Y = 1) = 1.5e^{-1.5}, \quad \mathbb{P}(Y \leq 1) = \mathbb{P}(Y = 0) + P(Y = 1) = 2.5e^{-1.5} \approx 0.558$$

(d) Upotrebom Markovljeve nejednakosti imamo

$$\mathbb{P}(X > \sqrt[3]{c}) = \mathbb{P}(X^3 > c) \leq \frac{\mathbb{E}\,(X^3)}{c}\,.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 2.

(a) Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor definiran na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, s funkcijom gustoće f.

(a1) (2 boda) Precizno iskažite definiciju uvjetne (diskretne) funkcije gustoće slučajne varijable X uz dano $Y = y$, te definiciju uvjetnog očekivanja slučajne varijable X uz dano $Y = y$.

(a2) (3 boda) Dokažite da vrijedi $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X|Y]] = \mathbb{E}[X]$, ukoliko oba očekivanja postoje.

(b) Neka je (X, Y) dvodimenzionalni diskretni slučajni vektor s funkcijom gustoće

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}, & (x,y) = (0,1); \\ \frac{1}{6}, & (x,y) = (0,3); \\ \frac{1}{3}, & (x,y) = (1,2); \\ \frac{1}{3}, & (x,y) = (1,3); \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b1) (1 bod) Izračunajte $\mathbb{E}[2XY]$.

(b2) (2 boda) Izračunajte $\mathbb{E}[Y|X = 1]$.

(b3) (2 boda) Odredite marginalne razdiobe slučajnih varijabli X i Y. Jesu li X i Y nezavisne slučajne varijable?

Rješenje.

(a1) Definicije 5.29 i 5.32 iz skripte.

(a2) Teorem 5.34 iz skripte.

(b1) $\mathbb{E}[2XY] = 2 \cdot 0 \cdot 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 0 \cdot 3 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} + 2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{10}{3}$.

(b2) Kako je $f_X(1) = f(1,2) + f(1,3) = \frac{2}{3}$, dobijemo

$$\mathbb{E}[Y|X = 1] = 1 \cdot \frac{0}{\frac{2}{3}} + 2 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} + 3 \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{5}{2}.$$

(b3) Marginalne razdiobe slučajnih varijabli su $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ i $Y \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Slučajne varijable X i Y nisu nezavisne jer npr.

$$f(1,1) = 0 \neq \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} = f_Y(1) \cdot f_X(1).$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 3.

(a) (1 bod) Neka je X apsolutno neprekidna slučajna varijabla s funkcijom gustoće f. Precizno definirajte pojam matematičkog očekivanja od X.

(b) (2 boda) Navedite primjer jedne apsolutno neprekidne slučajne varijable čije matematičko očekivanje postoji. Navedite primjer jedne apsolutno neprekidne slučajne varijable čije matematičko očekivanje ne postoji. (Sve svoje tvrdnje dokažite i detaljno obrazložite.)

(c) (3 boda) Neka je $X \sim \mathrm{N}(0, 1)$ te neka je $X^+ = \max\{0, X\}$. Je li X^+ apsolutno neprekidna slučajna varijabla? Je li X^+ diskretna slučajna varijabla? (Sve svoje tvrdnje dokažite i detaljno obrazložite.)

(d) (4 boda) Neka je X nenegativna apsolutno neprekidna slučajna varijabla s neprekidnom funkcijom gustoće f, funkcijom distribucije F i konačnim očekivanjem. Pokažite da je $\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x)dx$.

Rješenje.

(a) Slučajna varijabla X ima matematičko očekivanje ako je $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx < \infty$. U tom slučaju, isto definiramo kao $\mathbb{E}(X) := \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

(b) Neka je $X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$, $\lambda > 0$. Tada X ima matematičko očekivanje koje je jednako $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$. Zaista, kako je funkcija gustoće od X dana s $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ za $x > 0$ i $f(x) = 0$ za $x \leq 0$, imamo $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} x dx = \frac{1}{\lambda}$. Dakle, očekivanje je dobro definirano i $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$.

Uzmimo sada Paretovu slučajnu varijablu s parametrom $\alpha = 2$. Funkcija gustoće od X je $f(x) = x^{-2}$ za $x \geq 1$ i $f(x) = 0$ za $x < 1$. Sada imamo $\int_{-\infty}^{\infty} |x|f(x)dx = \int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \infty$. Dakle, X nema očekivanje.

(c) Slučajna varijabla X^+ nije apsolutno neprekidna jer $\mathbb{P}(X^+ = 0) = \mathbb{P}(X \leq 0) = \frac{1}{2}$. Također, X^+ nije niti diskretna slučajna varijabla. Naime, kada bi to bio slučaj onda bi postojao konačan ili prebrojiv skup $D \subset [0, \infty)$ t.d. $\mathbb{P}(X^+ \in D) = 1$. Po pokazanom, $0 \in D$ i $\mathbb{P}(X^+ = 0) = \frac{1}{2}$. S druge strane imamo

$$\mathbb{P}(X^+ \in D \setminus \{0\}) = \mathbb{P}(X \in D \setminus \{0\}) = \sum_{d \in D \setminus \{0\}} \mathbb{P}(X = d) = 0,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom.

(d) Vidjeti Teorem 6.19 u skripti.

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 4.

(a) (2 boda) Neka je X diskretna slučajna varijabla s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$. Precizno definirajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti slučajne varijable X.

(b) (2 boda) Neka je X Poissonova slučajna varijabla s parametrom $\lambda > 0$. Izračunajte funkciju izvodnicu vjerojatnosti od X.

(c) (3 boda) Neka su $a, b \in \mathbb{N}$ i neka su X i Y nezavisne slučajne varijable s vrijednostima u $\mathbb{N} \cup \{0\}$, te neka je $\mathbb{P}(Y \leq a) = 1$. Neka su G_X, G_Y i G_Z funkcije izvodnice vjerojatnosti slučajnih varijabli X, Y i $Z := a + bX - Y$. Dokažite da vrijedi $G_Z(t) = t^a G_X(t^b) G_Y(t^{-1})$, $t \neq 0$. Obrazložite svaki korak dokaza.

(d) (3 boda) Neka su $X \sim P(1)$ i $Y \sim U(1, 2, 3)$ nezavisne slučajne varijable i neka je $Z = 3 + 3X - Y$. Odredite funkciju izvodnicu slučajne varijable Z. Kolika je vjerojatnost da slučajna varijabla Z poprimi parnu vrijednost?

Napomena: Oznaka $Y \sim U(1, 2, 3)$ znači da je Y uniformna slučajna varijabla na skupu $\{1, 2, 3\}$.

Rješenje.

(a) Definicija 7.1 iz skripte.

(b) Primjer 7.4 (b) iz skripte.

(c) Kako je za $t \neq 0$, $G_Z(t) = \mathbb{E}\left[t^Z\right]$, zbog linearnosti očekivanja slijedi

$$G_Z(t) = \mathbb{E}\left[t^{a+bX-Y}\right] = t^a \mathbb{E}\left[t^{bX} t^{-Y}\right].$$

Slučajne varijable X i Y su nezavisne, pa su nezavisne i slučajne varijable t^{bX} i t^{-Y}. Stoga je

$$G_Z(t) = t^a \mathbb{E}\left[t^{bX}\right] \mathbb{E}\left[t^{-Y}\right] = t^a \mathbb{E}\left[\left(t^b\right)^X\right] \mathbb{E}\left[\left(t^{-1}\right)^Y\right] = t^a G_X(t^b) G_Y(t^{-1}).$$

(d) Odredimo prvo funkcije izvodnice vjerojatnosti G_X i G_Y slučajnih varijabli X i Y:

$$G_X(t) = e^{\lambda(t-1)} = e^{t-1},$$
$$G_Y(t) = \frac{1}{3}t + \frac{1}{3}t^2 + \frac{1}{3}t^3.$$

Korištenjem formule iz (c) dijela slijedi da je

$$G_Z(t) = t^3 G_X(t^3) G_Y(t^{-1}) = \frac{t^3 e^{t^3-1}}{3}\left(t^{-1} + t^{-2} + t^{-3}\right) = \frac{e^{t^3-1}}{3}\left(t^2 + t + 1\right).$$

Nadalje, tražena vjerojatnost jednaka je

$$\mathbb{P}(\{\omega : Z(\omega) \text{ je paran}\}) = \sum_{k=0}^{\infty} p_{2k}$$

gdje je $p_n = \mathbb{P}(Z = n)$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Kako je

$$G_Z(1) = p_0 + p_1 + \ldots + p_n + \ldots$$
$$G_Z(-1) = p_0 - p_1 + \ldots + (-1)^n p_n + \ldots,$$

slijedi da je

$$\mathbb{P}(\{\omega : Z(\omega) \text{ je paran}\}) = \frac{G_Z(1) + G_Z(-1)}{2} = \frac{3 + e^{-2}}{6}.$$

VJEROJATNOST

Drugi kolokvij – 6. veljače 2019.

Zadatak 5.

(a) (2 boda) Precizno iskažite centralni granični teorem.

(b) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz slučajnih varijabli takvih da je $\mathbb{E}(X_n) = \mu$ i $\mathrm{Var}(X_n) = \sigma^2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(b1) (2 boda) Uz dodatnu prepostavku da su slučajne varijable $(X_n)_{n\geq 1}$ nezavisne, dokažite slabi zakon velikih brojeva, odnosno da niz

$$\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}\right)_{n\geq 1}$$

konvergira prema μ po vjerojatnosti.

(b2) (2 boda) Vrijedi li nužno isti zaključak i ako slučajne varijable $(X_n)_{n\geq 1}$ *nisu* nezavisne?

(c) (4 boda) Slastičar Goran odlučio je zaraditi novce na *Torti djeveruši*, svojoj najnovijoj kulinarskoj kreaciji, koju prodaje po cijeni od 120 kuna. Troškovi izrade jedne takve torte iznose 80 kuna, a za svaku tortu vjerojatnost da će je uspjeti prodati je 80%. Koliko torti Goran treba napraviti kako bi s vjerojatnosti od barem 95% bio siguran da će zaraditi barem 1600 kuna?

Rješenje.

(a) Neka je $(X_n)_{n\geq 1}$ niz nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem μ i varijancom σ^2, te neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ za sve $n \geq 1$. Tada niz $\left(\frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}\right)_{n\geq 1}$ konvergira po distribuciji prema slučajnoj varijabli s distribucijom $N(0, 1)$.

(b1) Za $n \geq 1$ stavimo $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Vrijedi $\mathbb{E}(S_n) = n\mu$ i, zbog nezavisnosti, $\mathrm{Var}(S_n) = n\sigma^2$. Sada, primjenom Čebiševljeve nejednakosti, imamo

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{Var}(S_n/n)}{\varepsilon^2} = \frac{\mathrm{Var}(S_n)}{n^2\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2},$$

što teži u 0 kada n teži u ∞.

(b2) Isti zaključak ne mora vrijediti. Na primjer, neka je X_1 slučajna varijabla s Bernoullijevom distribucijom $B(1, \frac{1}{2})$, te neka je $X_n = X_1$ za sve $n \geq 2$. Tada, budući da X_1 poprima isključivo vrijednosti 0 i 1, slijedi

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \frac{1}{2}\right| > 0.1\right) = \mathbb{P}\left(\left|X_1 - \frac{1}{2}\right| > 0.1\right) = \mathbb{P}(X_1 \notin [0.4, 0.6]) = 1,$$

što očito ne konvergira prema 0 kako nalaže definicija konvergencije po vjerojatnosti.

(c) Neka je n broj torti koje Goran treba napraviti, te neka su $X_1, \dots, X_n$ nezavisne Bernoullijeve slučajne varijable s parametrom 0.8 koje označavaju je li odgovarajuću tortu Goran uspio prodati. Uočimo da je za svaki i, $\mathbb{E}\, X_i = 0.8$ i $\operatorname{Var} X_i = 0.8 \cdot (1 - 0.8) = 0.16$.

Nadalje, neka je $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ ukupan broj torti koje je Goran uspio prodati. Tada je Goranova zarada $120S_n - 80n$, pa želimo postići da je

$$0.95 \leq \mathbb{P}\left(120S_n - 80n \geq 1600\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{0.16}}\left(S_n - n \cdot 0.8\right) \geq \frac{1}{\sqrt{n}\sqrt{0.16}}\left(\frac{1600 + 80n}{120} - n \cdot 0.8\right)\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_n - n \cdot 0.8}{\sqrt{n}\sqrt{0.16}} \geq \frac{100 - n}{3\sqrt{n}}\right).$$

Budući da, po centralnom graničnom teoremu, slučajna varijabla $\frac{S_n - n \cdot 0.8}{\sqrt{n}\sqrt{0.16}}$ približno slijedi jediničnu normalnu distribuciju slijedi da je

$$0.95 \leq 1 - \Phi\left(\frac{100 - n}{3\sqrt{n}}\right), \quad \text{tj.} \quad \Phi\left(\frac{100 - n}{3\sqrt{n}}\right) \leq 0.05 = \Phi(-1.65),$$

pri čemu je Φ funkcija distribucije jedinične normalne razdiobe. Kako je ta funkcija strogo rastuća i neprekidna, slijedi da je

$$\frac{100 - n}{3\sqrt{n}} \leq -1.65, \quad \text{tj.} \quad n - 4.95\sqrt{n} - 100 \geq 0.$$

Rješavanjem ove kvadratne nejednadžbe (u terminima varijable $\sqrt{n}$) dobivamo

$$\sqrt{n} \geq \frac{4.95 + \sqrt{4.95^2 + 400}}{2} \approx 12.77.$$

Zaključujemo da Goran treba napraviti barem $n \geq 164$ torte.